

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

18118 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL

ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVI. — ANNÉE 1892.

(TOME XXVI DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences; t. I, 1888 : *Correspondance* (1638-1656); t. II, 1889 : *Correspondance* (1657-1659); t. III; 1890 : *Correspondance* (1660-1661). La Haye, Martinus Nyhoff (¹).

Dans la séance du 28 octobre 1882 de la section des Sciences de l'Académie royale d'Amsterdam, à l'occasion d'une proposition tendant à rendre à la mémoire de Huygens un hommage public, en lui érigeant une statue, M. van de Sande Bakhuyzen fit remarquer qu'on pourrait atteindre le but proposé, fonder un monument en l'honneur de Huygens, et en même temps rendre à la Science un service signalé, soit en faisant paraître une nouvelle édition de ses Œuvres, soit en publiant ses écrits restés inédits, ainsi que sa Correspondance. A ce projet, l'Académie donna unanimement son adhésion.

Nous empruntons ce renseignement, qui fait connaître l'origine de la publication entreprise par la Société hollandaise des Sciences de Harlem, à la préface signée par les Directeurs de cette Société.

La commission à laquelle l'Académie des Sciences avait confié le soin d'étudier le projet de la publication a continué et consi-

---

(¹) Voir *Bulletin*, XII_2, p. 181-191.

dérablement élargi sa tâche en se chargeant de la rédaction. Dans la préface des Directeurs, que M. J. Bertrand a fait déjà connaître aux lecteurs de ce Bulletin, se trouve retracée l'histoire des éditions antérieures des travaux de Huygens, ainsi que celle de la publication d'une partie de sa Correspondance tirée des documents que Huygens avait légués à la Bibliothèque de Leyde.

Un avertissement de la Commission (¹) donne le plan général de l'Ouvrage et les renseignements nécessaires pour guider le lecteur.

I. Une des propriétés les plus caractéristiques de l'édition de la Correspondance, c'est la règle adoptée par la Rédaction « de ne laiſſer perdre aucun détail, de faire publier tout ce qui pouvait être mis dans un ordre et ſous une forme intelligibles ». Les considérations qui recommandent cette résolution sont analogues à celles qui obligent à donner, dans le cas d'observations de haute précision, tous les détails possibles, sans partage et sans réserve. Ce n'est que de cette manière que l'on obtient un travail durable, dont on peut connaître la valeur scientifique et capable d'être complété et amendé par des recherches postérieures. Il est évident qu'on n'eût pu suivre cette règle, si l'on avait eu à tenir compte avec des fonds restreints. Heureusement MM. les Directeurs de la Société hollandaise ont été d'avis que la grande utilité d'une publication absolument complète ne permettait pas la moindre restriction. Sans cette généreuse libéralité, M. A.-M. Clerke (²) n'eût pu dire que, même dans ce siècle avec son abondance d'éditions complètes, il n'a jamais été érigé à la mémoire d'un grand homme un monument littéraire aussi gigantesque que celui de l'édition nouvelle des Œuvres de Huygens.

Le principe que nous venons d'indiquer a obligé la Commission de rédaction à comprendre dans la Correspondance, non seulement les lettres écrites par Huygens ou adressées à lui, mais aussi

(¹) Le référat du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (t. XX, p. 10) parle d'une seconde préface de M. Bierens de Haan, ce qui est moins exact. L'avertissement a été signé par M. Bierens de Haan en sa qualité de Président de la Commission.

(²) *Nature*, t. XXXVIII, p. 193; 1888.

celles qui traitent de lui ou qui peuvent contribuer à le faire connaître dans le cadre de son temps. Des 1012 documents publiés dans les trois Volumes parus jusqu'à présent, 174 n'appartiennent pas à la Correspondance proprement dite de Huygens (¹). De ces 174 pièces, 72 font parties de la Correspondance de Constantyn Huygens père, 56 s'occupent des questions brûlantes de l'horloge à pendule ou du système de Saturne, 34 ont trait à des questions mathématiques ou mécaniques, 5 se rapportent à la personne de Huygens ou à ses Œuvres, 4 font mention de quelques autres problèmes d'Astronomie, 2 appartiennent à la Correspondance mutuelle des frères Constantyn et Louis, 1 enfin est un écrit de Kircher trouvé dans la collection et traitant d'observations botaniques.

Les 72 Lettres faisant partie de la Correspondance de Constantyn père nous donnent de précieux renseignements sur l'enfance des fils. Les comptes rendus du précepteur Henri Bruno, au sujet de l'étude de ses élèves (1ʳ, 3ᵉ) et la « Norma ſtudiorum et vitæ reliquæ præſcripta Conſtantino et Chriſtiano Hugeniis, Academiam Leidenſem adituris » du père (4), montrent que dans ce temps-là notre question de *surmenage* dans l'enseignement n'existait pas encore ou au moins ne préoccupait pas les précepteurs. Cependant les projets de Bruno n'obtinrent pas toujours l'approbation du père, qui sentait sa supériorité (2). C'est surtout la correspondance avec les professeurs de « l'eschole illuſtre d'Orange », qu'on venait de fonder à Breda, avec van Renesse (15, 28), Brosterhuysen (16), Dauber (19, 29, 34, 36, 47, 58) et avec le Curateur Rivet (26, 32, 33, 60, 63), qui nous montre les soins consciencieux et touchants avec lesquels Constantyn Huygens père s'acquittait de ses devoirs envers ses enfants; de plus, elle procure un Tableau de la vie à Breda. Comme détails nous citerons les *cimices* au collège de Breda (15), le désir des professeurs de dîner à la table du régent (26), le scandale que causa Brosterhuysen en vivant avec sa servante (43), etc.

On s'imagine sans peine la joie qu'a dû causer, aux professeurs

(¹) Plusieurs de ces 174 Lettres ont été incluses dans des Lettres adressées à Huygens.

de Breda, l'arrivée des deux fils très doués du Curateur Huygens de l'Université, déjà renommée, de Leyde, à leur nouvelle école. Par rapport à Christiaan surtout, Dauber est plein d'éloges. Il l'appelle « un nouvel Orient, qui ne tardera pas à envoyer les lumieres par tout » (36), et plus tard « ætate juvenis ſed virtute ſenex » (47).

Parmi les autres Lettres de la Correspondance de Constantyn Huygens père, nous signalons celles du P. Mersenne, auxquelles nous revenons tout à l'heure, celle à la princesse palatine Élisabeth, disciple de Descartes (210) et celles à Béatrice de Cusance, duchesse de Lorraine (744, 814). La description que Constantyn, dans le style expansif qui lui est propre, donne des fêtes en l'honneur du mariage de sa fille Suzanna (744) est une contribution intéressante à l'histoire des mœurs hollandaises du dix-septième siècle.

2. Ce qui prête en second lieu à l'édition en question une valeur de haute importance, ce sont les nombreuses Notices biographiques et bibliographiques insérées au pied des pages et les cinq Tables des matières placées à la fin de chaque Volume.

Par les Notices biographiques et bibliographiques, pour lesquelles le Président de la Commission, M. Bierens de Haan, s'est donné beaucoup de peine, on s'est proposé d'orienter les lecteurs à l'égard des personnes mentionnées et à donner « un aperçu des reſſources littéraires que les ſavants du dix ſeptième siècle avaient à leur diſpoſition ». Probablement dans la rédaction des œuvres proprement dites qui paraîtront après la publication des huit Volumes de Correspondance, la Commission elle-même sera la première à cueillir tous les fruits de ce travail immense. En effet, il permettra de se rendre facilement compte de l'état d'avancement de la Science au commencement de la carrière scientifique de Huygens, dans chacune des branches dont celui-ci s'est occupé, et de suivre ce qui pendant sa vie a été contribué concurremment avec lui par d'autres auteurs.

Quiconque veut étudier la nouvelle édition de Huygens éprouvera bientôt l'utilité des cinq Tables des matières, indispensables pour un travail d'une étendue aussi importante. La première et la deuxième donnent les lettres en ordre chronologique et en ordre

alphabétique, d'après les noms de l'auteur et de l'adressé. La troisième et la quatrième font connaître, par ordre alphabétique, les personnes et les Ouvrages mentionnés dans les lettres; elles renvoient à tous les lieux où figurent ces personnes et ces Ouvrages; les passages les plus importants sont indiqués en chiffres gras au lieu principal. Enfin, la cinquième Table indique les matières traitées dans les lettres. C'est plus particulièrement cette dernière Table méthodique qui peut être de grand service. C'est un guide sûr qui fait retrouver facilement tout ce qui, dans la volumineuse Correspondance, se rapporte à quelque sujet particulier. A cet effet, les matières scientifiques y ont été groupées sous divers articles généraux ([1]). Ainsi, pour connaître tous les endroits où quelque sujet est traité, on n'a qu'à chercher dans la Table l'article général auquel ce sujet appartient; là on trouvera soit le sujet même avec les passages qui s'y rapportent, soit un sous-article qui y conduit. Il va sans dire que la construction de cette dernière Table, travail long et fastidieux d'ailleurs, ne saurait être confiée qu'à une personne initiée à tous ces sujets. Il n'est que juste de remercier le membre de la Commission, M. Korteweg, qui s'en est chargé.

3. Il est impossible de définir exactement l'odeur d'une rose; on ne peut que la sentir. De même, il est impossible d'analyser le charme particulier que présente la Correspondance de Huygens. Cependant, soit qu'on parcoure en feuilletant les trois gros Volumes, soit qu'on étudie quelque sujet particulier, on reçoit deux

---

([1]) Les trois Volumes contiennent 17, 21, 26 de ces articles généraux, tandis que l'on en trouve 29 dans les trois Volumes ensemble. Ces 29 articles sont :

Algèbre.	Géodésie.	Optique.
Anatomie.	Géographie.	Philologie.
Arithmétique.	Géométrie.	Philosophie.
Astrologie.	Hydrostatique.	Physiologie.
Astronomie.	Logique.	Physique.
Beaux-arts.	Mécanique.	Poids et mesures.
Botanique.	Météorologie.	Probabilités.
Chimie.	Musique.	Trigonométrie.
Chronométrie.	Navigation.	Zoologie.
Cours des études des frères Huygens.	Œuvres.	

L'article *Œuvres* se rapporte aux écrits de Huygens.

impressions bien distinctes. La première a été exprimée par Uylenbroek en ces mots : « Je crois à peine possible que quelqu'un parcoure ces écrits sans une grande jouissance de l'esprit et sans en même temps en éprouver l'utilité. En effet, ils sont d'un tel caractère et d'une telle ampleur, que les plus illustres philosophes de cette ère glorieuse apparaissent devant nos yeux comme des acteurs en scène, racontant et dépeignant ce que chacun d'eux, pour le bien et l'avancement de la Science, a pensé, écrit et accompli, non pas une fois, mais de jour en jour ». La seconde se rapporte à l'acteur principal, à Huygens même. C'est le portrait vivant de sa personne, de son caractère modeste et franc, de sa supériorité incontestable à la plupart de ses correspondants. La Commission, qui dans son travail l'a éprouvé elle-même, l'exprime en ces termes : « la joie de voir se dégager de ces documents, trop longtemps restés inconnus, l'image d'un enfant, merveilleusement doué, élevé avec les plus tendres soins par un père d'élite, s'exerçant dès son adolescence aux travaux de l'esprit comme à un jeu, et bientôt, avide de connaître, gagné par la passion de la vérité, s'élançant dans les plus hautes régions de la Science, où il règne comme un jeune héros, aimé et admiré de ses plus illustres contemporains. »

4. A ces remarques générales, relatives à l'édition nouvelle, nous voudrions, avant de passer en revue les principaux sujets traités, ajouter une observation qui nous paraît de même se dégager des documents publiés jusqu'ici. Elle se rapporte à la position dans laquelle Huygens lui-même s'est placé à l'égard des Sciences mathématiques.

Dans ses premiers Mémoires (95, note 1 et 191, note 1), Huygens s'occupe de deux problèmes de Mathématiques pures, la quadrature de l'hyperbole et du cercle. Ensuite il se détourne des Mathématiques pour se vouer de plus en plus à la Mécanique, la Dioptrique, la Physique et l'Astronomie, en s'efforçant toutefois d'asseoir ces Sciences sur la base solide des Mathématiques. Ces considérations conduisent à admettre que la force principale du génie de Huygens ne se révèle pas dans les Mathématiques pures. A l'appui de cette thèse nous présentons les remarques suivantes.

Voyons d'abord comment Huygens prend position par rapport à la Théorie des nombres en « statu nascendi », c'est-à-dire par rapport aux problèmes de Fermat (372 et 651). Dans la Cor-

respondance il déclare à mainte reprise que ces problèmes ne le tentent pas. On lit : (296) « moy qui ne me ſuis gueres exercé dans les queſtions des nombres, parce que j'ay touſjours pris plus de plaiſir à celles de Goemetrie », (297) « si j'eſtois plus versé que je ne ſuis dans des ſemblables queſtions des nombres », (469) « je ſuis marry de n'avoir pas ſceu, auparavant que de veoir la solution de ces problèmes, que Monſieur de Fermat la jugeoit de telle importance ». Et ce qui est plus fort encore, on trouvera dans le Volume IV, qui paraîtra bientôt, par rapport à quelques problèmes de la théorie des nombres le jugement suivant : « Les queſtions que vous m'avez envoiees ne meritent pas qu'on s'y amuse n'eſtant aucunement belles ny utiles à rien : cela vient de quelque arithmeticien et non pas d'un Geometre » (1054).

Ce qui précède peut faire naître l'opinion que la Géométrie pure a été l'étude favorite de Huygens. On ne peut cependant la soutenir après la lecture des lignes suivantes : « Et ſemper quidem illa maximè contemplatione digna exiſtimavi in quibus non nuda ac ſimplex figurarum Geometricarum conſideratio locum haberet, ſed harum vis atque efficacia ad veritates quaſdam in re Phyſica aliave eruendas traduceretur. Quanquam et ipsa mera Geometria non exiguam voluptatem cultoribus ſuis adferat » (397).

Ces quelques lignes que nous venons de citer font connaître, à notre avis d'une manière très précise, les sentiments de Huygens à l'égard des Mathématiques. Il préfère la Géométrie à la Théorie des nombres et la Géométrie appliquée à la Géométrie pure. En effet, la découverte de la développée de la cycloïde, peut-être la plus belle trouvaille de Huygens en Mathématiques pures, se présente à lui dans la recherche de la solution exacte d'un problème de Mathématiques appliquées, celle du tautochronisme des oscillations du pendule.

Au courant de la plume nous indiquons ce qui nous a intéressé le plus dans l'étude des trois in-quarto. D'après les sujets nous rangeons nos annotations en trois groupes; les chiffres se rapportent toujours aux numéros des Lettres et non pas aux pages.

I. — Sciences mathématiques.

a. A l'âge de 17 ans Huygens retrouva un des plus beaux résultats d'Archimède, celui du rapport des aires du paraboloïde de révolution et du cône inscrit; il y joignit, à l'aide d'une intégration déguisée, un autre non moins remarquable. On trouve le fac-simile de la Lettre (11) qui en contient la Communication à son frère aîné, à la fin du second Volume. Nous verrons que cette Lettre n'est pas moins importante par d'autres résultats qu'elle contient.

b. Quatre années plus tard Huygens découvrit une grosse inadvertance dans un raisonnement de Cavalleri, l'introducteur des « indivisibles » dans l'Analyse (86, 87). Ce paralogisme se retrouve d'une manière plus évidente dans la démonstration connue du paradoxe de l'égalité de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

c. Huygens s'est occupé de plusieurs problèmes classiques. Nous en citons les principaux.

α. Le problème d'Archimède : « Datam fphæram plano in data ratione fecare » (118, 119). — La solution de ce problème à l'aide d'une parabole et d'une circonférence est très élégante. En représentant par r, s, x les distances de M à A, E et au plan cherché KL, l'équation de condition est

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right) + 2\frac{s}{r} = 0.$$

C'est ce qu'on trouve, en effet, par l'élimination de y entre les équations

$$(2)\qquad x^2 + \left(y - \tfrac{7}{4}r\right)^2 = \left(\tfrac{9}{4}r - y\right)^2, \qquad (x+s)^2 + y^2 = 4r^2 + s^2$$

de la parabole et du cercle auxiliaires.

β. La trisection de l'angle. — De ce problème G.-A. Kinner à Löwenthurn donne trois constructions approximatives ([1]) (160,

([1]) Ici *approximatives* a une signification extraordinaire.

211). Huygens l'emploie à donner une seconde solution du problème d'Archimède (161). En effet, en posant $MN = x$ et $AR = 2s$, l'équation $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, où φ représente $\frac{1}{6}$ arc AR, fait retrouver l'équation (1). Une modification de cette nouvelle construction a paru dans l'édition de 1724 (Opera varia, p. 388).

γ. Le problème des deux moyennes proportionnelles et le problème déliaque ou la duplication du cube. — On sait que le second problème forme un cas particulier du premier, celui où le rapport des deux lignes données est égal à deux.

De la part d'un de ses amis le P. Mersenne soumet au jugement de Huygens, âgé de 19 ans, une prétendue solution du cas particulier (50). Des deux côtés cette solution est reconnue fausse (51, 52), 5^3 n'étant pas égal à 2^7.

Du cas général la Correspondance contient six solutions. Huygens en donna deux, R. F. de Sluse trois et Th. Hobbes une. De ces solutions seulement la seconde de Huygens (414) et la première de de Sluse (489) sont rigoureuses; elles s'obtiennent à l'aide d'une ellipse et d'une circonférence. Les autres solutions de Huygens et de Sluse (161, 496) ne sont qu'approximatives et celle de Hobbes (895) est fausse; elle a été réfutée par Lord Brouncker (896). Enfin Huygens fait allusion à la solution primitive de Dioclès à l'aide de la cissoïde (512). Ajoutons que la dispute entre L. Dulaurens et de Roberval est mentionnée par Cl. Mylon et J. Boulliau (599, 645, 648, 654).

δ. Les problèmes d'Apollonius. — Quelques Lettres (93, 94, 164, 166, 168) contiennent ce qu'on retrouve dans l'édition de 1724 (Opera varia, p. 397-403) et dans les *Exercitationes Mathematicæ* de van Schooten (p. 269).

ε. Normales a une parabole. — Les pieds des normales, abaissées d'un point (a, b) sur la parabole $y^2 = 2px$, se déterminent à l'aide de l'hyperbole d'Apollonius $xy + (p - a)y + b = 0$. Donc l'élimination de x fait trouver $y^3 - 2p(a - p)y - 2bp^2 = 0$. De plus le cercle $x^2 + y^2 = 2(\lambda x + \mu y)$ rencontre la parabole au sommet et aux trois points déterminés par

$$y^3 - 4p(\lambda - p)y - 8\mu p^2 = 0$$

Donc ces points sont les pieds des trois normales sous les conditions $2\lambda = \alpha + p$, $4\mu = b$. En effet, Huygens se sert du cercle, dont l'équation est $x^2 + y^2 = (a + p)x + \frac{1}{2}by$; ici (163) il prépare le chemin à Joachimsthal (¹).

ξ. Points d'inflexion de la conchoïde. — En posant $GA = r$ et $AQ = s$ (*fig.* 2 de 164) la conchoïde peut être représentée par les deux équations $x = s\cos\varphi$, $y = r\tang\varphi + s\sin\varphi$.

Donc on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r + s\cos^3\varphi}{s\sin\varphi\cos\varphi},$$

de manière que $\frac{d^2y}{dx^2}$ disparaît sous la condition $x^3 + 3rx^2 - 2rs^2 = 0$. En posant $x + r = X$ et $\frac{r^2 - s^2}{r} = S$, on trouve

$$\left(\frac{X}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{X}{r}\right) + 2\frac{S}{r} = 0;$$

ce résultat rappelle l'équation (1) du problème α. A la vérité la solution générale (*fig.* 1 de 164 et 165) se base sur la recherche des points communs aux courbes

$$X^2 + ry = 4r^2, \qquad X^2 + y^2 + 2SX = 4r^2,$$

qu'on obtient en substituant $x = X$, $s = S$ dans les équations (2) de α. De plus, on satisfait à l'équation du problème en posant

$$x + r = 2r\sin\psi, \qquad r^2 - s^2 = r^2\sin 3\psi.$$

En effet, dans la construction donnée par Huygens pour le cas $s \leq r$, on a

$$EA = \frac{s^2}{r} \qquad \text{et} \qquad GE = \frac{r^2 - s^2}{r}.$$

De même, on vérifie aisément la modification de la construction dans le cas $r < s \leq r\sqrt{2}$ (*fig.* 3 de 164).

Comment Huygens a-t-il pu déterminer les points d'inflexion de la conchoïde? On sait qu'ordinairement il déterminait la tangente à une courbe en un point donné à l'aide de la sous-tangente

(¹) D'après la Lettre 739, Huygens s'est occupé, de même, du problème analogue pour l'ellipse et l'hyperbole.

[*Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum* (Opera varia, p. 499, où z représente la sous-tangente)]. Probablement il a déterminé le maximum ou le minimum de cette sous-tangente [*Demonstratio regulæ de maximis et minimis* (Opera varia, p. 490)].

A notre avis, la solution du problème en question est un chef-d'œuvre d'invention, de précision et d'élégance.

7. Le problème de Pappus ou ad 3 et 4 lineas. — Le lieu du point P, dont les distances a, b, c, d aux côtés d'un quadrilatère donné vérifient la relation $ac = bd$, se compose de deux coniques, si l'on ne fixe pas d'avance les signes des distances. A cette duplicité du lieu, Descartes n'a pas fait attention. C'est ce qui forme le sujet principal de quelques Lettres de la Correspondance.

L'inadvertance de Descartes a été remarquée pour la première fois par Blaise Pascal. Mersenne écrit à Constantyn père : « Si voſtre Archimede vient auec vous, nous luy ferons veoir l'un des plus beaux traitez de Geometrie qu'il ayt jamais vû, qui vient d'eſtre achevé par le jeune Paſchal. C'est la ſolution du lieu de Pappus ad 3 et 4 lineas qu'on pretend icy n'auoir pas eſté reſolu par Mr. des Cartes en toute ſon eſtendue. Il a fallu des lignes rouges, vertes et noires, etc. pour diſtinguer la grande multitude de conſiderations » (46). Mais c'était l'étude d'un Livre de P. de Fermat, qui induisit Huygens d'écrire à Fr. van Schooten, qui avait publié une édition latine de la « Géométrie » de Descartes : « In prima tamen Pappi propoſitione univerſali, quæ legitur in fine paginæ 162, aliquid amplius habet niſi fallor quam à te inſpectum sit » (221). Par rapport à ce *nisi fallor*, G.-P. de Roberval rassure Huygens. Il écrit : « La faute du bon-homme (Descartes) vient, à mon auiz de ce qu'il n'a pas connu qu'vn tel lieu, pour eſtre parfait, demande deux ſections à la fois, et chacune toute entière » (311). Roberval attaque van Schooten : « Je ſcay que Monſieur Schoten tache d'excuſer la faute de ſon auteur. Mais je voudrois pour l'honneur de ce ſcauant homme, qu'il euſt eu moins de complaiſance pour Descartes » (311). Ensuite Huygens tâche de convaincre van Schooten de la vérité (317) et en fait part à Roberval (319). Ces efforts ne réussissent pas de suite (320), ce qu'il communique aussi à Roberval (329). Enfin, dans une seconde tentative, où entre un cas

particulier intéressant (356), il a plus de succès (358). Ce cas particulier (356, 399, 401) prouve en même temps qu'il est possible que le lieu se compose de deux hyperboles, comme le prétend de Roberval.

b. Maxima et minima. — D'abord il s'agit du problème proposé par de Fermat à Torricelli et par Torricelli à Viviani, un problème d'après Viviani, *quod, ut vera fateor, nonnisi iteratis oppugnationibus tunc nobis sincere datum fuit.* Huygens en fait connaître la solution (139); plus loin, il est question d'une extension (739). De plus, la Correspondance de Huygens et de Sluse nous donne trois autres problèmes et leurs solutions (394, 397, 398).

c. Le problème d'Alhazen. — Huygens communique à de Sluse le problème du point de réflexion d'un miroir sphérique, dont il s'est occupé à mainte reprise (399). Ce problème reparaîtra dans les Volumes suivants.

d. Le Livre du père Gregorius a Sancto Vincentio sur la quadrature du cercle forme le sujet de plusieurs Lettres du premier Volume. Mersenne le mentionne le premier (25); il le trouve « extremement long & ennuyeux » et dit que de Beaune « y a troué des paralogifmes (¹) » (49). Après la lecture du Livre, Huygens s'adresse immédiatement à l'auteur même. Il lui indique des fautes et le prie de révoquer les Thèses, afin qu'il ne soit contraint de les réfuter (96). Cette Lettre montre à merveille l'urbanité et la douceur du caractère de Huygens. Car il ajoute : « Id autem maximè defidero, ut priufquam fententijs diffideamus, mutuainter nos amicitia contrahatur ». La réponse de Gregorius (99) est très satisfaisante : « Author tibi fum, vt quæ commentatus es, et mihi et totj orbj communices; hoc et laudi, nominis tuj adfcribam, nec mihi paruo honorj ». Huygens en est content et dit qu'il publiera sa réfutation (100). De suite, il en envoie un exemplaire à son ad-

(¹) Descartes en dit : « Et ce qu'il escrit de Proportionalitatibus ne me semble d'aucun usage, pource que frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora » (170, [illegible] et *Opera varia*, p. 348).

versaire (106), qui lui en accuse bientôt réception (111). Et quoique Huygens remarque que Gregorius ne répond à ses arguments que par des politesses (115), la correspondance prend une tournure de plus en plus amicale et aboutit à une visite (128).

La brochure en question parut sous le titre Ἐξέτασις (¹), à la fin du Mémoire *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli* (Opera varia, p. 315). On y trouve la première quadrature de l'hyperbole. Par rapport à ce Livre, Kinner à Löwenthurn déclare : « De his ſi quæris quid ſentiam; fatebor ingenuè; dixi ilico : ſi in uiridi ligno (²) hæc faciunt, in arido quid fiet? Videbantur enim mihi eiuſmodi Theoremata Geometricam etiam canitiem non dedecere, quæ Tu in uiridi etiamnum ætate feliciter inuenisti » (136). Néanmoins il prend, dans la même Lettre, le parti de Gregorius.

e. La lecture de ce qui se rapporte à la courbe

$$a^2y = x^2(a - x)$$

de de Sluse est particulièrement intéressante. De cette courbe de Sluse propose à Huygens la quadrature, la construction de la tangente en un point donné et la détermination du centre de gravité (401). En quelques jours Huygens donne les résultats cherchés dans la forme la plus élégante (403). De plus, il propose les questions à van Schooten (408), qui lui envoie les calculs et quelques particularités se rapportant à l'ordonnée maxima, au point d'inflexion et à la tangente par l'origine qui touche la courbe ailleurs (419). Dans cette même Lettre, van Schooten propose les mêmes questions par rapport à trois autres courbes que lui a envoyées son ami J. Hudde (434). Ce Hudde, dont nous tenons le théorème connu des racines égales d'une équation algébrique, se montre ici en vrai farceur. Car il mène par le bout du nez Huygens, de Sluse et van Schooten. Des trois courbes proposées, la première est représentée par $a^2x = y(y + a)^2$, résultat des substitutions $x = y' + a$, $y = -x'$ dans l'équation de la courbe de de Sluse. Ainsi, la première courbe de Hudde ne diffère de la courbe de de Sluse que par la position par rapport aux axes de

(¹) *Comparez* la lettre 228 de J. Wallis avec le résultat [illegible]

(²) A l'époque de la conception de ce travail Huygens avait l'âge de [illegible] ans.

coordonnées (¹); et la seconde courbe du sixième ordre s'obtient par la soustraction des ordonnées correspondantes des courbes paraboliques $y^2 = ax$ et $y^3 = a^2x$. En effet, la rationalisation de l'équation $y = \sqrt{ax} - \sqrt[3]{ax^2}$ donne

$$(y^3 + 3axy - a^2x)^2 = (3y^2 + ax)^3,$$

ce qui est précisément l'équation de la seconde courbe de Hudde. Cette déduction géométrique de la courbe de deux courbes paraboliques lui permet de résoudre sans peine les trois questions posées, tandis que les résultats restent cachés à ceux qui l'ignorent. La Lettre qui révèle le secret (436) est une des plus curieuses. Ajoutons que cependant elle manque de délicatesse et qu'il ne sied nullement, même si Hudde eût été bourgmestre d'Amsterdam, charge qu'il occupa jusqu'à dix-neuf fois plus tard, de conseiller Huygens « à proposer et à résoudre dorénavant au lieu de questions aussi inutiles que celle de la courbe de de Sluse, qui ne valent pas même un gâteau à l'huile, des questions d'intérêt public » (²).

La courbe $a^2y = x^2(a - x)$ rentre dans la catégorie générale des courbes $a^{p+q-r}y^r = x^p(a - x)^q$, qu'on appelle les *perles* de de Sluse. Elle est une cubique à centre (au point d'inflexion $x = \frac{1}{3}a$, $y = 0$).

Plus loin (461), il est question d'un rapport remarquable entre les deux perles $a^2y^2 = x^3(a - x)$ et $y^4 = x^3(a - x)$.

Par rapport à la courbe de de Sluse, on trouve un théorème intéressant donné par van Heuraet (435). Ce théorème s'applique à toutes les courbes $y = a + bx + cx^2 + dx^3$.

f. Nous avons remarqué que Huygens débuta par un problème de l'espace, l'évaluation de l'aire du paraboloïde de révolution. Dix années plus tard, il revint à cette surface pour en donner la complanation (439). Cette découverte, qu'il communiqua à de Sluse (439), à van Schooten (444) et à Gregorius (678), ne tarda pas à exciter l'admiration de ses contemporains. Dans des termes

(¹) La représentation graphique de ces deux courbes laisse beaucoup à désirer.

(²) Traduction du texte hollandais.

Dès le milieu du second Volume la Commission a ajouté la traduction française des Lettres hollandaises de quelque importance.

très bien choisis, de Sluse lui apporte des félicitations (441 et Opera varia, p. 102). Plus tard, van Heuraet (457) [1] et Pascal (585) obtinrent le même résultat. Ensuite, Huygens donna aussi la quadrature de la surface des ellipsoïdes de révolution allongée et aplatie (466, 678); de ces deux résultats, le second, qui n'est qu'une transformation, s'obtient sans intégration.

g. Nous avons à parler encore de la rectification et de la quadrature de quelques courbes planes.

α. Cercle. — On trouve deux constructions approximatives pour la rectification de la circonférence. La première (182, 183) est de Huygens, la seconde (827) de l'ambassadeur P. de Chanut. Ces deux constructions reposent sur les équations approximatives

$$\text{séc}\,\frac{\pi}{12} + 2\,\text{tang}\,\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{[illegible]}\,\pi.$$

β. Cissoïde. — Géométriquement Huygens a démontré que l'aire plane comprise entre la cissoïde et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur ABC (483); il y parvint d'une manière très élégante à l'aide de la relation générale

Aire cissoïdale APEFBA = Secteur KBM = Corne KHM [2].

Au même problème, J. Wallis applique son *Arithmétique des infinis* (560).

γ. Cycloïde. — On sait que la Lettre circulaire adressée par Pascal, sous le pseudonyme de Dettonvillius, à tous les géomètres, les invitant à résoudre ses problèmes sur la cycloïde (494, 500), a contribué beaucoup à l'étude de cette courbe. La Correspondance qui nous occupe peut en fournir l'épreuve. On y trouve des contributions importantes à l'étude de la cycloïde dues à Huygens, Wren, Pascal même, de Sluse et de Fermat. Ici nous ne saurions qu'effleurer le riche matériel compris dans la Correspondance.

---

(1) *Comparez*, par rapport à van Heuraet, les Lettres 464, 465.

(2) Voir *fig.* 1 de la Lettre 483.

Huygens évalue l'aire du segment CYZ dans un cas particulier (503); il se trompe dans la détermination de la distance FK du centre de gravité (516) et donne les vraies distances $\frac{7a}{6\pi}$ (580) et $\left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{17}{3\pi + 12}\right) a$ (621). La première rectification de la courbe par Wren nous est communiquée par Mylon (577). A l'aide de considérations très subtiles, Pascal rectifie les cycloïdes allongée et raccourcie en réduisant la longueur moyenne du rayon vecteur d'un cercle à la moyenne des génératrices d'un cône et ensuite à la surface courbe d'un cylindre incliné divisée par une droite (614). Avec beaucoup de sagacité de Sluse détermine une courbe parabolique $y^4 = \frac{512}{9} a x^3$, qui montre un rapport très remarquable avec la cycloïde ordinaire (638). De Fermat prétend « que toutes les roullettes (¹) allongees ſont eſgalles à la ſomme d'une ligne droicte et d'une circulaire, et que toutes les roullettes acourcies ſont eſgalles à des courbes paraboliques » (727). Dans notre langage, il dit que la longueur $s = 8a \int_0^1 \sqrt{n^2 + (1 - n^2) z^2}\, dz$ de la cycloïde

$$x = a(1 - \cos\varphi),$$
$$y = na(\varphi + \sin\varphi)$$

s'évalue par les expressions

$$4a - \frac{4n^2 a}{\sqrt{n^2 - 1}} \operatorname{arc\,séc} n \quad \text{ou} \quad 4a + \frac{4n^2 a}{\sqrt{1 - n^2}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - n^2}}{n},$$

selon qu'on a $n > 1$ ou $n < 1$. Pour $n = \sqrt{2}$, la première expression donne

$$4a + 2a\pi,$$

résultat mentionné par de Fermat.

Enfin, Huygens nous fait connaître la développée de la cycloïde (817) (²).

(¹) Roulette et trochoïde sont des noms vieillis de la cycloïde.

(²) Que Huygens lui-même se réjouit de cette découverte, et qu'il estimait van Heuraet, qui donna la rectification ingénieuse de la courbe parabolique $y^3 = ax^2$ prouve la citation : « Subtiliſſimo Heuratio non diſplicebit opinor hæc inventio; nam mihi quidem omnium feliciſſima videtur in quas unquam inciderim » (691).

5. Hyperbole et parabole. — Huygens exprime l'aire d'un segment hyperbolique à l'aide d'une parabole dépendante (637). Si l'on représente ces deux courbes par les équations

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{et} \quad y^2 = 2px,$$

la réduction est représentée par l'équation

$$4p^2\int_a^{\frac{a\sqrt{a^2+4p^2}}{p}} \sqrt{x^2 - a^2}\,dx + 4a^2\int_0^{\frac{1}{2}a} \sqrt{p^2 + y^2}\,dy = a^3\sqrt{a^2 + 4p^2},$$

dans laquelle les parties logarithmiques du premier membre se détruisent. De plus, il chercha le centre de gravité du segment hyperbolique (703). Si l'on pose $\frac{AB}{AM} = \frac{x}{a} = n$, on trouve

$$\frac{QO}{OA} : \frac{DB}{BA} = \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2}.$$

Pour $n = 2$ et $n = 3$, ce rapport anharmonique est égal à $\frac{4}{9}$ et $\frac{15}{32}$, comme Huygens prétend. Ensuite, de Fermat exprime la surface engendrée par la rotation de la parabole $y^2 = 2px$ autour d'une de ces ordonnées y_0 à l'aide d'un rectangle et des deux hyperboles $y = \frac{p}{x_0}\sqrt{x^2 - x_0^2}$ et $y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{16}p^2}$ (755). Enfin, il remarque que la longueur de l'arc d'une courbe parabolique $\left(y^3 = \frac{3ax^2}{2\pi^2}\right)$, depuis l'origine (jusqu'au point $y_0 = \frac{2}{3}a$), est égale à celle de la spirale $r = a\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2$ comprise entre les points $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$ (756).

h. En signalant la position de Huygens à l'égard des Mathématiques pures, nous avons remarqué qu'il ne s'est pas distingué par la solution des problèmes de Fermat, qui se rapportent à la théorie des nombres. Il est juste que nous y ajoutions à présent que par l'intermédiaire de P. de Carcavy, il s'est développé un commerce très vif, relatif à des problèmes de chance entre de Fermat et Huygens.

D'abord on trouve en version hollandaise (284) et latine (289) une partie de la contribution *De ratiociniis in ludo aleæ* de

Huygens aux *Exercitationes Mathematicæ* de van Schooten. Ensuite (301) de Fermat communique les résultats de quelques problèmes de Huygens, et Huygens en fait connaître les solutions (308, 309). Enfin, il est question de quelques autres problèmes résolus par de Fermat (336), etc.

II. — Sciences physiques.

A l'âge de 17 ans Huygens écrit à son frère aîné : « AB eſt une hauteur de laquelle on laiſſe tomber un poids C, je demonſtre qu'au premier temps de ſa cheute il paſſe un eſpace comme icy CD, au ſecond temps eſgal au premier, 3. de tels eſpaces, et vient juſques en E, au troisième 5. espaces, au quatrieſme 7, et qu'ainſy continuera à faire chaſque fois encor de plus grands progrez, adjouſtant au dernier touſjours deux fois le premier eſpace; mais il ne faut pas conſiderer la resistence de l'air, qui cause à la fin (ſi le poids tombe d'une fort grande hauteur, quelque peſant qu'il ſoit) qu'il parvient à un point, d'où il commence en temps eſgaux de faire des progrez eſgaulx. Outre cecy j'ay demonſtré que s'il eſt jetté de quelque coſté, qu'il deſcrit une parabole; de tout cecij et encor d'une infinité de choſes qui en dependent, je n'ay jamais ſçeu la demonſtration avant que de l'inventer moy meſme » (11).

L'auteur de ces lignes était évidemment un examinateur indépendant, de qui l'on pouvait prédire qu'il n'accepterait rien, dont il ne se fût convaincu par des recherches personnelles. Et tout ce que les trois Volumes de la nouvelle édition des Œuvres complètes nous communiquent par rapport aux travaux physiques de Huygens confirme ce jugement. Tout de suite Huygens se débarrassa de quelques opinions erronées émises par Galilei, Descartes et leurs adhérents. Nous faisons allusion à trois sujets importants, la forme de la chaînette, la loi de la percussion des corps solides et la propriété principale des lentilles sphériques.

« La demonſtration de ce qu'une corde ou chaîne pendue ne faict point une parabole, et quelle doit eſtre la preſſion ſur une corde matematique ou sans gravité pour en faire une » (14) est un des premiers coups d'aile du génie du jeune Huygens (20, 21, 22); elle est simple et concluante. A la vérité Mersenne en déclare que Huygens « s'est ſurpaſſé ſoymeſme » (24).

On sait que la Société Royale de Londres proposa en 1668 la

question du choc des corps solides et que Huygens, Wallis et Wren l'ont résolue peu après. Cependant la Correspondance montre que Huygens disposait déjà en 1652 de toute la théorie de la percussion centrale des boules parfaitement élastiques. Il écrit à van Schooten : « Corpus A fertur verſus B, ſimulque B verſus A. Estque B duplo majus quam A, ſed A duplo celerius movetur quam B. Quid fiet poſt occurſum mutuum in C? Ego dico utrumque eâdem qua venit celeritate retro actum iri. Vult enim Carteſius corpus A nullo pacto movere poſſe B majus exiſtens, ſi hoc quieſcat. Quomodo igitur ipſum repellet ſibi occurrens? nam hoc quidem multo videtur difficilius » (130). Mais van Schooten reste fidèle à Descartes, car il répond : Dico corpus B ipſi A occurrens in C debere pergere verſus ſiniſtram, ita quidem ut nullam ſui motus partem amittat, nec novum motum recipiat; ſed A reſiliens, ſervatâ celeritate ſuâ, retro actum iri » (131) (1).

On rencontre l'autre question, celle des lentilles sphériques dans les mêmes Lettres. Huygens écrit à van Schooten : « Nunc autem in dioptricis totus ſum, et nuperrime elegans inventum obtigit, cujus ope teleſcopium multo quam cetera perfectius me conſtructurum arbitror, ſi modo artificem reperire queam experientem. Illud autem inventum eſt, quod radios ad punctum unum tendentes ope ſuperficiei ſphæricæ ad aliud punctum propius vel longinquius cogi poſſe demonſtravi, idque præcite. Et conſequenter quod venientes a puncto uno, ſimili ſuperficie inflectere licet quaſi à puncto veniant propriori vel remotiori. Hæc autem Carteſius per ſuperficies curvas antea ignotas artificiole molitus est, ſed quæ nulla ratione expoliri poſſent » (130). Ici, au lieu de contredire, van Schooten exprime son doute : neſcio an ſatis accuratè, quæ de Refractionum legibus tradidit, examinaveris » (131).

On pourrait croire que dans cette dernière question les points de vue de Descartes et de Huygens sont tout à fait différents. En effet, tandis que Descartes avait donné dans ses ovales la solution rigoureuse du problème de réunir en un seul point les rayons issus d'un autre, solution qui n'admettait pas des applications, Huygens par sa solution approximative construisit des lentilles de grande utilité pratique, malgré leur aberration sphérique. Cependant il nous semble que, dans le passage cité, Huygens fait allu-

(1) *Comparez* les Lettres [illegible] (supplément du t. III), [illegible]

sion au cas particulier du cercle comme ovale de Descartes. Si u et v représentent les distances d'un point aux points A et B d'issue et de réunion des rayons lumineux, l'équation différentielle $\frac{du}{dv} = -n$ du problème en question admet la solution $u - nv = c$. Nous croyons que l'invention de Huygens se rapporte au cas $c = 0$, auquel Descartes n'a pas fait attention. Si cette supposition s'accorde avec la vérité, la solution de Huygens est mathématiquement rigoureuse. Cependant elle ne l'a pas mené à des lunettes perfectionnées.

Nous venons d'indiquer les deux parties de la Physique dont Huygens s'est occupé par préférence : la Mécanique et l'Optique.

Le point de vue de Huygens par rapport à un des principes les plus importants de la Physique générale, le principe de la conservation de l'énergie, se déduit facilement des deux citations suivantes : « Mais toutes nos inventions », écrit-il à de Carcavy, « vont estre peu considerables ſi celle de l'Allemand Johannes Joachimus Becherus s'effectue, ou s'il ne nous trompe pas, car il m'a aſſurè, m'ayant estè veoir icy, qu'il a conſtruit un mouuement perpetuel à Mayence, qui continue d'aller depuis ſix mois. Et hier il m'en envoya les figures qu'il a fait graver en deux grandes planches à Amsterdam. L'on ne peut pas pourtant comprendre le ſecret de l'invention par ces figures, devant que de voir la deſcription qu'il en promet, ayant par tout adjoustè de lettres et des nombres. Seulement l'inſcription tient, et l'on le voit à peu pres que l'une des machines (car il a deux inventions diverſes) est purement mechanique et l'autre physico-mechanique. Pour celle cy la choſe ne me paroit pas tout a fait impoſſible. mais de l'autre j'advoue qu'elle paſſe ma croyance » (722). Au fils de Simon Stevin, qui lui avait envoyé une brochure tendant à démontrer l'impossibilité du perpetuum mobilé, il écrit : « Ce n'est pas une affaire de peu d'importance que dans votre Livre vous avez entrepris de démontrer. Quant à moi, je crois de même qu'il est impoſſible, ratione mechanica; même il est incompatible avec les principes dont je me suis toujours servi. Mais il ne semble pas poſſible d'en donner une démonstration si évidente qu'on ne trouvera toujours des personnes qui aspirent à l'impoſſibilité en cherchant à tromper la nature » (749) [1].

---

[1] Traduction du texte hollandais.

Toutes les recherches optiques de Huygens se basent sur la loi de la réfraction trouvée par Snellius. Il donna (135) une construction exacte des foyers principaux d'une lentille sphérique et connaissait donc la formule $\frac{1}{x} = \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'}$. Il s'occupa de l'aberration sphérique (153). Il donna une détermination exacte de l'indice de réfraction de l'eau en l'air à l'aide de l'angle sous lequel on voit le rayon de l'arc-en-ciel; de plus il résolut le problème inverse (153). De cette découverte il déclare : « ego certè cum invenissem, non parum gavisus sum » La solution du premier de ces problèmes, donnée par Huygens en 1653, est donc attribuée à tort à l'astronome Halley (¹).

Au sujet de la réfraction dans une goutte d'eau, on trouve dans la Correspondance une petite controverse entre Huygens et Kinner à Löwenthurn (162, 172, 176, 177) où la vérité est du côté de Huygens. Celui-ci aborde de même le phénomène très rare des parhélies. Il faut avouer qu'on n'en rencontre pas encore une explication; nous apprenons seulement que Huygens croit l'avoir trouvée (775, 874). De toute part, il cherche à obtenir des dessins et des descriptions de cas intéressants; un de ces dessins, envoyé par J. Hévélius, a été reproduit dans le troisième Volume.

Les recherches dans chacune des deux directions que nous venons d'indiquer, ont mené Huygens à des applications importantes, à la construction des horloges à pendule et des lunettes.

Les contributions les plus importantes de Huygens à la Mécanique sont renfermées dans son Livre « Horologium oscillatorium » qui ne parut qu'en 1673. Donc plusieurs découvertes qui y furent publiées sont d'une date postérieure au 31 décembre 1661, où se termine la Correspondance parue jusqu'à présent. Ainsi la Lettre 23 du 8 décembre 1646, dans laquelle Mersenne propose de chercher une règle pour la détermination du centre de percussion d'un triangle, porte le subscriptum : « J'ay trouué cette règle en 1664 ». Ce *Horologium oscillatorium* (Opera varia, p. 15) ne doit pas être confondu avec le *Horologium* (Opera varia, p. 1), brochure parue en 1658 (511), qui ne contient que la description de l'hor-

(¹) *Voir* GEHLER's *physisches Wörterbuch*, art. *Regenbogen*, à la fin.

loge à pendule. Par rapport à ce petit travail important J. Chapelain lui écrit : « Vous ne meußiés pu rien reſpondre de plus agreable que ce que j'ay veu et leu dans le Plan de votre merueilleuſe Horloge, et dans le Diſcours qui luy ſert d'explication. I'y ay remarqué vne imagination treſféconde, vn jugement treſſolide, vn ordre treſclair, vn stile treſpur et treſfacile, et enfin des fondemens d'vſage pour d'admirables choſes, ſi vous les executés comme il ſemble que vous vous y engagiés » (543).

Un coup d'œil rapide sur le très grand nombre de pages citées sous les articles *Horloges, Lentilles, Lunettes* et *Œuvres* (*Horologium, Horologium oscillatorium, Dioptrica*) dans la Table méthodique à la fin des Volumes suffit à démontrer qu'il est impossible d'indiquer toutes les richesses de la Correspondance et que nous avons à nous restreindre à quelques remarques générales.

Le nom « horologium » se rencontre pour la première fois dans le sommaire d'une Lettre de Huygens à Wallis (337) de septembre 1656. Le premier modèle est achevé le 25 décembre 1656. Au mois de juin de 1657, Huygens en montrait la construction à tout le monde. Aux derniers jours de 1657 ou aux premiers jours de 1658, il fit dresser une grande horloge à pendule au clocher du village de Schéveningue près de la Haye.

Les ennuis que procurent trop souvent à l'auteur d'une invention importante les réclamations de priorité tardives, mal fondées ou suspectes, de personnes qui prétendent avoir eu la même idée, ou avoir déjà rencontré quelque chose de pareil, ne furent pas épargnés à Huygens. Il s'en plaint dans une Lettre à de Carcavy (722) : « C'est une choſe eſtrange », écrit-il, « que perſonne devant moy n'ait parlè de ces horloges, et qu'à cette heure il s'en decouvre tant d'autres autheurs ». La remarque paraîtrait trop modérée vis-à-vis des termes imprudents dans lesquels Léopold de Médicis fit connaître à Boulliau sa première impression en recevant la description de l'horloge à pendule : « certo è che l'Invenzione è bella, ma non ſi deve detraudare della gloria douutali al nostro Signore per ſempre ammirabile Galileo » (604^a). Hardiment Boulliau prit le parti de Huygens pour le défendre contre l'injuste suspicion du trop zélé admirateur de Galilée : « Hunc virum », répond Boulliau, en parlant de Huygens : « adeo ſincerum ac procul ab omni jactantia & ut κλοπεῖα alienum noui, ut cujuſquam famæ

aliquid detrahere quo suam augeat, ne cogitando quidem, nolit (609[a]). Léopold s'est empressé de retirer loyalement ce que sa première communication pût avoir de désobligeant envers Huygens (621[a]).

Les passages cités sont extraits d'une série de lettres et documents trouvés dans la Bibliothèque nationale de Paris par M. Bosscha, Secrétaire de la Société hollandaise des Sciences, et membre de la Commission de rédaction. La pièce la plus importante de cette collection, qui se trouve insérée dans le supplément du tome II, est le fameux Mémoire de Viviani, que quelques auteurs italiens du commencement de ce siècle, Venturi, Albèri et autres ont allégué pour prouver que Galilée a eu l'idée d'appliquer le pendule aux horloges et que son fils Vincentio en a commencé l'exécution sans toutefois pouvoir réussir. Nous ne pouvons entrer ici dans cette discussion, qui a eu un certain retentissement en Allemagne à la suite des écrits de MM. Günther et Gerland. Nous nous bornerons à signaler la Correspondance de Léopold de Médicis et de Boulliau sur cette question, publiée pour la première fois en entier dans les Œuvres complètes de Christiaan Huygens; elle contient le texte authentique du Mémoire cité de Viviani. Ces pièces fournissent des données nouvelles, dont la portée se trouve indiquée succinctement dans les Notes qui accompagnent le texte. On y remarquera les nombreuses altérations et mutilations que le Mémoire original de Viviani, envoyé par le prince Léopold à Boulliau et conservé dans la Bibliothèque nationale, a subi de la part des premiers éditeurs italiens.

Un autre exemple du peu de respect avec lequel sont traités quelquefois des documents historiques est fourni par une des Lettres, qui se trouvent ajoutées à la Correspondance du prince Léopold avec Boulliau. C'est la lettre par laquelle Galilée offre, aux États Généraux des Pays-Bas, le projet resté inexécuté et, en réalité inexécutable, de déterminer les longitudes sur mer au moyen des apparences des satellites de Jupiter. Dans le texte original de cette lettre, conservée dans les Archives du royaume des Pays-Bas, et reproduite dans le supplément du tome III (673[a]), Galilée reconnaît à deux reprises que la lunette est une invention hollandaise. Il appelle lui-même « Tubo Olandizo » l'utile instrument qu'en l'honneur du philosophe toscan on continue de nom-

mer la *lunette de Galilée*. Les premiers éditeurs italiens ont simplement supprimé les deux passages. Dans les *Actes de l'Institut royal de Venise*, M. Favaro n'a pas craint de signaler cette mutilation ([1]).

III. — Sciences astronomiques.

A l'aide de ses lunettes, Huygens découvrit, en mars 1655, un des satellites de Saturne. Le 13 juin 1655, il en fit mention à Wallis dans une anagramme : « Perſpicillum mihi nuper paravi ipſe 12 pedum longitudine, quo vix aliud præſtantius reperiri exiſtimo quam, quum antehac nemo viderit, quod ego recens obſervavi. Scribitur autem tranſpoſitis literis in hunc modum : admovere, etc. » (224). Ce n'est qu'en mars 1656 qu'il publia sa découverte et expliqua son anagramme dans le petit Mémoire *De Saturni luna observatio nova* (Opera varia, p. 521) (267). En attendant, Wallis envoya à Huygens une autre anagramme à un grand nombre de caractères (277), qu'il n'expliqua qu'après l'apparition de l'opuscule de Huygens (278). Wallis a déclaré lui-même que son anagramme, assez prolixe pour en tirer tout ce qu'on voulait, n'avait été proposée par lui que pour mystifier Huygens et les savants anglais. Une annotation de Huygens au pied de la Lettre 277 de Wallis indique que celui-ci n'a pas réussi à faire des dupes de sa plaisanterie, qui nous paraît d'un goût douteux.

La seconde découverte à laquelle Huygens a été mené par le supériorité de ses lunettes est celle de l'anneau de Saturne. Comme le prouve une seconde anagramme publiée à la fin de son opuscule sur la lune de Saturne, il l'a faite en mars 1656 (premier dessin de Saturne sous la Lettre 217). Il communiqua cette découverte importante d'abord à Boulliau (443), puis à Chapelain (477); ensuite, il la publia en août 1659 dans son *Systema Saturnium* (Opera varia, p. 527) (648).

Le problème de la cause des apparences différentes de Saturne a excité vivement l'intérêt des contemporains de Huygens. Hévé-

---

(1) Il est digne de remarque que l'histoire des lunettes de Huygens est comprise dans ses Lettres.

lius en avait donné une théorie dans son « De Saturni nativa facie » (319). Il parle de « Saturnus trifphæricus », ce qui fait supposer à Huygens que les lunettes d'approche de Hévélius n'étaient pas excellentes. De Roberval cherche à expliquer les apparences à l'aide d'exhalations de la planète (324). Remarquons que Huygens commence sa réfutation des idées de Roberval par les mots : « Voftre hypothefe pour Saturne est certainement trefbien imaginée » (329).

Il va sans dire que l'explication de Huygens ne fut pas goûtée immédiatement de tout le monde. En effet, la supposition d'un anneau, invisible pendant quelques périodes et suspendu librement dans l'espace, n'était pas ordinaire. Au lieu de s'étonner des doutes que rencontrait la théorie de Huygens, il faut plutôt admirer, comme le fit d'ailleurs Huygens lui-même, la sagacité de Chapelain à lever la seconde difficulté en supposant l'anneau composé d'une série de lunes « cofte a cofte, pour remplir le cercle d'vn terme à l'autre » (725, 748). La Correspondance contient des matériaux précieux par rapport à l'opposition faite à l'explication de Huygens. Citons d'abord l'histoire amusante du défi d'Eustachius Divinus (737), l'expression « tua machina annularis (fit venia verbo) », dont se sert Hévélius (758), les expériences des membres de l'Académie de Florence (774), les réflexions de A. Borelli (796, 797) et de L. Magalotti (798), et ensuite les additions à la théorie de Frenicle de Bessy (894, 901) et Wren (934). Par rapport à ces additions, Huygens écrit à R. Moray : « J'ay grande confiance que les obfervations de deux annees fuiuantes renverferont toutes ces belles penfées et juftifieront mon hypothefe » (940). Ces mots montrent que Huygens cherchait à éviter les spéculations s'il pouvait disposer d'observations. Combien il désirait ardûment de les faire, prouvent les mots : « Il me tarde fi fort de les appliquer (mes lunettes) derechef à Saturne, que je donnerois volontiers le reste de l'efté pour avoir l'hyver » (323).

Immédiatement après l'invention de l'horloge à pendule, Huygens tâcha de l'utiliser à la détermination des longitudes sur mer. Le 12 janvier 1657, il écrit à van Schooten : « Inveni hifce diebus novam horologij fabricam, tam accurate tempora dimetientis, ut non parva fpes fit longitudines ejus ope definire poffe utique fi per mare vehi patiatur » (368). Cependant les difficultés causées par le mouvement des navires sont si grandes que Huygens ne réussit

pas encore (488, 823). Déjà en 1655, Huygens examina, pour les États Généraux de la Hollande, une méthode de J. Placentinus à déterminer des différences de longitude à l'aide de culminations de la Lune; sa critique est entièrement correcte (214).

Pour la détermination de la marche des horloges, on a besoin de connaître l'équation du temps. Sur ce sujet, Huygens échange quelques Lettres avec Boulliau, où il corrige une théorie émise par cet astronome (718, 723, 724, 943). De plus, il indique des inadvertances de Hévélius dans la description des phases de Vénus (747), et s'occupe d'une transition de Mercure (860, 861, 866) (¹).

Terminons en souhaitant, dans l'intérêt de la Science, que les membres de la Commission auront la satisfaction d'achever l'œuvre grandiose qu'ils ont entreprise. P.-H. Schoute.

Groningue, août 1891.

MOLENBROEK. — Theorie der Quaternionen. 1 vol. in-8°; VII-284 p. Leiden, E.-J. Brill; 1891.

La *Théorie des Quaternions* que publie M. Molenbroek et dont la lecture peut, dans une large mesure, suppléer à la lecture des Livres d'Hamilton sur la matière, diffère essentiellement des différents Traités élémentaires publiés sur ce sujet en ce qu'elle ne comporte aucune application; c'est la théorie seule et ses développements les plus importants que M. Molenbroek veut exposer. Au fond, il convient de le reconnaître, et malgré la sécheresse qui en résulte, la clarté y gagne : le lecteur qui a la patience de suivre ces développements abstraits sait toujours à quoi il a affaire; il ne risque pas de perdre le fil des idées qui se suivent et s'enchaînent avec une parfaite rigueur; il est juste d'ajouter

(¹) On trouve un compte rendu presque exclusivement des points remarquables pour l'astronome dans *Nature* de M. A.-M. Clerke (t. XXXVIII, p. 193; t. XL, p. 507; t. XLIII, p. 433).

que l'exposition de M. Molenbroek est très nette et, sans doute, les applications ne présenteront aucune difficulté pour celui qui aura étudié son Livre. M. Molenbroek promet d'ailleurs de publier bientôt un exposé systématique des principales applications des quaternions, et, d'après le Volume dont nous rendons compte, on peut être assuré qu'il mènera ce travail à bien.

La *Théorie des Quaternions* comprend sept Chapitres.

Après avoir exposé les définitions et propositions préliminaires relatives aux vecteurs, l'Auteur définit géométriquement le quaternion comme le quotient de deux vecteurs, c'est-à-dire comme l'ensemble des opérations (extension et rotation) qui permettent d'amener un vecteur sur un autre et traite ensuite de l'addition, de la multiplication et de la division des quaternions, et en particulier des quaternions *droits,* c'est-à-dire dont l'angle est égal à $\frac{\pi}{2}$. On est resté jusqu'ici dans le domaine de la Géométrie et c'est seulement à la fin du second Chapitre qu'on trouve la représentation analytique du quaternion. Dans le Chapitre suivant, M. Molenbroek traite de la multiplication des vecteurs.

Le Chapitre IV est consacré principalement aux équations de la ligne droite, de la sphère et du cercle. On y remarquera d'intéressants développements sur le rôle du symbole $\sqrt{-1}$ dans la théorie, et sur la représentation des éléments imaginaires, représentation qui se relie à des idées développées par M. Tarry dans le Congrès de l'*Association française pour le développement des Sciences* de l'année 1889.

Dans le Chapitre suivant, l'Auteur s'occupe de la différentiation des quaternions, de la formule de Taylor et de l'intégration des formules différentielles. Enfin les deux derniers Chapitres sont consacrés à la théorie des équations du premier et du second degré.

J. T.

MÉLANGES.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. PAUL TANNERY.

HUITIÈME ARTICLE.

XIII.

Lettre inédite de Descartes à Mersenne du 2 novembre 1646.

Descartes ne pouvait prétendre sérieusement mettre à exécution les menaces de sa Lettre précédente, du 12 octobre; il avait provoqué Roberval, il lui fallait rester dans la lice. Dès qu'il eut reçu de Mersenne la Lettre de Roberval à Cavendish, il répliqua, comme je l'ai dit, par la pièce Clerselier III, 96, qui était destinée à être montrée.

Le même jour, en envoyant cette pièce à Mersenne, il adressait à celui-ci la Lettre intime ci-après, qui est inédite :

« MON RÉVÉREND PÈRE,

» Vous verrez ici ma réponse à la Lettre de Roberval et je vous puis assurer que je n'y ai mis aucune chose par passion, mais que j'ai tout simplement écrit la vérité de mes sentimens sans les déguiser; seulement ai-je été plus libre de dire mon opinion de ses fautes que je n'ai coutume d'être, à cause que, le voyant obstiné à médire de moi sans raison, je crois qu'il est bon que le monde sache que nous ne sommes pas amis, et ainsi qu'on ne doit pas croire à ses paroles ni aux miennes, mais seulement peser les raisons de part et d'autre. Pour moi, j'en remarque si peu de son côté que j'admire qu'on lui daigne donner audience, et, quoique j'aie examiné sa règle prétendue (¹), je n'y trouve aucune appa-

(¹) Pour trouver les centres d'oscillation.

rence de vérité. Car, outre qu'il prétend donner règle d'une chose que je crois ne pouvoir être déterminée par raison, mais seulement par expérience, je vois qu'il se fonde sur ce qu'il pense qu'on doit rapporter la direction de tous les points du mobile à une certaine perpendiculaire, ce qui est cause qu'il prend les sécantes de tous les arcs de cercle, et tout cela me semble entièrement hors de raison; aussi se garde-t-il bien de dire ses démonstrations prétendues, desquelles il ne manqueroit pas de faire parade, s'il pensoit qu'elles fussent vraies et que je n'en pusse faire voir les défauts. C'est, en un mot, un homme qui est accoutumé à se faire valoir parmi ses disciples en se vantant de savoir tout ce qu'il ignore, et s'est acquis quelque réputation par l'analyse à cause qu'il s'est rencontré à Paris en un temps qu'il n'y avoit que lui qui y sût quelque chose; mais en cela même, il n'est pas des plus savans, comme il a paru par les deux calculs que j'avois laissés en mes solutions et que M. de Beaune lui acheva (1).

» La démonstration du solide hyperbolique infini est fort belle au regard de Torricelli qui l'a trouvée; mais ce n'est rien au regard de Roberval pource que l'ordre des propositions que Torricelli lui avoit données ne pouvoit manquer de l'y conduire (2).

» Et pour sa roulette (3), ce n'est qu'une question particulière qu'il a pu trouver par hasard et sans grande science; en toute autre chose, je ne remarque en lui aucun esprit et ce que vous dites qu'il lui faut deux ou trois mois à faire une mauvaise lettre, qui ne contient que des paroles sans raison, le confirme assez.

(1) Il s'agit des problèmes résolus par Descartes dans la lettre du 23 août 1638 à Mersenne : tangente du folium parallèle à l'axe de la courbe; construction d'un quadrilatère dont on donne deux côtés adjacents, l'angle compris, la diagonale issue du sommet de cet angle et le rapport des perpendiculaires abaissées de ce sommet sur les côtés inconnus (Clerselier, III, 65).

(2) Dans son Ouvrage *De sphæra et solidis sphæralibus libri duo* (Florence, 1644) Torricelli avait démontré que, si l'on fait tourner une hyperbole autour d'une asymptote, le volume engendré à partir d'une abscisse donnée jusqu'à l'infini est limité. Roberval (dans une lettre adressée à Torricelli le 1er janvier 1646, publiée en partie par Carlo Dati dans la *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate*, Florence, 1663) venait d'énoncer la propriété analogue des espaces plans compris entre les hyperboles de degré supérieur et leurs asymptotes.

(3) La quadrature de la cycloïde.

Quoi qu'il en soit, je vous prie de ne m'envoyer plus rien de sa part, ni aussi d'aucun autre, s'il vous plaît, car je fais profession de ne savoir plus ni lire ni écrire.

» Je suis marri de l'affliction de M. de Carcavi ([1]), mais je ne suis que bien aise de ne point recevoir les Lettres qu'il me vouloit envoyer; ce m'est autant de peine épargnée.

» Si le P. Fabri n'écrit rien contre moi, je ne me soucie pas aussi de le voir, mais pource qu'on vous avoit dit qu'il écrivoit toute la philosophie beaucoup mieux et en meilleur ordre que je n'ai fait, je pensois que les Jésuites eussent dessein de l'opposer à moi, et en ce cas je serois obligé de voir son Livre afin de tâcher de me défendre; mais rien ne seroit pourtant si pressé que je ne pusse bien attendre à le recevoir par mer ([2]).

» Je ne manquerai pas d'adresser votre Lettre à Elzevier et de faire mon mieux pour procurer qu'il vous envoie ses Livres ([3]). Je vous remercie de celui qu'il vous plaît que j'aie pour moi, et tant s'en faut que j'en désire davantage que même, s'il vous plaît obliger quelque autre en lui donnant celui que vous m'offrez, je m'en pourrai fort bien passer, à cause que je ne crois pas qu'il y ait rien dans Viète que je doive apprendre et que je ne suis pas curieux d'avoir des Livres pour orner une bibliothèque.

» Il y a longtemps que j'ai remarqué qu'après avoir attentivement regardé quelque objet fort illuminé, son image demeure dans l'œil quelque temps, lorsqu'il est fermé ou en ténèbres, et paroît avoir diverses couleurs; de quoi je pense avoir mis la raison quelque part en la Dioptrique ou aux Météores, et elle n'est autre sinon que les extrémités du nerf optique qui sont au fond de l'œil, étant fort agitées par cette grande lumière, retiennent quelque temps après leur mouvement et, à mesure qu'il diminue, il représente diverses couleurs.

» Il y a longtemps que j'ai aussi vu faire une expérience pareille

---

([1]) Son père avait fait de mauvaises affaire, et il se trouvait obligé de se défaire de sa charge de conseiller au Grand Conseil.

([2]) Il s'agit des deux volumes qui furent envoyés à Huygens et dont il a été fait mention dans l'article précédent.

([3]) C'est-à-dire des exemplaires de l'édition de Œuvres de Viète, que les Elzévirs avaient probablement promis à Mersenne en récompense de la part qu'il avait prise à cette édition.

à celle que vous me mandez d'une poule, car, en lui faisant quelques signes du bout du doigt devant ses yeux, on arrêtoit tellement son imagination qu'elle demeuroit immobile. Et pour la formation des poulets dans l'œuf, il y a plus de 15 ans que j'ai lu ce que Fabricius ab Aquapendente en a écrit; et même j'ai quelquefois cassé des œufs pour voir cette expérience. Mais j'ai bien plus eu de curiosité, car j'ai fait autrefois tuer une vache que je savois avoir conçu peu de temps auparavant, exprès afin d'en voir le fruit, et ayant appris par après que les bouchers de ce pays en tuent souvent qui se rencontrent pleines, j'ai fait qu'ils m'ont apporté plus d'une douzaine de ventres, dans lesquels il y avoit de petits veaux, les uns grands comme des souris, les autres comme des rats, et les autres comme de petits chiens, où j'ai pu observer beaucoup plus de choses qu'en des poulets, à cause que les organes y sont plus grands et plus visibles.

» J'ai de l'obligation à Monsieur de Cavendissche de ce qu'il ne m'avoit pas voulu envoyer la dernière Lettre du Roberval; c'est un témoignage de sa courtoisie de laquelle je vous prie de le remercier de ma part, car enfin cette Lettre ne contenant que des injures et des vanteries sans aucun raisonnement qui vaille rien, ne méritoit pas d'être lue; mais néanmoins, à cause que Roberval en faisoit parade en son Académie, vous m'avez obligé aussi de me l'envoyer et je n'ai pu m'abstenir d'y répondre.

» Je suis bien marri de la mort du père Nicéron et je serai toute ma vie,

» Mon Révérend Père,

» Votre très humble et très zélé serviteur,

DESCARTES. »

» D'Egmond, le 2 novembre 1646. »

XIV.

Derniers incidents de la polémique de Descartes contre Roberval.

La Lettre Clerselier, III, 96, que Descartes envoyait à Mersenne en même temps que la précédente, comme réplique à Roberval destinée à être montrée, est d'une violence singulière que Clerselier

a adoucie quelque peu. Roberval y est traité de capitan de comédie, fait pour être « berné et souffleté d'une pantoufle ». Descartes y rappelle ses anciens démêlés avec son adversaire où il a eu tout l'avantage et termine en déclarant qu'il ne daignera dorénavant lire aucune chose de sa part, si ce n'est que quelqu'un qui s'y entende ne lui assure qu'elle mérite d'être lue.

Dans cette Lettre, comme dans celle du même jour à Cavendish (Clerselier, III, 91), Descartes revient sur le désaccord entre sa théorie et l'expérience, en ce qui concerne le centre d'oscillation. Il entre dans une discussion subtile pour montrer que le raisonnement ne pouvait effectivement tenir compte, dans le cas général, de toutes les conditions du problème. C'est reconnaître qu'en somme il n'avait résolu ce problème que dans des cas particuliers. Roberval, avec ses distinctions et ses réserves, avouait de même implicitement qu'il n'avait pas davantage la solution générale complète ; il ne pouvait prétendre qu'avoir touché la vérité de plus près que Descartes pour les mouvements des figures planes autour d'un axe perpendiculaire à leur plan.

Quoi qu'il en soit, il ne répliqua pas de nouveau aux attaques de son adversaire. La rédaction de ses idées lui demandait, semble-t-il, de plus en plus de temps et il sentait son infériorité comme polémiste; il garda donc le silence, bien entendu sans s'avouer vaincu. La correspondance ultérieure de Descartes ne revient plus que deux fois sur la dispute engagée; c'est la première fois, dans une Lettre écrite vers le 10 janvier 1647 (Clerselier, III, 89) à Mersenne, lequel avait annoncé à son correspondant que la règle de Roberval lui paraissait toujours d'accord avec l'expérience et qu'il avait en tous cas soumis les pièces du procès à Florimond de Beaune.

Descartes répond qu'il a ramené la règle de Roberval à une forme plus simple, qui revient à poser pour la distance du sommet du triangle au centre d'oscillation :

$$x = \frac{3}{4}h - \frac{1}{2}h \operatorname{tang}^2 \alpha + \frac{3}{20}h \operatorname{tang}^4 \alpha,$$

h étant la hauteur du triangle, α le demi-angle au sommet.

Il calcule d'après cela que, pour $\alpha = 75^\circ$, x dépasse $32h$, tandis

que, d'après l'expérience, au dire de Mersenne, il serait seulement d'environ $4h$.

Dans une Lettre suivante, écrite vers le 1er mars 1647 (Clerselier, III, 92), il confirme son calcul qui cependant est singulièrement faux, sa réduction de la règle de Roberval étant erronée. Elle eût donné environ $x = 3h$.

L'année suivante, Mersenne mourait, et Carcavi s'offrait à Descartes pour remplacer le correspondant qu'il perdait. Tout aussitôt, Descartes en profite pour provoquer encore une fois Roberval, et le plus singulier, c'est qu'il prend l'occasion d'un défi indirect que Fermat vient de lui adresser et qui concerne l'évanouissement des radicaux dans une équation.

Dans une Lettre du 11 décembre 1648 (Clerselier, III, 83; adressée à un intermédiaire dont le nom est inconnu), Descartes annonce qu'il a trouvé, en moins d'un demi-quart d'heure, une méthode générale relative à cette question et pose à ce sujet un problème dont il réclame surtout la solution de Roberval (parce qu'il est titulaire de la chaire de Ramus et qu'il est tenu dès lors de résoudre des questions de ce genre, ou d'avouer qu'il est indigne de cette chaire).

Dans la Lettre à Carcavi du 11 juin 1649 (Clerselier, III, 75), après avoir reçu l'indication de la méthode employée par Roberval et qui revient à celle de Fermat, il revient sur son défi et demande que Roberval (qui fait profession de n'être pas son ami) donne le développement complet de l'équation

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{d} + \sqrt{e}.$$

après l'évanouissement des radicaux. Il indique lui-même les huit premiers termes de ce développement.

Carcavi répondit le 9 juillet 1649 (Clerselier, III, 76). Roberval lui a dit qu'il n'a jamais eu d'autre pensée que d'honorer Descartes et l'a prié de l'écrire formellement à ce dernier. Le bon père Mersenne, en écrivant innocemment suivant son génie, a troublé la paix qui aurait toujours dû régner entre les deux géomètres. Roberval a seulement recherché l'occasion de signaler à Descartes quelques fautes qu'il croyait trouver dans sa *Géométrie* et que ses fonctions de professeur l'obligeaient de relever dans

son enseignement. Carcavi indique trois points sur lesquels portent les critiques de son ami. Quant à la question posée par Descartes, Roberval n'y répond pas; il se contente de dire que sa méthode porte sa démonstration avec soi, et s'applique, quel que soit le nombre des radicaux.

La correspondance continua par une réplique de Descartes du 17 août 1649 (Clerselier, III, 77) et une nouvelle lettre de Carcavi du 24 septembre 1649 (Clerselier, III, 78). Il semble que Descartes, lassé d'une discussion qui n'aboutissait pas, ne répondit pas à cette dernière communication.

Il n'est pas sans intérêt de discuter les trois critiques de détail adressées par Roberval à la *Géométrie* de Descartes.

La première concerne un passage de la page 326 de l'édition originale (p. 22 de l'édition Hermann, Paris, 1886). Après avoir trouvé l'équation du lieu à quatre droites, en supposant le point du lieu dans un des angles formés par deux de ses droites, Descartes ajoute :

« Et si la quantité y se trouvoit nulle ou moindre que rien en cette équation, lorsqu'on a supposé le point C en l'angle DAG, il faudroit le supposer aussi en l'angle DAE ou EAR ou RAG, en changeant les signes + et — selon qu'il seroit requis à cet effet. Et si, en toutes ces quatre positions, la valeur de y se trouvoit nulle, la question seroit impossible au cas proposé. »

Roberval affirmait que la question n'est jamais impossible.

Il convient tout d'abord d'observer que la convention sur le signe des coordonnées dans les divers angles n'était alors nullement établie et c'est une erreur historique que d'attribuer cette convention à l'auteur de la *Géométrie*. D'autre part, il semble avoir échappé à Descartes que le lieu à quatre droites est, de fait, constitué par l'ensemble de deux coniques (non par une seule), et en telle sorte que, dans chaque angle des coordonnées, il y ait toujours des points du lieu. Roberval, qui avait approfondi la question, paraît avoir relevé à bon droit l'inadvertance de Descartes à cet égard.

La seconde critique touche la construction donnée pages 405-406 de la *Géométrie* (éd. Hermann, p. 81-82) des racines de l'équation générale du sixième degré par l'intersection d'un cercle et d'une

courbe spéciale du troisième degré. Cette courbe a deux branches, l'une au-dessous, l'autre au-dessus de l'axe des x. Cette seconde branche seule est utilisée, grâce à une préparation spéciale subie par l'équation, et il peut se faire que cette branche coupe effectivement le cercle en six points. Roberval semble avoir cru, d'après la forme de la courbe, que la rencontre en six points ne pouvait avoir lieu qu'en utilisant les deux branches ; il ne s'était pas rendu compte de l'artifice mis en usage par Descartes. Celui-ci, pour établir la validité de sa construction, se contenta de proposer à Carcavi de faire le calcul sur un exemple numérique, pour une équation ayant toutes ses racines réelles et positives. Son correspondant fut incapable de s'en tirer. En tout cas la critique portait, cette fois, complètement à faux.

Le troisième point porte sur la règle de Descartes pour le nombre des racines positives et négatives. Il est difficile de se rendre compte de la nature de l'objection de Roberval. Carcavi cite comme exemples deux équations complètes (l'une du troisième, l'autre du quatrième degré) qu'il affirme à tort ne pas avoir de racines imaginaires. L'erreur est tellement flagrante qu'il est impossible de l'attribuer à Roberval ; Carcavi ne l'aura pas compris ; il déclare d'ailleurs « avoir assez de peine à chevir de lui à cause des écoliers qui l'occupent ».

L'énoncé de la règle de Descartes dans sa *Géométrie* suppose implicitement que les racines multiples soient comptées d'après leur degré de multiplicité. On pouvait juger nécessaire de compléter cet énoncé en faisant explicitement la convention indispensable à cet égard. Mais Roberval admet cette même convention dans son Traité posthume *De recognitione æquationum*, probablement composé avant la *Géométrie*. Si donc sa critique avait porté sur ce point, elle n'aurait en tous cas concerné que la forme.

Quant à la restriction de la règle de Descartes dans le cas où il y a des racines imaginaires, elle est d'autant moins en question ici qu'elle avait déjà fait l'objet d'une correspondance antérieure entre Roberval et Chauveau (Clerselier, III, p. 447) et Carcavi énonce, évidemment d'après Roberval, le principe que ces racines vont par couples.

Quoi qu'il en soit, il paraît bien clair, d'une part, que Roberval n'attachait pas une grande importance à ses critiques de détail

contre la *Géométrie*, que, d'un autre côté, il désirait réellement, en 1649, se réconcilier avec l'auteur. Carcavi fut beaucoup trop maladroit pour pratiquer cette réconciliation, et ses lettres ne purent que le faire mépriser par Descartes.

Un passage de la correspondance de ce dernier (Clerselier, III, p. 449) semble au reste indiquer la véritable raison de l'animosité qu'il déploya contre Roberval : « On me fit voir l'an passé des écrits qu'il avoit enseignés à ses disciples, qui contenoient plusieurs raisonnemens très foibles qu'il débitoit pour des démonstrations et, à cause qu'il y concluoit des choses contraires à ce que j'avois écrit, il inféroit de là que j'avois failli ([1]). » Descartes a constamment cherché, depuis la publication de son *Discours de la méthode,* à faire pénétrer ses idées et ses principes dans l'enseignement; c'est là le mobile de toutes ses polémiques, le secret de la tactique qu'il déploie, quand, par exemple, il a affaire aux Jésuites. Tant qu'il espère réussir, il est gracieux, accommodant; mais en fait, il pense que qui n'est pas avec lui est contre lui, et dès qu'il se croit attaqué dans un enseignement, il mène les hostilités avec une vigueur incomparable, par tous les moyens dont il dispose.

Ainsi, ce que Descartes poursuit en Roberval, ce n'est ni l'homme ni le géomètre : c'est le professeur en vue qui n'a pas adopté ses méthodes et qui n'a même pas craint de lui tenir tête. Roberval, au contraire, n'avait rien à gagner à une polémique contre un homme qui, après avoir affirmé sa supériorité comme mathématicien, ne s'occupait en réalité que de philosophie. On comprend donc très bien qu'après l'engagement de 1638, il se soit simplement tenu sur la défensive. Si l'on fait abstraction de la malencontreuse diversion de Carcavi, on peut dire que cette défensive fut très honorable pour lui. Descartes fut loin d'avoir constamment raison au fond, et, comme forme, il mit la plupart du temps les torts contre lui.

([1]) Dans les écrits de Roberval, publiés par lui ou après sa mort, il n'y a aucune attaque contre Descartes; il semble que celui-ci parle de leçons rédigées par des élèves.

NOUVELLES FORMULES POUR REPRÉSENTER LA FONCTION $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$ DE BESSEL;

PAR M. W. KAPTEYN.

Soient

$$(1) \qquad u_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 + \frac{x^2}{4a^2}} \frac{da}{a^{2n}} \qquad (n = 0.1.2.3\ldots)$$

et

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} \frac{da}{a^{2n}},$$

on aura, en développant $e^{\frac{x^2}{4a^2}}$,

$$u_n = \Delta_n + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Delta_{n+1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \Delta_{n+2} + \ldots.$$

Maintenant l'intégration par parties de l'intégrale Δ_n donnant

$$\Delta_n = -\frac{2}{2n-1}\Delta_{n-1},$$

on obtient aisément

$$\Delta_n = (-1)^n \frac{2^n \Delta_0}{1.3\ldots(2n-1)} = (-1)^n \frac{\pi}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

et

$$\Delta_{n+1} = -\frac{2}{2n+1}\Delta_n,$$

$$\Delta_{n+2} = \frac{2^2}{(2n+1)(2n+3)}\Delta_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En substituant ces valeurs, on a

$$(2) \qquad u_n = (-1)^n \frac{\pi}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+1)} + \frac{x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} - \ldots\right].$$

Or

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+1)} + \frac{x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} - \ldots\right]$$

$$(n = 1.2.3\ldots);$$

par suite

$$(3) \qquad J_{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2+\frac{x^2}{4a^2}}\frac{da}{a^{2n}} \qquad (n = 1.2.3\ldots).$$

Pour trouver encore une autre expression pour $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$, je cherche l'équation différentielle à laquelle u_n satisfait.

En différentiant l'équation (1) par rapport à x, on a

$$\frac{du_n}{dx} = \frac{x}{2}u_{n+1},$$

et, en intégrant l'intégrale u_n par parties, on obtient

$$u_n = -\frac{2}{2n-1}\left(u_{n-1} + \frac{x^2}{4}u_{n+1}\right).$$

De ces deux relations se déduit l'équation différentielle

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{du_n}{dx} + u_n = 0.$$

Cette équation admet pour intégrale générale

$$u_n = \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(A\cos x + B\sin x),$$

où A et B représentent des constantes arbitraires. Pour le démontrer, posons $x^2 = 2z$ dans l'équation différentielle; il viendra

$$2z\frac{d^2u_n}{dz^2} + (2n+1)\frac{du}{dz} + u = 0.$$

En faisant la même substitution dans l'équation connue

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = 0,$$

elle se transforme en

$$2z\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{dv}{dz} + v = 0.$$

Différentions n fois de suite la dernière équation et comparons l'équation résultante

$$2z\frac{d^{n+2}v}{dz^{n+2}} + (2n+1)\frac{d^{n+1}v}{dz^{n+1}} + \frac{d^nv}{dz^n} = 0,$$

avec l'équation

$$2z\frac{d^2u_n}{dz^2}+(2n+1)\frac{du}{dz}+u=0;$$

alors il est évident qu'on aura

$$u_n=\frac{d^n}{dz^n}(\text{A}\cos\sqrt{2z}+\text{B}\sin\sqrt{2z})$$

ou, en revenant à la variable x,

$$u_n=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n(\text{A}\cos x+\text{B}\sin x).$$

Pour avoir la solution, correspondante à la valeur

$$u_n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2+\frac{x^2}{4a^2}}\frac{da}{a^{2n}},$$

il faut déterminer les constantes A et B de telle sorte que, pour $x=0$ ou $z=0$,

$$u_n=\Delta_n=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{1.3\ldots(2n-1)}.$$

D'abord on déduit du développement

$$\sin\sqrt{2z}=\sqrt{2z}\left(1-\frac{2z}{3!}+\frac{(2z)^2}{5!}-\ldots\right),$$

que $\frac{d^n}{dz^n}\sin\sqrt{2z}$ a une valeur infinie pour $z=0$, il faut donc que B soit zéro.

Pour déterminer ensuite A, on tire du développement

$$\cos\sqrt{2z}=1-\frac{2z}{2!}+\frac{(2z)^2}{4!}-\ldots,$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\cos\sqrt{2z}=(-1)^n\frac{2^n\,n!}{(2n)!}.$$

On aura donc

$$(-1)^n\text{A}\frac{2^n\,n!}{(2n)!}=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{1.3\ldots(2n-1)}$$

ou

$$\text{A}=2^n\sqrt{\pi}.$$

et enfin

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2+\frac{x^2}{4a^2}}\frac{da}{a^{2n}}=2^n\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\cos x.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (3), on obtiendra la formule simple

$$(4) \qquad \mathrm{J}_{n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^n \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x}\,\frac{dx}{d}\right)^n \cos x.$$

Cette formule sera évidemment identique pour $n = 2, 3, \ldots,$ avec la formule

$$\mathrm{J}_{m+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \sum (-1)^p \frac{(m-p+1)^{p|-1}}{p!} \, \frac{(2p+1)^{m+1-2p|2}}{x^{m+1-2p}}$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \, \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}},$$

que M. E. Lommel donne dans son travail *Studien über die Besselschen Functionen*.

1re Partie.

G. KIRCHHOFF. — VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATISCHE PHYSIK. IIer Band : Leipzig, B.-G. Teubner, 1891; in-8°.

1. « Il arrive parfois que la Science rétrograde. On ne pourrait donner d'exemple plus frappant que la théorie de la lumière. Fresnel a découvert la surface de l'onde lumineuse qui est du quatrième degré; Mac Cullagh, Neumann, Lamé, ont placé la vibration parallèle au plan de polarisation; tous ces géomètres sont d'accord; mais maintenant, pour tous ceux qui écrivent sur cette question, ces résultats sont perdus; chacun a sa théorie à soi et ne lit pas les autres. Pour eux, plus d'onde de Fresnel, plus de vibration située dans l'onde, plus de vibration parallèle au plan de polarisation; et il n'y pas deux auteurs qui puissent fournir les mêmes formules à l'expérience. »

Ces lignes d'É. Mathieu [1] affirment une grande vérité trop souvent méconnue aujourd'hui : c'est qu'en Physique mathématique, comme dans tout autre ordre de connaissances, le progrès suppose essentiellement l'existence d'une tradition, d'une tradition suivie, respectée, et contre laquelle les physiciens ne se révoltent qu'en cas d'absolue nécessité.

Vers quel but, en effet, tendent les efforts des physiciens? Vers la construction d'un système, exclusivement composé de notions empruntées à la Géométrie et à l'Analyse, et donnant une représentation de l'ensemble des phénomènes naturels. C'est cette construction que l'on nomme, assez improprement, la *Physique mathématique*, et qui mériterait mieux le nom de *Physique théorique* ou de *Physique rationnelle*.

Toute nouvelle découverte dans le domaine de l'expérience ne trouve pas toujours sa représentation dans les parties déjà construites du système; aussi de nouvelles retouches sont-elles chaque jour nécessaires; tantôt, il faut modifier plus ou moins profondément une région plus ou moins étendue de l'édifice, tantôt y ajouter quelque aile nouvelle.

[1] E. MATHIEU, *Cours de Physique mathématique*. Paris, 1873.

Mais, pour faire ces modifications, il n'est pas nécessaire, en général, de jeter à bas le monument élevé par nos prédécesseurs, de le remuer jusqu'aux fondations et de reconstruire sur un plan tout nouveau.

Sans doute, ces profonds bouleversements s'imposent quelquefois. Ainsi Newton et les grands géomètres du XVIIIe siècle avaient édifié, pour représenter les phénomènes de l'Optique, un système d'une belle unité, la *théorie de l'émission*. Mais ce système était incapable de représenter les innombrables phénomènes des interférences et de la polarisation. Les efforts de Biot pour loger quand même, à force de complications, les découvertes nouvelles dans l'ancien édifice, sont demeurés un exemple d'obstination puérile. Une révolution était devenue nécessaire dans le domaine de l'Optique ; il fallait en briser l'ancienne constitution, lui donner une constitution nouvelle reposant sur des principes essentiellement différents : ce fut l'œuvre d'Young et de Fresnel.

Mais, dans le développement de la Physique comme dans tous les développements que nous présente la nature, la révolution est l'exception, l'évolution la règle. Aussi compléter l'œuvre de ses prédécesseurs, y apporter les modifications de détail qui peuvent la rendre plus parfaite, plus conforme à la nature qu'elle doit représenter, telle doit être la tâche du physicien qui veut contribuer pour sa part au progrès de la Science.

L'accomplissement de cette tâche demande du travail et de la modestie : travail actif, opiniâtre, pour bien comprendre le plan tracé par les hommes de génie qui nous ont précédés, pour juger exactement la partie de ce plan que nous devons réaliser, pour apprécier les circonstances où il est légitime d'apporter à leur dessin de légères retouches; modestie, pour subordonner notre œuvre à la leur, pour nous faire maçons du monument qui porte leur nom et non point architectes d'un monument qui porterait le nôtre.

Ce travail opiniâtre, cette modestie, se rencontrent bien rarement aujourd'hui. Chacun veut innover, avoir *sa* théorie, construire *sa* physique. Personne ne veut lire, méditer, approfondir les œuvres des maîtres. De là, la multiplicité et la confusion des systèmes que déplorait E. Mathieu. Bien déplorables, en effet, sont cette multiplicité et cette confusion des théories. Au lieu de se disposer avec ordre et harmonie comme, dans une ville bien ordonnée, s'alignent

les monuments construits, sur les plans de quelques architectes de génie, par une armée de manœuvres actifs et dociles, les systèmes de physique s'entassent en désordre, comme un fouillis de huttes que chacun bâtit à la hâte pour s'y abriter sa vie durant sans souci du voisin, sans souci de celui qui viendra plus tard jeter à bas cette construction fragile et inachevée. Le voyageur, égaré dans un semblable dédale, incapable de suivre les rues qui en doivent relier les diverses parties, renonce bientôt à prendre connaissance de cette ville. Ainsi la multiplicité et la confusion des théories engendrent bientôt le scepticisme et le découragement.

2. Ceux que désespère cet état chaotique de la Physique actuelle salueront avec joie l'œuvre dont il nous est donné de rendre compte aujourd'hui : les *Leçons d'Optique* de G. Kirchhoff, que le Dr Kurt Hensel, *privat-docent* à l'Université de Berlin, vient de publier après la mort de l'illustre maître.

Certes, G. Kirchhoff savait, au besoin, créer une théorie nouvelle ; et nul n'oserait regarder comme un esprit routinier l'inventeur de l'analyse spectrale ; pourtant nul, plus que lui, n'était respectueux de la tradition. Ses œuvres si parfaites de Physique mathématique sont, pour la plupart, destinées non pas à renverser une théorie ancienne, non pas à créer une théorie nouvelle, mais à compléter, à perfectionner, à élucider les théories déjà existantes. En Électrodynamique, en Magnétisme, en Élasticité, en Thermodynamique, il n'innove pas ; il suit la trace d'Ohm, de W. Weber, de Poisson, de Green, de Lamé, de Cauchy, de W. Thomson, de Clausius ; mais, dans la voie ouverte par ces grands génies, quel actif pionnier ! et comme la route est nette et bien déblayée partout où il s'est chargé de la frayer ! Pendant une grande partie de sa carrière scientifique, il s'est fait en quelque sorte l'élève du plus grand inventeur qui soit aujourd'hui en Physique, de l'illustre H. von Helmholtz. Placé, à l'Université de Berlin, aux côtés de ce fécond génie, il s'est attaché à exposer, à perfectionner, à développer les idées qu'Helmholtz avait émises sur l'Hydrodynamique, sur l'Acoustique, sur les déformations des corps polarisés ; et, de cette sorte de collaboration, sont sortis de beaux et importants Mémoires, et surtout une grande partie de ces merveilleuses *Leçons de Mécanique* qui sont comme l'introduction à l'Ouvrage dont nous rendons compte aujourd'hui.

Cet Ouvrage, comme tout ce qu'a écrit Kirchhoff, a été conçu dans un sentiment de respect pour la tradition. Fresnel a fait de la théorie de l'élasticité, à peine ébauchée à son époque, le fondement des théories optiques. Green, Neumann, Mac Cullagh, Lamé, ont poursuivi son œuvre, en retouchant et modifiant seulement quelques détails. Leurs travaux forment un ensemble d'une merveilleuse unité. Eh bien ! c'est cette théorie élastique de l'Optique, cette théorie traditionnelle, que G. Kirchhoff expose dans ses *Leçons*, avec une ampleur, avec une perfection inconnues jusqu'ici.

Le respect de la tradition exige, nous l'avons dit, un travail considérable; une sorte de paresse, le désir de produire hâtivement et à peu de frais, sont pour beaucoup dans le mépris avec lequel quelques physiciens actuels traitent l'œuvre de ceux qui les ont précédés. Que les *Leçons d'Optique* de Kirchhoff leur servent d'exemple.

Dans un court appendice, M. le Dr Kurt Hensel a retracé les vicissitudes par lesquelles a passé la rédaction de ses *Leçons* avant leur publication. Cette histoire est instructive, car elle nous apprend par quelle élaboration opiniâtre, par quelle longue série de méditations et de retouches, la pensée de Kirchhoff arrivait à cette précision et à cette concision que nous admirons aujourd'hui.

Les *Leçons d'Optique*, en effet, ne sont pas simplement, comme la plupart des ouvrages analogues publiés après la mort de leur auteur, une rédaction des notes prises au cours par un ou plusieurs élèves. Une très grande partie de ces *Leçons* avaient été soigneusement rédigées par G. Kirchhoff lui-même. Aussi y retrouvons-nous non seulement la pensée, mais encore le style de l'illustre physicien.

Le reste de l'Ouvrage a été composé au moyen de brouillons de leçons laissés par Kirchhoff, et des notes prises à ses cours par MM. Nœther, Weinstein, König, Nath et Kurt Hensel. La multiplicité de ces documents, la compétence de ceux qui les ont fournis, enfin le soin avec lequel M. H. von Helmholtz a revu la rédaction de l'Ouvrage, nous assurent que nous avons bien l'expression exacte des idées de Kirschhoff.

3. Ces idées, nous l'avons dit, représentent le plus magistral

exposé de la théorie des ondulations qui ait été donné jusqu'ici. En particulier, la théorie des phénomènes présentés par les corps isotropes est traitée avec une telle ampleur que l'on ne sait ce que l'on doit le plus admirer ou de la rigueur logique avec laquelle les diverses parties de cette théorie sont enchaînées les unes aux autres, ou de l'élégance et de la généralité des procédés analytiques qui servent à la traiter. Déjà, en 1882, G. Kirchhoff avait donné, dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, un Mémoire [1] qui renfermait tous les éléments de la théorie dont nous lisons aujourd'hui le développement. Mais, entre le Mémoire *Sur la théorie des rayons lumineux* et les *Leçons d'Optique*, il y a toute la distance qui sépare une esquisse tracée par un maître du tableau auquel ce maître a mis la dernière main.

La première leçon est consacrée aux hypothèses par lesquelles la théorie des ondulations parvient à établir les équations aux dérivées partielles du mouvement lumineux.

On considère un solide isotrope fictif, l'éther, et les déplacements transversaux infiniments petits d'un tel solide. Les trois composantes u, v, w d'un tel déplacement vérifient, en tout point (x, y, z) du milieu et à tout instant t, les trois équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad a^2 \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad a^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

et aussi l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Faisons encore, sur les quantités u, v, w, deux hypothèses complémentaires qui sont les suivantes :

1° Les trois quantités u, v, w sont trois fonctions périodiques de t, ayant une même période T. Cette période est extrêmement courte par rapport à la durée de persistance des impressions lumineuses sur la rétine.

---

(1) G. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*. Nous avons traduit ce Mémoire dans les *Annales de l'École Normale supérieure* et nous en avons exposé, dans ce *Bulletin*, les principales idées (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XII, p. 23).

2° La longueur d'onde aT est très petite par rapport aux distances visibles, par exemple par rapport au millimètre.

Dès lors, si l'on considère l'expression

$$J = \frac{\rho}{T}\int_t^{t+T}(u^2+v^2+w^2)\,dt,$$

où ρ est la densité de l'éther, cette expression fournira, par ses propriétés analytiques, une image des propriétés physiques qu'offre l'intensité d'une lumière monochromatique dans un milieu isotrope parfaitement transparent. La durée de vibration T caractérise la couleur; la densité ρ de l'éther caractérise le milieu; la vitesse de propagation a dépend à la fois de la couleur de la lumière et de la nature du milieu.

Des hypothèses que nous venons d'énumérer, la dernière, celle qui a trait à la petitesse de la longueur d'onde par rapport aux longueurs visibles, est, comme le montre le développement de la théorie, le nerf de toute l'explication des phénomènes de diffraction.

L'étude des équations aux dérivées partielles (1) et (2) se présente naturellement comme le premier objet aux recherches de l'opticien. Clebsch a montré que l'on intégrait ces équations d'une manière générale en prenant trois intégrales U, V, W de l'équation

$$(3) \qquad a^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

et en posant

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

C'est donc, en réalité, l'étude de l'équation aux dérivées partielles (3) qui domine la théorie mathématique de la lumière, comme elle domine la théorie mathématique du son.

Ces préliminaires généraux posés, Kirchhoff les complète, dans la première leçon, en indiquant brièvement les principes relatifs aux mouvements vibratoires plans et à leur composition. Puis, passant à la notion du point lumineux et à la théorie des ondes sphériques donnée par Euler, il expose l'explication de la classique expérience des deux miroirs.

4. L'étude de l'équation aux dérivées partielles (3) domine, nous venons de le dire, la théorie mathématique de la lumière. On doit à G. Kirchhoff le théorème fondamental qui régit l'étude de cette équation, et c'est à l'exposé de ce théorème qu'est consacré le début de la deuxième leçon. Insistons quelque peu sur l'importance de ce théorème.

Cauchy a montré que, si l'on considère un point o, d'affixe z_0, intérieur à une courbe fermée et une fonction $f(z)$ de la variable complexe z régulière à l'intérieur de cette courbe, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz,$$

l'intégrale s'étendant au contour. Cette égalité, on le sait, s'obtient sans peine en appliquant le théorème de Green d'une part à la fonction $f(z)$, et d'autre part à la plus simple des fonctions de z ayant un pôle au point o, c'est-à-dire à la fonction

$$\frac{1}{z - z_0}.$$

On sait comment cette proposition de Cauchy peut être prise pour fondement de la théorie des fonctions d'une variable complexe; comment, en particulier, elle démontre que toute fonction d'une variable complexe régulière dans une aire est en même temps analytique dans cette aire.

Le même procédé appliqué, d'une part, à une fonction V harmonique à l'intérieur d'une certaine surface S, d'autre part, à la plus simple des fonctions harmoniques qui ont pour pôle le point o intérieur à cette surface, c'est-à-dire à la fonction $\frac{1}{r}$, a fourni à Green la célèbre identité

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)dS.$$

Cette identité est fondamentale dans l'étude des fonctions harmoniques; elle permet de démontrer que toute fonction régulière dans un espace est analytique dans cet espace.

La théorie du son conduit à considérer les fonctions qui vérifient une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0.$$

La plus simple des fonctions qui vérifie cette équation aux dérivées partielles et qui ait au point o un pôle est la fonction

$$\frac{\cos K r}{r}.$$

M. H. von Helmholtz, en appliquant l'identité de Green à cette fonction d'une part et, d'autre part, à une fonction qui, à l'intérieur de la surface S, contenant le point o, est régulière et vérifie l'équation aux dérivées partielles précédente, a obtenu l'identité

$$4\pi\psi_0 = \int \left(\psi \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\cos K r}{r} - \frac{\cos K r}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n_i} \right) dS.$$

Cette identité, fondamentale dans l'étude des fonctions ψ, conduit en particulier à cette conséquence que toute fonction ψ régulière dans un espace est analytique dans cet espace.

Ces diverses identités, déduites du théorème de Green, auxquelles il faudrait joindre les identités analogues relatives aux fonctions harmoniques de deux variables et aux fonctions ψ de deux variables, ont, dans l'étude des fonctions auxquelles elles se rapportent, une importance capitale. G. Kirchhoff a donc fait faire un grand pas à la théorie analytique des fonctions qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad a^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

en établissant l'identité, analogue aux précédentes, qui se rapporte à ces fonctions. C'est l'identité

$$(4) \qquad \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS,$$

avec

$$(5) \qquad \begin{cases} G(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} \\ \qquad - \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial n_i} + \dfrac{1}{ar} \dfrac{\partial r}{\partial n_i} \dfrac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t}. \end{cases}$$

M. Maggi a élevé quelques doutes sur la légitimité du raisonnement de G. Kirchhoff et a cherché à éviter les points litigieux de sa démonstration. M. Beltrami a donné, de cette proposition de

G. Kirchhoff, une belle démonstration que nous avons reproduite dans nos *Leçons d'Hydrodynamique*.

L'application à une surface sphérique du théorème de G. Kirchhoff donne le beau théorème par lequel Poisson est parvenu à former l'intégrale de l'équation (3). Ce théorème de Poisson est, comme l'on sait, le fondement de la théorie de la propagation du son, et Stokes en a fait usage pour l'étude de la diffraction. C'est d'ailleurs par une habile généralisation de la démonstration du théorème de Poisson donnée par Kirchhoff dans ses *Leçons de Mécanique*, que le savant physicien est parvenu plus tard à la démonstration du théorème général auquel il conviendrait désormais d'attacher son nom.

4. Un problème analytique est complètement défini lorsqu'on connaît à la fois les équations aux dérivées partielles qui le régissent et les conditions aux limites auxquelles il est soumis. Les hypothèses générales de la théorie ondulatoire de la lumière nous font connaître les équations aux dérivées partielles qui régissent, dans un milieu homogène, isotrope et transparent, les composantes du mouvement qui représente les phénomènes lumineux. Les conditions aux limites nous seront fournies, dans chaque cas particulier, par les hypothèses spéciales relatives aux corps qui limitent le milieu.

Le théorème de G. Kirchhoff a l'avantage, non seulement de fournir l'intégrale générale de l'équation des mouvements lumineux, mais encore d'indiquer d'une manière précise de quelle manière il convient de fixer les conditions aux limites.

Supposons qu'un point lumineux M se trouve dans un milieu isotrope indéfini; il y engendrera un phénomène lumineux et soit φ_0 l'une des fonctions U, V, W qui servent à former les composantes du mouvement lumineux au point O. On place dans le milieu un corps dont la surface est S. La fonction φ_0 est remplacée par une nouvelle fonction φ'_0, et l'on a, comme G. Kirchhoff le montre sans peine,

$$4\pi\varphi'_0 = 4\pi\varphi_0 - \int G'\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS,$$

la fonction $G'(x, y, z, t)$ étant définie par l'égalité (5) où l'on remplace φ par φ'.

L'égalité (5) nous montre alors que le problème de l'Optique sera complètement résolu si nous savons former, en tout point de la surface S, et pour toute valeur de t, les valeurs de φ' et de $\frac{\partial\varphi'}{\partial n_i}$.

Les règles qui permettent, dans chaque cas particulier, de former les valeurs de φ' et de $\frac{\partial\varphi'}{\partial n_i}$ à la surface d'un corps étranger avaient été établies par Kirchhoff dans son Mémoire de 1882, mais avec une extrême concision qui entraînait beaucoup d'obscurité. Dans le présent Ouvrage, leur exposé, quoique très concis encore, est cependant beaucoup plus clair. Kirchhoff montre d'abord la forme d'équations aux limites qui convient à la surface de séparation de deux milieux transparents. Ces équations aux limites, qui suffisent à déterminer les directions des rayons réfléchis et réfractés, se simplifient beaucoup lorsque le corps est *complètement noir*, c'est-à-dire lorsqu'il ne fournit ni ondes réfléchies ni ondes réfractées. Elles deviennent alors

$$\varphi' = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial N} = 0,$$

en tout point de la surface du corps noir qui n'est pas vu du point lumineux et

$$\varphi' = \varphi, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial N} = \frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

en tout point du corps noir qui est vu du point lumineux. De là, il résulte immédiatement que, si l'on plonge un corps noir dans un milieu qu'éclaire un point lumineux, on aura, en tout point o de ce milieu

$$(6) \qquad 4\pi\varphi'_0 = 4\pi\varphi_0 + \int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS,$$

la fonction G étant définie par l'égalité (5) et l'intégrale s'étendant à la partie de la surface du corps noir qui est vue du point lumineux.

3. L'évaluation de cette intégrale

$$\int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS,$$

étendue à une aire limitée, est ensuite exposée par G. Kirchhoff.

G. Kirchhoff excepte tout d'abord de ses recherches deux cas définis de la manière suivante :

1° La ligne qui joint le point lumineux 1 au point o passe à une distance du bord de l'aire S de l'ordre de la longueur d'onde ;

2° Il existe, sur le bord de cette surface, une portion d'étendue finie le long de laquelle les variations de la somme $(r_1 + r_0)$ sont seulement de l'ordre de la longueur d'onde λ.

Ces deux cas exceptionnels étant exclus, on peut distinguer deux cas généraux :

1° La ligne (o, 1) ne rencontre pas la surface S. On a alors

$$\int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS = 0.$$

2° La ligne (o, 1) rencontre la surface S. On a alors

$$\int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS = 4\pi\varphi_0.$$

L'application de ces résultats à l'équation (6) donne de suite la réponse à la question suivante : Un point lumineux 1 et un écran parfaitement noir sont placés dans un même milieu ; quel est l'éclairement au point o de ce milieu ?

Si la ligne (o, 1) rencontre le corps noir entre les points o et 1, on aura

$$\varphi'_0 = 0.$$

et le point o sera dans l'obscurité.

Si la ligne (o, 1) ne rencontre pas le corps noir entre les points o et 1, on aura

$$\varphi'_0 = \varphi_0.$$

et le point o sera éclairé comme si le point lumineux n'existait pas.

Ce théorème fondamental est la loi de la propagation rectiligne de la lumière et le principe de la théorie des ombres. La démonstration qu'en donne Kirchhoff montre que sa justesse est soumise à deux restrictions :

La ligne (o, 1) passe à une distance du bord de l'écran, grande par rapport à la longueur d'onde ;

La somme $(r_0 + r_1)$ subit, le long de toute portion finie du bord

de l'écran, une variation grande par rapport à la longueur d'onde.

Il y a donc deux cas, définis d'une manière précise, et deux seulement, où, dans un milieu isotrope, la loi de la propagation rectiligne de la lumière pourra devenir inexacte, et où, par conséquent, il pourra y avoir *diffraction*. Tel est le magnifique résultat qui clôt la deuxième leçon du Livre de G. Kirchhoff.

6. Dans la seconde leçon, G. Kirchhoff a posé les conditions aux limites qui conviennent à la réflexion, à la réfraction et à la diffraction ; l'étude de ces diverses parties de l'Optique fait l'objet des leçons suivantes ; la troisième est consacrée à la réflexion.

En excluant encore certains cas exceptionnels, parfaitement définis, et qui sont ceux où se produira la diffraction par réflexion, Kirchhoff déduit de ses équations toutes les lois bien connues de la marche des ondes réfléchies. Ce n'est pas ici le lieu de rappeler les propriétés géométriques des foyers, que l'on trouvera complètement démontrées dans le Livre dont nous rendons compte. Indiquons seulement un théorème fondamental déjà démontré par Kirchhoff dans son Mémoire de 1882.

Lorsque l'on suit un rayon réfléchi, au moment où l'on passe par un des deux foyers de ce rayon, on voit l'amplitude devenir infinie et la phase varier brusquement de $\frac{\pi}{2}$.

M. Gouy a récemment mis en évidence ce changement de phase. Dans l'expérience des deux miroirs de Fresnel, il remplace un miroir plan par un miroir concave, et il produit les franges d'interférences au delà du foyer de ce miroir. La frange centrale est alors une frange noire. Lors de la dernière exposition de la Société de Physique, tout le monde a pu voir cette belle expérience du savant professeur de Lyon. Mais on a peut-être trop oublié que les calculs de G. Kirchhoff avaient, sur ce point, devancé l'expérience.

La quatrième leçon est consacrée à la réfraction. Dans son Mémoire de 1882, G. Kirchhoff s'était contenté d'indiquer que l'étude de la réfraction pouvait être faite comme celle de la réflexion. Ici, il développe très complètement l'étude de la réfraction. Non seulement il retrouve par ses formules les lois connues de l'Optique géométrique, mais encore il démontre les principales consé-

quences générales de ces lois et, en particulier, les propriétés des lentilles épaisses découvertes par Gauss.

7. Nous avons vu au n° 5 que le théorème général démontré par G. Kirchhoff pour l'intégrale

$$\int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS$$

était en défaut dans deux cas particuliers, d'où deux cas d'exception, et les deux seuls cas d'exception possibles, à la loi de la propagation rectiligne de la lumière. Le premier cas d'exception correspond aux phénomènes de diffraction que Fresnel a découverts; le second aux phénomènes de diffraction que Fraunhofer a observés le premier. Les formules de G. Kirchhoff embrassent à la fois le cas général et les cas d'exception. Aussi Kirchhoff en a-t-il déduit une théorie étendue des phénomènes de diffraction, la seule vraiment logique qui ait été donnée jusqu'ici. C'est l'objet des cinquième, sixième et septième leçons.

Après avoir développé, pour l'étude des phénomènes de diffraction, quelques formules générales, où les rayons qui donnent lieu aux phénomènes de diffraction sont supposés subir un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, Kirchhoff aborde l'étude des phénomènes de diffraction en lumière parallèle, qu'il nomme fort justement phénomènes de Fraunhofer. Il nous est impossible d'insister ici sur les divers cas traités; nous devons nous borner à les énumérer sèchement. Il examine d'abord le cas où l'ouverture lumineuse, unique, est un rectangle éclairé par un point lumineux ou par une ligne lumineuse; puis le cas où cette ouverture a la forme d'un cercle, cas auquel se rattache la théorie de l'irradiation; il démontre enfin que les phénomènes de diffraction produits par une ouverture ou par un écran de même forme que l'ouverture sont liés par un théorème très simple dû à M. Lommel.

L'étude du cas où les ouvertures diffringentes sont en grand nombre fournit à Kirchhoff une théorie complète des réseaux. Toutefois, cette théorie est traversée par une difficulté. Toute la théorie de la diffraction suppose les dimensions des ouvertures très grandes par rapport à la longueur d'onde. C'est une condition qui n'est plus réalisée dans ces réseaux prodigieusement fins que

construisent aujourd'hui d'habiles artistes. Les maxima de lumière ont cependant dans ce cas, l'expérience le démontre, les positions prévues par la théorie ordinaire de la diffraction. Par une analyse directe de ce cas particulier, G. Kirchhoff donne à cet accord une justification théorique.

Après la théorie des réseaux vient une théorie complète des franges de Talbot, terminant l'exposé des phénomènes de diffraction de Fraunhofer.

L'étude des phénomènes de diffraction de Fresnel est limitée aux phénomènes produits par un écran à bords rectilignes ou par une fente à bords rectilignes. Le problème est ramené par une analyse rigoureuse à l'étude des célèbres intégrales de Fresnel. Au lieu de développer les intégrales de Fresnel

$$\int_0^u \cos\xi^2\,d\xi, \qquad \int_0^u \sin\xi^2\,d\xi,$$

en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u, ainsi que M. Ph. Gilbert nous a appris à le faire pour toute valeur de u, Kirchhoff développe en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de u les deux fonctions

$$M(u) = \int_u^{+\infty} \cos(\xi^2 - u^2)\,d\xi, \qquad N(u) = \int_u^{+\infty} \sin(\xi^2 - u^2)\,d\xi.$$

Il donne aussi de remarquables séries *semi-convergentes* qui permettent un calcul rapide de $M(u)$ et de $N(u)$ pour les grandes valeurs positives de u.

8. Les conditions auxquelles est assujetti le mouvement lumineux à la surface qui limite deux milieux transparents ont été données dès la première leçon, du moins sous leur forme générale, et c'est de ces conditions qu'ont été déduites les lois géométriques de la réflexion et de la réfraction. Mais les équations qui lient entre elles l'onde plane incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée renferment certaines constantes qui dépendent de l'angle d'incidence et de la nature de la polarisation de la lumière. Préciser la forme de ces constantes, c'est l'objet de la théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction.

Une première idée se présente : c'est d'admettre la même forme

de conditions aux limites que celle à laquelle on parvient, dans la théorie de l'élasticité, lorsqu'on traite les vibrations de deux milieux *collés* l'un à l'autre. G. Kirchhoff poursuit d'abord les conséquences de cette hypothèse dans un cas particulier : dans le cas où la vibration incidente est rectiligne et perpendiculaire au plan d'incidence. Les conséquences auxquelles on parvient ne peuvent s'accorder avec les faits que si l'on admet l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

Ou bien l'élasticité de l'éther est la même dans tous les milieux, et la vibration lumineuse est alors perpendiculaire au plan de polarisation ;

Ou bien la densité de l'éther est la même dans tous les milieux, et la vibration lumineuse est alors parallèle au plan de polarisation.

Laquelle de ces deux hypothèses faut-il adopter?

Fresnel a adopté la première, mais son opinion se heurte à une grosse difficulté; si l'on admet cette opinion, il n'est pas possible de généraliser la théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction de manière à l'étendre aux milieux cristallisés. Si l'élasticité de l'éther doit être la même dans tous les milieux que dans le vide, qui est isotrope, elle sera, pour tous les milieux, la même dans toutes les directions. Comme d'ailleurs la densité est essentiellement, pour employer le langage d'Hamilton, une quantité *scalaire* et non une grandeur *vectorielle*, que le mot *densité suivant une direction donnée* n'a absolument aucun sens, on voit que l'opinion de Fresnel, si l'on en poursuivait les conséquences, ferait disparaître de l'Optique la notion de milieu anisotrope.

Aussi, lorsque Mac Cullagh et Neumann se sont préoccupés d'étendre à la réflexion de la lumière sur les cristaux la théorie, donnée par Fresnel, de la réflexion de la lumière sur les corps vitreux, ont-ils été tout naturellement amenés à rejeter la première hypothèse et à accepter la seconde. G. Kirchhoff suit leur exemple.

Lorsque, au lieu d'étudier le cas où la lumière vibre normalement au plan d'incidence, on veut étudier le cas où elle vibre parallèlement au plan d'incidence (et l'étude de ces deux cas contient toute la théorie de la réflexion), il n'est plus possible de garder pour les conditions aux limites la forme qui convient, d'après la théorie de l'élasticité, à deux milieux collés l'un à l'autre et soustraits à toute action extérieure. Ces conditions conduisent à des conséquences

incompatibles avec l'expérience. On est donc conduit à chercher des conditions aux limites qui soient identiques aux conditions déjà données dans le cas où la lumière vibre perpendiculairement au plan d'incidence et qui conduisent à des résultats compatibles avec l'expérience dans le cas où la lumière vibre parallèlement au plan d'incidence.

Ces conditions, Kirchhoff les forme et, pour les justifier, il invoque une considération qui, dans une leçon ultérieure, aura une grande importance, la considération des actions que la matière exerce sur l'éther qui la pénètre.

Les conditions trouvées fournissent les formules qui régissent la réfraction et la réflexion de la lumière. Ces formules conduisent, dans le cas où il y a réflexion totale, à des résultats imaginaires qui n'ont plus aucun sens physique. On sait comment Fresnel, interprétant ces résultats imaginaires par une divination dont la puissance égale l'étrangeté, parvint à énoncer une théorie de la réflexion totale vérifiée par la célèbre expérience du parallélépipède.

Ces résultats peuvent être rendus saufs des étranges considérations par lesquelles Fresnel les a obtenus. Les conditions aux limites adoptées dans la théorie de la réflexion supposent essentiellement qu'il n'y a pas de réflexion totale; elles doivent subir une modification, et cette modification, une fois réalisée, conduit sans peine à la théorie de la réflexion totale.

Une fois établies les formules générales qui règlent la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface des substances vitreuses, il devient facile de traiter les divers problèmes qui se rattachent à la théorie de la réflexion et de la réfraction : réflexion et réfraction par une lame à faces parallèles, anneaux colorés de Newton, propriétés de la pile de glace. Kirchhoff consacre une leçon à l'examen complet de ces divers problèmes.

9. Les diverses théories développées dans les leçons que nous venons d'analyser supposent qu'il n'y a pas de perte de force vive dans la propagation du mouvement lumineux; que, par conséquent, les milieux étudiés sont complètement transparents. Elle est loin de rendre compte de tous les phénomènes lumineux; le phénomène de la dispersion dans les milieux transparents, les phénomènes d'absorption, la réflexion métallique, échappent aux prises

de cette représentation trop simplifiée. La dixième leçon est consacrée par G. Kirchhoff à montrer comment une représentation plus complexe peut embrasser tous ces phénomènes.

Le principe de la modification à apporter à la théorie des phénomènes lumineux a été indiquée par Cauchy. Il consiste à compléter les équations aux dérivées partielles du mouvement lumineux en y introduisant certains termes qui représentent l'action de la matière sur l'éther dont elle est pénétrée. G. Kirchhoff expose cette modification en suivant la voie si simple que Helmholtz a indiquée dans son Mémoire célèbre sur la réflexion anormale. G. Kirchhoff traite d'abord, à l'exemple d'Helmholtz, les relations de la dispersion anormale avec l'absorption et le phénomène des couleurs superficielles; puis, d'une manière très simple, il établit les formules de la réflexion métallique données par Cauchy.

10. Cette leçon termine la partie la plus importante du livre, celle qui est consacrée à l'étude des corps isotropes. Les quatre dernières leçons sont un exposé rapide des propriétés optiques des corps cristallisés.

Une leçon expose les lois du mouvement lumineux dans les milieux cristallisés; la théorie de la double réfraction admise par G. Kirchhoff est la belle théorie que Green a édifiée, que Lamé a ensuite retrouvée.

La théorie de la surface d'onde, les constructions des rayons, des plans de polarisation, des vibrations; les phénomènes de la réflexion conique intérieure et de la réflexion conique extérieure sont, dans une seconde leçon, exposés par des procédés analytiques aussi simples que symétriques.

La théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface d'un milieu cristallisé a fait l'objet d'un important Mémoire de G. Kirchhoff. Le sujet traité dans ce Mémoire est repris, d'une manière plus méthodique, dans la treizième leçon.

Enfin, la quatorzième et dernière leçon est consacrée à l'étude des couleurs que présentent les lames cristallines minces placées entre deux nicols.

Cette partie des *Leçons* de G. Kirchoff qui est consacrée à l'étude des milieux cristallisés ne présente pas un ensemble aussi imposant que les dix leçons consacrées aux milieux isotropes. On peut

même y signaler une regrettable lacune : la théorie de la polarisation rotatoire est passée entièrement sous silence. Néanmoins, on peut dire que ces *Leçons,* auxquelles le Maître n'a pu donner le dernier poli, constituent le plus beau commentaire qui ait jamais été fait de l'œuvre de Fresnel.

Qu'il nous soit permis, en terminant ce compte rendu, d'émettre un vœu. Les *Leçons de Mécanique* de Kirchhoff sont parvenues, en Allemagne, à leur troisième édition; elles sont devenues le guide indispensable de quiconque veut étudier la Physique mathématique, et cependant elles n'ont pas encore, en France, trouvé de traducteur. Souhaitons que les *Leçons d'Optique* ne rencontrent pas, dans notre pays, la même indifférence.

P. DUHEM.

LIE (SOPHUS). — VORLESUNGEN UEBER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT BEKANNTEN INFINITESIMALEN TRANSFORMATIONEN. Bearbeitet und herausgegeben von Dr *Georg Scheffers*. Leipzig, Teubner, 1891.

Ce Livre, publié sous l'inspiration de M. Lie, se distingue de son Ouvrage *Sur la théorie des groupes de transformations* par un caractère tout élémentaire. Il a pour but l'application des belles théories de l'illustre géomètre aux équations différentielles, et présente un exposé très simple des notions fondamentales de la théorie des groupes suivi d'une théorie des équations différentielles. La notion d'intégrale de ces équations étant supposée connue, il est à la portée de débutants dont les connaissances mathématiques ne dépassent guère le programme de nos classes de Mathématiques spéciales. L'étude des cas d'intégrabilité des équations différentielles ordinaires du premier ordre y est rattachée à la notion de transformation infinitésimale : une telle équation est intégrable par des quadratures, lorsque sa forme permet de reconnaître *a priori* certaine transformation infinitésimale qu'elle admet; tous les cas d'intégrabilité connus sont présentés de cette manière.

La lecture de l'Ouvrage est facilitée par les nombreux exemples qui suivent chaque théorie, par les démonstrations multiples qui

sont données de chaque proposition capitale et en font ressortir le véritable caractère.

En résumé, ce Livre présente un ensemble de connaissances aujourd'hui indispensables pour l'étude des équations différentielles, et initie à un grand nombre de notions de la théorie des groupes. M. Scheffers annonce, dans sa Préface, son intention de rédiger, dans le même ordre d'idées, une Introduction à la *Théorie des groupes*. Ce sera un utile complément du présent Ouvrage, et le lecteur désireux d'apprendre davantage trouvera dans ces deux Livres une préparation à l'étude plus difficile des *Transformationsgruppen*.

Première Partie. — Après avoir préparé le lecteur aux notions qui suivent par des exemples très simples, l'auteur définit ce qu'il entend par *groupe à un paramètre de transformations ponctuelles d'un plan*. C'est un ensemble de transformations dépendant chacune d'une arbitraire, telles que la suite de deux quelconques d'entre elles, effectuées l'une après l'autre, se ramène à une seule opération du même ensemble.

Les groupes étudiés ici sont, en outre, soumis à la restriction d'avoir leurs *transformations deux à deux inverses*, c'est-à-dire que, si une transformation appartient au groupe, il en est de même de la transformation inverse.

Analytiquement, un tel groupe sera donc défini par des équations de la forme

$$(1) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a), \qquad y_1 = \psi(x, y, a),$$

pouvant aussi s'écrire

$$(1') \qquad x = \varphi(x_1, y_1, \bar{a}), \qquad y = \psi(x_1, y_1, \bar{a}),$$

et telles que, si l'on joint aux équations (1) les équations

$$(2) \qquad x_2 = \varphi(x_1, y_1, b), \qquad y_2 = \psi(x_1, y_1, b),$$

on ait aussi

$$(3) \qquad x_2 = \varphi(x, y, c), \qquad y_2 = \psi(x, y, c),$$

où c est une constante ne dépendant que des arbitraires a et b.

Un tel groupe contient d'abord la *transformation identique*.

c'est-à-dire que, pour une certaine valeur a_0 du paramètre, on a, identiquement

$$(4) \qquad x = \varphi(x, y, a_0), \qquad y = \psi(x, y, a_0).$$

De plus, il contient toujours une *transformation infinitésimale*, c'est-à-dire, transformant un point (x, y) en un point infiniment voisin $(x + \delta x, y + \delta y)$, et défini par des équations de la forme

$$(5) \qquad \delta x = \xi(x, y)\,\delta t, \qquad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t.$$

Réciproquement, une telle transformation (5) appartient toujours à un groupe de la forme étudiée, dont on obtient les équations finies, en intégrant le système

$$(6) \qquad \frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1)} = dt,$$

avec les conditions initiales

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y,$$

pour $t = 0$.

Enfin, remarquant qu'une transformation infinitésimale (5) ne change pas si on y multiplie ξ et η par un même facteur constant et cherchant les relations qu'il doit y avoir entre une telle transformation et une transformation finie (1) du même groupe, on trouve qu'*un groupe à un paramètre avec transformations deux à deux inverses contient toujours une transformation infinitésimale et une seule,* et que, réciproquement, une *transformation infinitésimale arbitraire engendre toujours un tel groupe et un seul.*

Signalons la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} \Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y), \\ W(x_1, y_1) - t = W(x, y), \end{cases}$$

sous laquelle, à l'aide du système (6), se présentent les équations finies du groupe.

On représente une transformation infinitésimale (5) par le symbole Uf

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui définit l'expression $Uf\,\delta t$ de l'accroisement qu'elle donne à

une fonction f; et on emploie les expressions de *groupe* $\mathrm{U}f$, ou de *transformation infinitésimale* $\mathrm{U}f$.

L'expression finie d'une fonction arbitraire de x_1 et y_1 est alors donnée par le développement suivant :

$$f(x_1, y_1) = f(x, y) + \frac{t}{1}\mathrm{U}f(x, y) + \frac{t^2}{1.2}\mathrm{UU}f + \ldots,$$

qui donne en particulier x_1 et y_1 en fonction de x, y et t, c'est-à-dire les intégrales de (6).

D'autre part, si l'on substitue aux variables x, y des variables x', y' définies en fonction de celles-ci, l'expression de la transformation infinitésimale devient

$$\mathrm{U}f = \mathrm{U}x' \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathrm{U}y' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

En particulier, on peut prendre des *variables canoniques*, telles que l'on ait

$$\mathrm{U}x' = 0, \qquad \mathrm{U}y' = 1,$$

ce qui revient à intégrer le système (6). Les équations finies du groupe prendront alors la forme

$$x'_1 = x', \qquad y'_1 = y' + t,$$

ce qui représente une *translation*.

On trouve encore une application de la transformation infinitésimale dans l'étude des *fonctions invariantes*, des *équations invariantes* et *des courbes invariantes* du groupe, qui conduit à ce théorème remarquable :

Pour qu'une fonction, une équation ou une courbe admette toutes les transformations finies du groupe, il faut et il suffit qu'elle admette sa transformation infinitésimale.

Les fonctions invariantes sont les solutions de l'équation $\mathrm{U}f = 0$; une équation $\omega(x, y) = 0$ est invariante si l'on a $\mathrm{U}\omega = 0$, pour $\omega = 0$; enfin, une courbe invariante est ou bien une *trajectoire* du groupe, c'est-à-dire le lieu des positions que prend un point quand on le soumet à toutes les transformations du groupe; ou bien une courbe dont tous les points restent en repos pour toute transformation du groupe. Les premières ont pour équation

$$f = \text{const.},$$

f étant une fonction invariante; et les secondes sont données, s'il y a lieu, par les solutions communes des équations

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0.$$

Deuxième Partie. — La recherche des *faisceaux invariants* de courbes d'un groupe

$$\omega(x, y) = \text{const}$$

conduit à un théorème analogue à celui qui vient d'être énoncé, et se ramène à la résolution de l'équation

$$U\omega = \Omega(\omega),$$

où Ω est une fonction arbitraire de ω. Pour $\Omega = 0$, on a le faisceau des courbes invariantes; dans le cas plus général de faisceau dont les courbes s'échangent entre elles, l'équation précédente se ramène à

$$U\omega = 1.$$

Si le faisceau est celui des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(1) \qquad X\,dy - Y\,dx = 0,$$

ou encore de l'équation équivalente

$$(2) \qquad Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et qu'on sache, *a priori*, que ce faisceau admette la transformation Uf, on a, dans le cas où chaque courbe est invariante en elle-même,

$$X\eta - Y\xi = 0,$$

et cette transformation qu'admet l'équation (1) est dite *banale*.

Dans le second cas, on a les deux relations

$$A\omega = 0, \qquad U\omega = 1,$$

qui permettent d'obtenir par une *quadrature* l'intégrale ω de l'équation, et qui montrent que $\frac{1}{X\eta - Y\xi}$ est un *multiplicateur* de l'équation (1).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1)

admette la transformation Uf, est que l'on ait une relation de la forme

$$(3) \qquad (UA) = U(Af) - A(Uf) = \lambda(x, y)Af,$$

ou

$$\frac{UX - A\xi}{X} = \frac{UY - A\eta}{Y}.$$

Réciproquement, étant donné un multiplicateur M de l'équation (1), on aura une transformation infinitésimale de cette équation, en déterminant ξ et η par la seule condition

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi} = M,$$

ce qui montre que *toute équation différentielle ordinaire du premier ordre admet toujours une infinité de transformations infinitésimales*.

Signalons aussi la forme immédiatement intégrable

$$dy' - F(x')\,dx' = 0,$$

que prend l'équation quand on introduit les variables canoniques du groupe.

Si maintenant on connaît, *a priori*, deux transformations $U_1 f$ et $U_2 f$ de l'équation, la théorie du multiplicateur montre immédiatement que

$$\frac{X\eta_1 - Y\xi_1}{X\eta_2 - Y\xi_2}$$

est une *intégrale de l'équation ou une constante*. Ceci se voit encore, en mettant, ce qui est toujours possible, l'une des transformations sous la forme

$$U_2 f = \sigma(x, y)U_1 f + \rho(x, y)Af,$$

et le criterium (3) montre que σ est *cette intégrale ou cette constante*. Dans ce dernier cas, on dit que *les deux transformations ne sont pas essentiellement distinctes par rapport à l'équation* (1).

Réciproquement, si, partant d'un groupe Uf et de ses équations finies, on forme l'équation générale de ses faisceaux invariants, puis leurs équations différentielles, on saura intégrer cette dernière

par une quadrature, et le résultat est intéressant si le caractère des types obtenus se traduit sur la forme même de l'équation.

Par ce procédé, on obtient ainsi tous les cas d'intégrabilité connus.

Cette seconde Partie se termine par de très intéressantes applications géométriques qui n'offrent rien d'essentiel pour la présente théorie. Notons seulement l'interprétation géométrique qui donne au multiplicateur l'expression suivante

$$M = \frac{\delta t}{\delta s} \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

où δt est infiniment petit, constant le long de chaque courbe intégrale, et δs la distance au point x, y de deux courbes intégrales infiniment voisines.

Troisième Partie. — Après avoir, en suivant la même marche que dans la première Partie, étendu la notion de groupe à un paramètre, et celles qui s'y rattachent, au cas de trois variables, l'auteur associe à la transformation ponctuelle

$$(1) \qquad x_1 = \varphi(x, y) \qquad y_1 = \psi(x, y)$$

la transformation à trois variables suivante

$$(2) \quad x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y), \quad y'_1 = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y'} = \chi(x, y, y'),$$

qui définit le coefficient angulaire y'_1 de la tangente à la courbe transformée. On l'appelle *transformation ponctuelle prolongée*.

De même, si la transformation (1) appartient à un groupe à un paramètre, la transformation (2) appartiendra aussi à un groupe à un paramètre, qui sera le *groupe ponctuel prolongé*.

A la transformation infinitésimale de ce groupe

$$(3) \qquad Uf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

répond la *transformation infinitésimale prolongée*

$$(4) \qquad U'f = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

où

$$\eta_1' = \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{d\eta_1}{dx} - y' \frac{d\xi_1}{dx},$$

avec la convention

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dire alors que l'équation différentielle

$$(5) \qquad \Omega(x, y, y') = 0$$

admet la transformation Uf, c'est dire que cette équation à trois variables (5) admet la transformation $U'f$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est donc que l'on ait

$$U'\Omega = 0$$

pour $\Omega = 0$.

Ce criterium se ramène évidemment à celui trouvé précédemment. Il permet, en outre, de déterminer les équations différentielles qui admettent la transformation Uf, ce qui revient à construire les *équations invariantes du groupe* $U'f$.

Le résultat apparaît nettement si l'on emploie les variables canoniques u et v du groupe Uf, qui lui donnent la forme $\frac{\partial f}{\partial v}$ et qui donnent à l'équation différentielle la forme

$$\frac{du}{dv} - \varphi(u) = 0.$$

Les équations cherchées ont donc la forme

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} y'} - \varphi(u) = 0.$$

Il suffit ainsi de connaître u et v, fonctions de x et y, qui s'obtiennent, comme on l'a vu dans la première Partie, par l'*intégration d'une équation ordinaire du premier ordre suivie d'une quadrature.*

Quatrième Partie. — La quatrième Partie est consacrée aux équations linéaires aux dérivées partielles en général, et aux équations différentielles du second ordre.

L'auteur étend d'abord la notion de groupe au cas de n variables à propos duquel il use, avec un peu trop de réserve, de l'idée d'espace à n dimensions; puis il l'applique à l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{A}f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

qui admet la transformation

$$(2) \qquad \mathrm{U}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait une identité de la forme

$$(3) \qquad (\mathrm{UA}) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{A}f.$$

Alors, *si* ω *est solution de l'équation,* $\mathrm{U}\omega$ *est aussi solution.*

Considérant ensuite plusieurs transformations $\mathrm{U}_1 f$, $\mathrm{U}_2 f$, ... de l'équation (1), on ne regarde comme *distinctes par rapport à cette équation* que celles qui ne sont liées entre elles par aucune relation linéaire de la forme

$$a_1 \mathrm{U}_1 f + a_2 \mathrm{U}_2 f + \ldots + a_k \mathrm{U}_k f + \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{A}f = 0,$$

où les a sont des constantes.

En outre, l'identité de Jacobi

$$((\mathrm{U}_i \mathrm{U}_j)\mathrm{A}) + ((\mathrm{U}_j \mathrm{A})\mathrm{U}_i) + ((\mathrm{A}\mathrm{U}_i)\mathrm{U}_j) = 0,$$

jointe au criterium (3), montre que, si l'équation (1) admet les deux transformations $\mathrm{U}_i f$ et $\mathrm{U}_j f$, elle admet aussi la transformation $(\mathrm{U}_i, \mathrm{U}_j)$, qui pourra être distincte ou non des deux précédentes.

Enfin, parmi les transformations de l'équation (1), $\mathrm{U}_1 f$, $\mathrm{U}_2 f$, ..., $\mathrm{U}_n f$, il pourra y en avoir ρ, qui seront linéairement distinctes entre elles et de $\mathrm{A}f$, les autres ayant la forme

$$\mathrm{U}_{\rho+i} f = u_{i1} \mathrm{U}_1 f + u_{i2} \mathrm{U}_2 f + \ldots + u_{i\rho} \mathrm{U}_\rho f + v_i \mathrm{A}f,$$

où les u et les v sont des fonctions de x. Le criterium (3) montre alors que les u sont des *solutions de l'équation* (1) *ou des constantes.*

De là plusieurs procédés pour déduire, de plusieurs solutions et transformations de l'équation (1), de nouvelles solutions et de

nouvelles transformations. Mais il peut se faire que, à un certain moment, ces procédés ne donnent plus rien de nouveau. Comment alors terminer l'intégration de (1)? C'est un problème qui n'est résolu en partie que plus tard.

Ces considérations se terminent par la formule suivante, qui donne un multiplicateur M de l'équation (1), quand on connaît $n-1$ transformations de l'équation (1)

$$U_j f = \sum_k \xi_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

linéairement distinctes entre elles et de $A f$.

On a

$$\frac{1}{M} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \dots & \xi_{n-1,3} \end{vmatrix}.$$

Passant ensuite aux équations du second ordre

$$(4) \qquad \Omega(x, y, y', y'') = 0,$$

qui admettent une transformation

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x, y), \\ y_1 = \psi(x, y), \end{cases}$$

c'est-à-dire dont les courbes intégrales sont échangées entre elles par cette transformation, on remarque que cela revient à dire que l'équation (4) entre quatre variables admet la *transformation ponctuelle* (5) *deux fois prolongée*

$$(6) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x, y), & y_1 = \psi(x, y), \\ y'_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1} = \chi(x, y, y'), & y''_1 = \dfrac{dy'_1}{dx_1} = \delta(x, y, y', y''). \end{cases}$$

Si la transformation (5) appartient à un groupe (7)

$$(7) \qquad Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

la transformation (6) appartient aussi au *groupe deux fois prolongé* $U''f$

$$(8) \qquad U''f = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} + \eta'(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta''(x, y, y', y'') \frac{\partial f}{\partial y''}.$$

avec

$$\eta_1' = \frac{d\eta_1}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}, \qquad \eta_1'' = \frac{d\eta_1'}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx}.$$

La détermination des équations (4), admettant la transformation (7), se ramène alors à la détermination des équations invariantes de la transformation $U''f$, ou des solutions de l'équation

$$U''f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1'\frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_1''\frac{\partial f}{\partial y''} = 0.$$

On a vu comment on en trouvait, par intégration d'une équation ordinaire du premier ordre, une solution $u(x, y)$ fonction de x et y seulement, puis, par une quadrature, une solution $v(x, y, y')$ fonction de x, y, y'. Enfin, on a une dernière solution

$$w(x, y, y', y'') = \frac{dv}{du} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial y'}y''}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y'},$$

par de simples différentiations.

La forme cherchée est alors

$$\frac{dv}{du} - \Phi(u, v) = 0;$$

u et v étant déterminés, on est donc conduit à une équation du premier ordre entre u et v, puis à une équation

$$f(u, v) = \text{const.},$$

c'est-à-dire, à une équation du premier ordre entre x et y, dont on connaît une transformation Uf.

L'intégration de (4) exige donc, dans ce cas, l'*intégration de deux équations ordinaires du premier ordre, et deux quadratures.*

Signalons, parmi les exemples, l'intégration de l'équation

$$y'' + X_1 y' + X = 0,$$

qui se ramène en posant $u = x$ et $v = \frac{y'}{y}$ à l'équation de Riccati

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + X_1 v + X = 0.$$

et la détermination des transformations infinitésimales qui satis-

font à l'équation $y'' = 0$, ce qui donne ainsi toutes les transformations infinitésimales projectives du plan.

Enfin notons ce fait que, contrairement à une équation du premier ordre, *une équation du second ordre n'admet pas nécessairement de transformations infinitésimales,* et l'introduction de la notion d'*invariants différentiels,* v et w, du premier ordre et du second ordre de la transformation Uf.

L'auteur démontre ensuite qu'*une équation du second ordre admet au plus huit transformations distinctes.* D'autre part, *lorsqu'une telle opération admet les deux transformations* $U_i f$ *et* $U_k f$, *elle admet aussi la transformation* $(U_i U_k)$. Elle admettra donc un nombre fini de transformations distinctes $U_1 f$, $U_2 f$, ..., $U_r f$ satisfaisant à des relations de la forme

$$(U_i U_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} U_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les c_{iks} sont des constantes. Pour des raisons qui ne prennent pas place dans l'Ouvrage, on dit qu'on a ici un *groupe à r paramètres de transformations infinitésimales* dont les constantes c_{iks} définissent la *structure.*

Cette quatrième Partie de l'Ouvrage se termine par l'étude des équations du second ordre, admettant un tel *groupe à deux paramètres.* L'introduction de variables canoniques convenables permet, suivant les cas, de ramener les transformations de ce groupe à l'un des quatre types suivants :

(I) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y},$

(II) $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial y},$

(III) $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y},$

(IV) $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \quad y\dfrac{\partial f}{\partial y},$

et cette réduction ne demande que *deux quadratures au plus,* sauf dans le dernier cas où elle exige l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre.

Cette réduction effectuée, l'équation prend des formes simples

qui sont les suivantes

(I) $$y'' - \varphi(y') = 0,$$
(II) $$y'' - \varphi(x) = 0,$$
(III) $$xy'' - \varphi(y') = 0,$$
(IV) $$y'' - y'\varphi(x) = 0,$$

et dont l'intégration demande au plus deux quadratures.

Envisageant la question à un autre point de vue, l'auteur ramène l'intégration de l'équation générale

$$y'' - \omega(x, y, y') = 0$$

à celle de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0;$$

si la première admet la transformation Uf, la seconde admet la transformation prolongée $U'f$.

Considérant alors en général une équation linéaire

$$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

qui admet d'abord une seule transformation

$$Uf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

on en obtient une première intégrale φ, solution du *système complet*

$$Af = 0,$$
$$Uf = 0,$$

par l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre. La seconde intégrale est définie par une équation du premier ordre avec transformation connue, et s'obtient par une *quadrature*.

Si l'équation $Af = 0$ admet deux transformations distinctes, on aura ses deux intégrales, suivant les cas, sans quadrature, ou par une ou deux quadratures, ou dans un seul cas défavorable, par l'intégration d'une équation du premier ordre.

Cette méthode étant appliquée à l'équation

$$y'' - \omega(x, y, y') = 0.$$

dont on connaît un groupe de deux transformations infinitésimales, le cas défavorable ne se présente pas, et *l'intégrale s'obtient toujours par deux quadratures*.

Telle est, par exemple, l'équation linéaire du second ordre, lorsqu'on connaît deux solutions particulières de l'équation sans second membre.

Cinquième Partie. — Dans la cinquième Partie, qui n'est à vrai dire qu'une esquisse, l'auteur s'occupe des équations du second ordre ayant un groupe de trois transformations infinitésimales $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$. Ici s'introduisent des notions nouvelles de *sous-groupe*, *groupe dérivé, sous-groupe invariant*, à l'aide desquelles on classe ces groupes à trois paramètres. D'abord, des combinaisons linéaires à coefficients constants permettent de donner à ces groupes une *structure caractéristique*. On trouve *six types de structures*.

Pour chacune d'elles, on peut ensuite, en introduisant des variables canoniques, ramener les transformations du groupe à avoir des formes simples, et l'on obtient ainsi treize types distincts. En cherchant enfin par quelles opérations on obtient ces variables canoniques, on trouve qu'il n'est besoin suivant les cas que d'opérations algébriques ou de quadratures, sauf pour un seul type défavorable qui demande l'intégration d'une équation du premier ordre.

Mais ce type ne peut d'ailleurs pas être celui d'un groupe appartenant à une équation du second ordre. Deux types doivent en effet être rejetés par cette raison. Pour chacun des autres, l'équation écrite avec les variables canoniques a une forme bien déterminée, où il ne reste plus de fonction arbitraire, et dont on peut écrire immédiatement l'intégrale générale.

D'ailleurs en ramenant l'intégration, comme dans le Chapitre précédent, à celle de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

admettant trois transformations $U'_1 f$, $U'_2 f$, $U'_3 f$, on évite les quadratures nécessaires pour ramener le groupe à la forme canonique. L'intégration s'obtient par *de simples opérations algébriques*, sauf pour un seul cas qui exige une *quadrature* seulement.

L'Ouvrage se termine par un Chapitre qui indique comment on peut continuer l'application de la méthode à une équation différentielle du troisième ordre ayant des transformations connues et à une équation aux dérivées partielles à quatre variables

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

ayant trois transformations infinitésimales distinctes. L'intégrale générale d'une telle opération s'obtient par *trois quadratures*, sauf dans un cas où elle demande l'*intégration d'une équation de Riccati*.

MÉLANGES.

SUR LA FONCTION $p(u)$.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite)

Par M. Gomes TEIXEIRA.

Vous savez, Monsieur, que, pour établir la théorie des fonctions elliptiques, on peut définir premièrement la fonction $p(u)$ pour certaines valeurs particulières des périodes au moyen de l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce à invariants réels, démontrer ensuite la formule

$$(1) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

où

$$w = 2n\omega + 2m\omega', \qquad \left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

[2ω et $2\omega'$ représentant les périodes de $p(u)$] et enfin généraliser les fonctions elliptiques en prenant ce développement pour définition de $p(u)$ dans le cas où les périodes 2ω et $2\omega'$ représentent deux quantités complexes quelconques dont le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ n'est pas réel.]

Si l'on suit cette voie pour établir la théorie des fonctions elliptiques, il faut tirer du développement (1) les propriétés de la fonc-

tion $p(u)$. On en tire immédiatement que $p(u)$ est une fonction méromorphe pair dont les pôles sont les points $2n\omega + 2m\omega'$, et que l'on a

$$\lim_{u=0}\left[p(u) - \frac{1}{u^2}\right] = 0;$$

et ensuite on voit, au moyen du théorème de Laurent, que, dans les environs du point $u = 0$, on a pour $p(u)$ un développement de la forme suivante

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \ldots.$$

Vous savez, Monsieur, que l'on démontre aussi d'une manière bien facile que la fonction définie par (1) est doublement périodique et que ses périodes sont 2ω et $2\omega'$.

Il ne reste qu'à démontrer l'égalité

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$

et le théorème d'addition. C'est une démonstration bien simple de chacun de ces deux théorèmes que je me propose, Monsieur, de vous présenter.

I. Pour faire voir que la fonction $p(u)$ définie par (1) satisfait à une équation de la forme

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

je remarque premièrement que les fonctions doublement périodiques

$$p'^2(u), \qquad 4p^3(u) - g_2 p(u),$$

lesquelles ont seulement le pôle $u = 0$ dans le parallélogramme des périodes, donnent, dans les environs de ce point,

$$p'^2(u) = \left[-\frac{2}{u^3} + 2a_2 u + 4a_4 u^3 + \ldots\right]^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{8a_2}{u^2} - 16a_4 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} 4p^3(u) - g_2 p(u) &= 4\left[\frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \ldots\right]^3 \\ &\quad - g_2\left[\frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \ldots\right] \\ &= \frac{4}{u^6} + \frac{12a_2 - g_2}{u^2} + 12a_4 + \ldots. \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose

$$12a_2 - g_2 = -8a_2,$$

ce pôle disparaît dans la différence

$$p'^2(u) - [4p^3(u) - g_2 p(u)],$$

et cette différence est holomorphe et doublement périodique, et par conséquent constante.

Nous avons donc

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

en représentant cette constante par $-g_3$.

Pour déterminer g_3 je substitue dans cette égalité $p(u)$ et $p'(u)$ par leurs développements ordonnés suivant les puissances de u et je pose ensuite $u = 0$. Je trouve de cette manière

$$g_3 = 28a_4.$$

Donc $p(u)$ satisfait à une équation de la forme

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

où

$$g_2 = 20a_2, \qquad g_3 = 28a_4.$$

II. Pour faire voir que le théorème d'addition

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right]^2 - p(u) - p(v)$$

subsiste aussi dans le cas général considéré, je vais considérer les deux fonctions

$$\begin{aligned} F_1(u) &= p(u+v)[p(u) - p(v)]^2, \\ F_2(u) &= \tfrac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 \\ &\quad - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2, \end{aligned}$$

qui, en supposant v constante et u variable, sont des fonctions périodiques de u qui admettent les mêmes périodes 2ω et $2\omega'$.

La fonction $F_1(u)$ admet le pôle $u = 0$; et, en substituant $p(u)$ et $p(u+v)$ par les développements

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \ldots,$$

$$p(u+v) = p(v) + u p'(v) + \tfrac{1}{2} u^2 p''(v) + \ldots.$$

où

$$p''(v) = 6p^2(v) - \tfrac{1}{2}g_2 = 6p^2(v) - 10a_2,$$
$$p'''(v) = 12p(v)p'(v),$$

nous avons, dans les environs de ce pôle,

$$F_1(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \cdots.$$

Pour la fonction $F_2(u)$ on obtient de la même manière

$$F_2(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \cdots.$$

Donc le pôle $u = 0$ disparaît dans la différence

$$F_1(u) - F_2(u),$$

et nous avons donc

$$F_1(u) - F_2(u) = c.$$

Pour déterminer c je pose $u = v$ et je trouve

$$F_1(v) = 0, \qquad F_2(v) = 0,$$

et, par conséquent, $c = 0$.

Donc nous avons

$$p(u+v)[p(u) - p(v)]^2 = \tfrac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

et le théorème est démontré.

Porto, octobre 1891.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Dupuis (J.). — *Table de logarithmes à sept décimales d'après Callet, Véga, etc.* Édition stéréotype. 11e tirage. In-8°, XII-580 p. Paris, Hachette et Cie. 8 fr. 50 c.

Eberhard (V.). — *Zur Morphologie der Polyeder.* Gr.-8°, x-245 S. mit Textfig. u. 2 Taf. Leipzig, Teubner. 8 M.

Emmerich (A.). — *Die Brocardschen Gebilde u. ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten u. Kreisen des Dreiecks.* Gr.-8°, XIV, 145 S. m. 50 Fig u. 1 Taf. Berlin, G. Reimer. 5 M.

Hermes (O.). — *Elementaraufgaben aus der Algebra.* 3. Aufl. Gr.-8°, 143 S. Berlin, Winckelmann und Söhne. 1 M. 60 Pf.

Hollander (Eug.). — *Ueber äquivalente Abbildung.* Inauguraldiss. 36 S. Halle.

Jacobi's (C.-G.-J.) *Gesammelte Werke. Herausgeg. auf Veranlassung der k. preuss. Akademie der Wissenschaften.* 6 Bd. Herausgegeben von K. Weierstrass. Gr.-4°, VIII-433 S. Berlin, G. Reimer. 14 M.

Matrot (A.). — *Démonstration élémentaire du théorème de Bachet, tout nombre entier est la somme de quatre carrés au plus.* In-8°, XVI p. Paris, Nony et Cie.

Peche (M.). — *Analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche eine Schaar reeller Parabeln enthalten.* Lex.-8°. Göttingue, Vandenhöck et Ruprecht. 1 M.

Pietzker (F.). — *Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie.* Gr.-8°, VII-110 S. m. 10 Fig. Braunschweig, Salle.

Sack (Pius). — *Ueber Kreisbündel 2. Ordnung.* Inauguraldiss. 32 S. Jena.

Scheffler (H.). — *Beiträge zur Theorie der Gleichungen.* Gr.-8°, III-133 S. m. 1 Taf. Leipzig, Förster. 3 M. 50 Pf.

Stæckel (Paul). — *Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung mittelst Separation der Varianten.* Habilitationsschr. 26 S. Halle.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD. — Traité d'Analyse. T. I. *Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace et ses applications. Développement en séries. Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* In-8°, XII-457 p. Paris; Gauthier-Villars et fils; 1891.

« En publiant ce *Traité d'Analyse*, dit l'Auteur dans sa préface, j'ai pour but principal de développer la partie de mon Cours de la Faculté des Sciences, relative à la théorie des équations différentielles. Cet Ouvrage sera donc surtout un Traité général sur la théorie des équations différentielles à une ou plusieurs variables. Je n'ai cependant pas cru devoir adopter ce dernier titre, et cela pour deux raisons :

» D'abord, quelques-uns de mes auditeurs ayant bien voulu exprimer le regret qu'une partie de mon Cours lithographié de 1886-1887 ne fût pas reproduite, je me suis décidé à publier un Volume préliminaire commençant par les parties les plus élémentaires du Calcul intégral. De cette façon, je ne suppose chez le lecteur aucune autre connaissance que les éléments du Calcul différentiel aujourd'hui classiques dans les Cours de Mathématiques spéciales.

» Un autre motif, d'un caractère tout scientifique, m'engageait encore à garder le titre un peu vague de *Traité d'Analyse* : c'est que la théorie des équations différentielles est intimement liée à plus d'une autre théorie qu'il nous faudra approfondir. Pour ne citer qu'un exemple, l'étude préliminaire des fonctions algébriques est indispensable, quand on veut s'occuper de certaines classes d'équations différentielles. Nous ne nous bornerons donc pas strictement à l'étude des équations différentielles, nous rayonnerons autour de ce centre.

» Je ne me dissimule pas les difficultés de la tâche que j'entreprends. L'activité de la pensée mathématique est aujourd'hui telle, qu'il est peut-être téméraire de chercher à esquisser, sur un sujet aussi vaste, l'état actuel de la Science. Le portrait, à le supposer ressemblant, est destiné, dans quelques parties, à vieillir assez

vite. Mais peu importe si l'on se propose seulement d'être utile, en servant de guide à ceux qui désirent se mettre au courant de l'Analyse moderne et craignent de s'égarer seuls dans la multiplicité des Mémoires remplissant les journaux scientifiques. »

On ne saurait parler d'une façon plus modeste d'une œuvre aussi importante et aussi nécessaire. Cette nécessité, à vrai dire, apparaissait d'autant mieux qu'il y avait quelqu'un que l'on savait capable d'accomplir une tâche qui, par sa grandeur et sa complexité, pouvait effrayer plus d'un savant. Par ses recherches personnelles, par l'étendue de ses connaissances, par la faculté qu'il a de saisir le lien et l'unité des œuvres des autres et de les faire siennes, par l'art consommé avec lequel il expose, par la clarté qu'il sait répandre sur tous les sujets et qui n'est que le reflet de la lumière où il les voit, M. Émile Picard était désigné pour écrire un Traité d'ensemble sur cette partie de la Science, dont les développements sont si variés et si riches : chacun est rassuré sur la façon dont il saura accomplir son œuvre et tous lui savent gré de l'avoir entreprise.

Le premier Volume est, en quelque sorte, un Volume d'introduction et comporte le développement de sujets relativement élémentaires. Il est divisé en trois Parties qui portent les titres suivants : I. Intégrales simples et multiples. — II. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries. — III. Applications géométriques du Calcul infinitésimal.

I. L'Auteur précise la notion d'intégrale définie, dans le cas des fonctions continues; il l'applique aux aires et aux arcs de courbe; il expose d'abord le procédé d'intégration par parties, qui fournit comme application la formule de Taylor et les propriétés fondamentales des polynômes de Legendre, puis les principes de l'intégration par substitution. La notion d'intégrale définie est ensuite étendue aux cas où une limite devient infinie; la règle de Cauchy relative à la convergence des séries fournit une application naturelle. Les conditions sous lesquelles on peut différentier sous le signe $\int$ sont exposées avec soin et, comme conséquence de ce procédé de calcul, on obtient la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

La notion d'intégrale définie s'étend aux fonctions complexes d'une variable réelle; la formule fondamentale qui a servi de point de départ à M. Darboux dans son Mémoire *Sur quelques développements en série* conduit, comme conséquence immédiate, à l'extension de la formule de Taylor au cas d'une telle fonction.

M. Picard passe ensuite aux intégrales indéfinies et étudie spécialement les intégrales des fractions rationnelles, les intégrales hyperelliptiques et les intégrales de différentielles algébriques : la réduction des intégrales hyperelliptiques aux types fondamentaux est présentée en général, et comprend, comme cas particulier, le cas des intégrales elliptiques et celui où le radical porte sur un trinôme du second degré. Les intégrales abéliennes se ramènent facilement aux types

$$\int \frac{P(x,y)}{f'_y}\,dx, \qquad \int \frac{Q(x,y)}{(x-a)^{\alpha} f'_y}\,dx,$$

en désignant par $P(x, y)$, $Q(x, y)$ des fonctions entières de x et de y et par

$$f(x, y) = 0$$

l'équation irréductible et de degré m qui fait dépendre y de x. La réduction des intégrales du second type à des intégrales du premier type, et à d'autres analogues où $\alpha = 1$, est effectuée dans tous les cas où la courbe définie par l'équation précédente n'a pas d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes. Le Chapitre se termine par un exposé rapide des recherches de M. Hermite sur l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$.

Le passage des intégrales définies ordinaires aux intégrales curvilignes de la forme

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

est, en quelque sorte, immédiat. M. Picard pose et résoud de suite la question fondamentale : Quelle condition devront remplir les fonctions P et Q pour que cette dernière intégrale, prise le long d'une courbe quelconque tracée entre deux points arbitraires A et A', ne dépende pas du chemin suivi, mais seulement des coordonnées de ces deux points? Cette question lui fournit l'occa-

sion d'exposer les premiers principes de la méthode des variations ou du moins ce qu'il en faut pour parvenir à la solution. Les intégrales prises le long d'un contour fermé sont l'objet d'une étude particulière, et l'examen des cas où, bien que la condition d'intégrabilité se trouve vérifiée, une pareille intégrale n'est pas nulle conduit, comme application, à la signification de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{F_1\,dF_2 - F_2\,dF_1}{F_1^2+F_2^2},$$

par rapport aux racines du système d'équations

$$F_1(x,y)=0, \qquad F_2(x,y)=0,$$

contenues à l'intérieur du contour d'intégration, et plus particulièrement au théorème de Cauchy sur le nombre de racines d'une équation

$$f(z)=0,$$

contenues à l'intérieur d'un contour.

L'intégrale double est ensuite définie comme limite d'une somme de la forme

$$\Sigma\Sigma f(x_i, y_k)(x_{i+1}-x_i)(y_{k+1}-y_k),$$

et la notion ainsi obtenue, qui généralise d'une façon très naturelle la notion d'intégrale simple, s'élargit par la considération du changement de variables. Le calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

au moyen d'une intégrale double fournit un exemple et, la détermination des volumes et des surfaces, des applications essentielles. On a maintenant tout ce qu'il faut pour définir les intégrales de surface

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy.$$

et, pour ces intégrales, se pose de suite la question analogue à celle qui a été résolue antérieurement pour les intégrales curvilignes : sous quelle condition une telle intégrale ne dépend-elle que du contour qui limite la surface à laquelle elle est étendue? Si cette condition est vérifiée, l'intégrale double peut être remplacée par une intégrale curviligne prise le long du contour : la

belle formule de Stokes en est un exemple intéressant. Une autre application de la théorie des intégrales de surfaces, application que l'Auteur avait préparée en parlant des intégrales curvilignes, conduit au théorème de Kronecker sur la représentation par une intégrale de surface fermée de la différence entre le nombre de solutions de trois équations à trois inconnues

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$$

contenues à l'intérieur de cette surface qui rendent positif le déterminant fonctionnel relatif à F_1, F_2, F_3 et le nombre de celles qui rendent négatif ce même déterminant [1].

D'une sommation double, on passe tout naturellement à une sommation d'un ordre n de multiplicité d'une fonction à n variables; M. Picard traite rapidement de la définition des intégrales triples, donne les formules relatives au changement de variables et examine le cas où la fonction devient infinie ou indéterminée. Il ramène à une intégrale de surface les intégrales triples de la forme

$$\int\int\int\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

et parvient ainsi, comme cas particulier, à la formule de Green.

II. Ces notions générales sur les intégrales simples et multiples, curvilignes ou de surface, si essentielles tant en Mathématiques qu'en Physique, étant acquises, M. Picard en donne la plus belle application possible en développant la théorie de l'équation de Laplace et les propriétés essentielles du potentiel.

Après avoir établi l'équation fondamentale, relative à une fonction V, qui vérifie l'équation $\Delta V = 0$,

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)d\sigma,$$

et en avoir conclu qu'il ne peut exister deux fonctions vérifiant l'équation de Laplace continues, ainsi que leurs dérivées partielles

[1] On sait que, depuis la publication de son Livre, M. Picard a complété de la façon la plus heureuse les résultats de l'illustre géomètre allemand, que la mort vient de frapper.

du premier et du second ordre, à l'intérieur de la surface fermée S, et prenant les mêmes valeurs sur cette surface, il pose la question célèbre, connue sous le nom de *Principe de Dirichlet :* Une telle solution, nécessairement unique, existe-t-elle toujours et comment la déterminer? La propriété de la sphère d'être le lieu des points tels que le rapport de leurs distances r, r_1 à deux points conjugués soit constant permet d'éliminer la dérivée $\frac{\partial V}{\partial n}$ et conduit immédiatement aux formules

$$V(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int V\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{R}{l}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right)d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi R}\int\int\frac{(R^2 - l^2)V\,d\sigma}{(R^2 - 2lR\cos\gamma + l^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où les intégrales se rapportent à la surface de la sphère, dont $d\sigma$ est un élément, et où R, l, γ désignent le rayon, la distance du point $A(a, b, c)$ au centre, et l'angle du rayon OA et du rayon OM qui aboutit en un point de $d\sigma$; on voit aisément que la fonction V, ainsi définie par ses valeurs sur la sphère, satisfait à l'équation de Laplace; pour prouver qu'elle prend effectivement sur la surface de la sphère les valeurs prescrites, M. Picard emploie une méthode analogue à celle que M. Schwarz a fait connaître pour le cas de deux variables. Le principe de Dirichlet est ainsi entièrement établi pour le cas de la sphère.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'étudier l'intégrale

$$V(a, b, c) = \frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma,$$

étendue à une surface fermée quelconque S, et de généraliser les résultats bien connus, relatifs au cas où $\mu = 1$ et dont Gauss a su tirer un si grand parti. La limite supérieure, que l'on doit à M. Neumann, de l'oscillation de la fonction V définie par cette intégrale, lorsque le point a, b, c est situé sur S (supposée convexe), est établie dans le cas où cette surface admet, en chaque point, un plan tangent.

Le principe de Dirichlet, si l'on se borne au cas d'une surface convexe, peut maintenant être établi, dans sa généralité, en suivant une méthode qui ne diffère pas essentiellement de celle de

M. Neumann, récemment publiée par Mme Kowalewsky, d'après les indications de Kirchhoff (¹).

M. Picard passe ensuite à l'étude du potentiel. Il établit, pour le cas d'une masse distribuée dans un volume, les propriétés fondamentales, les conditions de Dirichlet et donne l'application classique au cas de l'ellipsoïde. Il s'occupe du cas où la masse est distribuée sur une surface, et la formule fondamentale

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn},$$

où ρ désigne la densité d'une masse distribuée sur une surface fermée S de façon que l'attraction en tout point intérieur soit nulle, et où $\frac{dV}{dn}$ désigne la limite de la dérivée du potentiel V relative à la normale extérieure pour la surface de niveau S′ extérieure à S et infiniment voisine, lui donne le moyen d'établir que, si l'on considère une famille de surfaces

$$V(x, y, z) = \text{const.},$$

la fonction V satisfaisant à l'équation de Laplace à l'extérieur d'un certain volume P, et s'annulant à l'infini, ainsi que ses dérivées partielles, et les surfaces considérées étant fermées et enveloppant le volume P, l'action d'une couche étalée sur une de ces surfaces, avec une densité qui soit inversement proportionnelle en chaque point à la distance à la surface infiniment voisine, sera nulle sur tout point intérieur, et que les surfaces de niveau seront les surfaces de la famille considérée. Le théorème inverse a été donné par M. Bertrand. En particulier, on retrouve un théorème dû à Poisson, si l'on considère une série d'ellipsoïdes homofocaux, et sur l'un d'eux une matière attirante dont la densité soit en chaque point proportionnelle à la distance du plan tangent en ce point au centre; l'attraction sur un point intérieur est alors nulle, et les surfaces de niveau sont les ellipsoïdes extérieurs. A la fin du Chapitre, M. Picard traite le problème général de la distribution d'une couche sur une surface convexe, de façon que l'attraction soit

(¹) *Acta mathematica*, t. XIV, p. 170.

nulle en tout point intérieur, d'après la méthode élégante dont on est redevable à M. G. Robin.

On entre, avec la théorie des séries, dans un domaine tout différent. L'Auteur reprend les notions fondamentales relatives à l'uniformité de la convergence, à la continuité, à la possibilité d'intégrer ou de différentier terme par terme, ainsi que les théorèmes d'Abel relatifs aux séries ordonnées suivant les puissances entières positives de la variable, que l'Auteur suppose d'abord réelle. Une intéressante remarque, due à M. Appell, montre comment certaines séries, à coefficients positifs, se comportent dans le voisinage de la valeur de x, pour laquelle elles deviennent divergentes. Une règle curieuse, récemment communiquée par M. Hadamard, fournit un renseignement utile sur l'intervalle de convergence d'une série entière.

Les séries trigonométriques sont l'objet d'une étude particulière. M. Picard expose d'abord la belle analyse de Dirichlet; il étudie ensuite la convergence des séries de Fourier, d'abord dans le cas où la fonction $f(x)$, que l'on développe et que l'on suppose satisfaire aux conditions de Dirichlet, reste finie, puis dans le cas où elle devient infinie comme $\frac{1}{(x-x_0)^n}$, $(n < 1)$; il établit l'uniformité de la convergence dans tout intervalle où la fonction ne présente pas de discontinuité. Si l'on reste dans ce cas, il est évident que la fonction ne peut se développer que d'une seule manière en série trigonométrique, mais si l'on en sort, on rencontre de suite la question : une série trigonométrique convergente, mais non uniformément, peut-elle représenter zéro sans que les coefficients soient nuls? M. Picard expose les recherches de M. Cantor à ce sujet, ainsi que les importants théorèmes que Riemann a donnés au début de son célèbre Mémoire sur les séries trigonométriques, théorèmes qui sont, avec une remarque due à M. Schwarz, le fondement de la démonstration de M. Cantor.

L'intégrale de Poisson

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi$$

se rattache évidemment à la théorie des séries trigonométriques, puisque, si on la développe en une série procédant suivant les

puissances entières de r, assurément convergente quand r est plus petit que 1, la somme de cette série, en vertu du théorème d'Abel, s'approche indéfiniment de $f(\varphi)$ quand on fait tendre r vers l'unité, φ restant fixe, au moins si l'on suppose que $f(\varphi)$ soit développable en série de Fourier. M. Picard, en suivant la marche que M. Schwarz a fait connaître, étudie directement l'intégrale de Poisson, de façon à parvenir à la limite dont elle s'approche quand on fait tendre suivant une direction déterminée, vers un point du cercle de rayon 1, le point dont les coordonnées polaires sont r et φ. Quoique la considération de l'intégrale de Poisson ne paraisse pas devoir conduire à une démonstration de la série de Fourier, M. Picard montre qu'elle permet d'obtenir les beaux résultats de M. Weierstrass sur la possibilité de représenter, avec une approximation donnée, une fonction donnée, soit au moyen d'une série de Fourier limitée, soit par un polynôme. On sait que M. Weierstrass a déduit de là le moyen de représenter par une série de polynômes, absolument et uniformément convergente dans un intervalle (α, β), toute fonction continue dans cet intervalle. M. Picard montre, en terminant, comment ces considérations peuvent s'étendre à des fonctions de deux ou de plusieurs variables : l'intégrale de Poisson est alors remplacée par l'intégrale déjà considérée

$$I = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}}f(\theta',\psi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi',$$

et les fonctions de Laplace jouent un rôle analogue à celui des expressions $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Relativement aux séries à entrée multiple, M. Picard généralise la règle de convergence donnée par Cauchy pour les séries simples à terme positif. Cette règle s'applique aisément aux séries dont le terme général est de la forme

$$\frac{1}{[f(m_1, m_2, \ldots, m_p)]^{\alpha}},$$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ étant une forme quadratique définie et positive.

Un exemple intéressant de série double est donné par le développement, absolument et uniformément convergent, en série trigonométrique double d'une fonction $f(x, y)$ continue, ainsi que

ses dérivées partielles des quatre premiers ordres, et jouissant de la propriété définie par les équations

$$f(x+2\pi, y) = f(x, y), \qquad f(x, y+2\pi) = f(x, y).$$

Les fonctions elliptiques fournissent d'autres exemples essentiels; M. Picard reproduit aussi un exemple de fonction à deux variables, quadruplement périodique qu'il avait donnée, il y a deux ans, dans le *Bulletin de la Société mathématique;* cette fonction est la somme de la série double

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{x+m\alpha+n\beta}}{(1+e^{x+m\alpha+n\beta})^2}\,\frac{e^{y+m\alpha'+n\beta'}}{(1+e^{y+m\alpha'+n\beta'})^2},$$

où α, β, α', β' sont des nombres réels, tels que le déterminant $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ soit différent de zéro; en la transformant un peu, on en obtient un élégant développement en série trigonométrique double. Il reproduit aussi un exemple très simple de série multiple, étendue non plus à tous les systèmes de nombres entiers, mais bien aux substitutions d'un certain groupe, qui permet de former des fonctions de deux variables, analogues aux fonctions thétafuchsiennes d'une variable que M. Poincaré a fait connaître. Cette série est un cas particulier de celles qu'il a considérées dans son Mémoire *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires* (*Acta mathematica,* t. I, p. 297) (¹).

III. Pour ce qui est des applications géométriques, l'Auteur traite d'abord des enveloppes, des surfaces réglées, des congruences et des complexes de droites. La surface réglée du troisième ordre fournit un exemple intéressant; pour les congruences, M. Picard donne les propriétés essentielles de la surface focale, et le théorème de Dupin sur la condition pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface, théorème qui trouve son application immédiate dans la théorie des lignes de courbure. Après avoir défini les complexes de droite, il indique les propriétés fondamentales du complexe linéaire, et montre en particulier que les tangentes d'une cubique gauche appartiennent à un tel complexe.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 148.

La théorie du contact et de la courbure des courbes planes et gauches est exposée avec les développements qu'elle comporte : nous signalerons dans ce Chapitre la démonstration des formules de M. Cayley sur les courbes gauches algébriques, analogues aux formules de Plücker pour les courbes planes, et d'une propriété caractéristique des courbes unicursales d'ordre n dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, courbes dont l'étude a été l'objet de la thèse de M. Picard. Celui-ci expose ensuite les formules de Frenet, dont une proposition de M. Bertrand sur les courbes pour lesquelles il y a une relation linéaire entre la courbure et la torsion lui fournit une belle application, les théorèmes classiques sur la courbure des sections planes d'une surface, les propriétés fondamentales des lignes de courbure, les théorèmes de Joachimsthal et de Dupin. L'étude des surfaces enveloppes d'une sphère, et en particulier de la cyclide de Dupin, fournit une belle application de la théorie des lignes de courbure. Les lignes asymptotiques, en raison de leur caractère projectif, offrent un intérêt particulier. Signalons l'exemple, dû à M. Jamet, des surfaces qui ont une équation de la forme

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = F(z),$$

la recherche des secondes lignes asymptotiques d'une surface réglée, qui permet d'appeler l'attention sur la propriété fondamentale de l'équation de Riccati, et le cas particulièrement intéressant où les génératrices de cette surface appartiennent à un ou à plusieurs complexes linéaires.

L'expression du carré de l'élément d'arc sur une surface conduit immédiatement à la notion de surfaces applicables. Comme exemple, M. Picard cite les surfaces dont le ds^2 est de la forme $E\,du^2 + G\,dv^2$, E et G ne dépendant que de u. Ces surfaces sont applicables sur une surface de révolution convenablement choisie ; il passe ensuite aux surfaces développables, considérées comme applicables sur le plan.

La notion de la représentation d'un plan se rattache naturellement à la considération du carré de l'élément d'un arc sur le plan. A propos de cette représentation, l'Auteur donne quelques indications sur les courbes isothermes et montre, en particulier, qu'une

transformation qui conserve les angles transforme une famille de courbes isothermes en une autre famille de courbes isothermes. Il étudie ensuite les substitutions linéaires de la forme $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ et, en particulier, celles pour lesquelles on a $ad - bc = 1$, ainsi que le groupe discontinu formé par des substitutions de cette dernière forme, où a, b, c, d sont des entiers réels. La considération de ce groupe discontinu conduit à partager le demi-plan en un nombre infini de triangles; M. Picard développe, en le rattachant au problème de la réduction des formes quadratiques, cet intéressant résultat, qui donne au lecteur une ouverture dans le domaine de la théorie des fonctions modulaires; la substitution à une forme quadratique ordinaire définie et positive, d'une forme définie et positive à indéterminées conjuguées, permet d'obtenir des substitutions qui transforment le demi-espace en lui-même, comme les substitutions précédentes transformaient le demi-plan en lui-même (1).

Enfin, le problème de la carte, et son application au cas de la sphère et de l'ellipsoïde terminent ce premier Volume.

J'ai essayé d'indiquer, dans l'analyse qui précède, comment M. Picard, pour chaque théorie, va droit à ce qui est essentiel, montre ce qu'elle a de général et choisit, pour l'illustrer, les exemples les plus intéressants et les plus instructifs; ceux qui étudieront son Livre sauront avec quelle clarté les théories peuvent être exposées, avec quel art les exemples peuvent être traités.

J. T.

---

(1) *Voir* dans le *Bulletin de la Société mathématique pour* 1884, p. 43, le Mémoire de M. Picard, *Sur un groupe de transformation des points de l'espace situés du même côté d'un plan* (*Bulletin*, X_2, p. 134).

MÉLANGES.

LES MATHÉMATIQUES AUX INDES ORIENTALES;

PAR M. LÉON DELBOS,
Professeur à l'École Navale anglaise.

Nous autres Européens, nous avons une si haute idée de notre intelligence et de notre savoir, qu'il est quelquefois utile que l'on nous remette en mémoire ce que nos ancêtres ont accompli dans le domaine de l'intelligence, surtout en Asie et en Égypte.

Rien ne saurait être plus intéressant que de se reporter, par la pensée, à ces siècles que nous appelons *siècles de ténèbres*, quoique cette appellation ne soit exacte que lorsque l'on s'en sert pour désigner l'état de l'Europe d'il y a cinq, six ou dix siècles et que l'on ne saurait l'appliquer aux contrées habitées, à cette époque reculée, par les Hindous et les Arabes.

Nous devrions nous souvenir que, à une époque où l'Europe était plongée dans l'ignorance, les Indiens, les Arabes et autres peuples de l'Orient, avaient fait d'immenses progrès dans la Littérature, les Arts et les Sciences.

Le but que je me propose dans cet article est de faire voir que, à une époque où l'Europe ne savait absolument rien des Sciences mathématiques, les Hindous y avaient déjà fait des progrès assez considérables.

L'un des Ouvrages les plus curieux de la littérature scientifique de l'Inde et, en même temps, le plus intéressant, est sans contredit le BIJAGANITAM.

Le nom de ce livre est formé des deux mots *Bija*, graine, et *Ganitam*, computation. Il signifie donc computation au moyen des opérations de l'Arithmétique. Nous pourrions dire aussi qu'il signifie l'art de *compter les graines*.

Ce livre est dû au fameux mathématicien Indien BHASKARA ACHARYA, qui naquit à Biddour, dans le Dekkan, en l'an 1036 de *Salwahana*, c'est-à-dire vers l'an 1114 de notre ère.

Nous devons au même auteur le célèbre LILAVATI, ou traité sur l'Algèbre et la Géométrie, et le SIROMANI qui est un Ouvrage sur l'Astronomie.

Nous ne nous occuperons pas de ce dernier, qui est loin de présenter le même intérêt que les deux premiers.

L'origine du LILAVATI est si poétique et si peu connue, en Europe, que nos lecteurs nous pardonneront, sans doute, de la leur raconter aussi brièvement que possible.

Bhaskara avait une fille du nom de Lilavati. Ayant remarqué que l'étoile qui se levait au moment de la naissance de son enfant indiquait, d'une façon à ne pas s'y méprendre, qu'elle était destinée à rester fille, Bhaskara, afin de contrarier le destin, choisit une heure propice pour marier sa fille afin qu'elle fût bien et dûment liée par les liens de l'hymen et qu'elle eût des enfants.

Quand l'heure choisie fut presque arrivée, Bhaskara fit venir près de lui sa fille et son futur gendre.

Il prit le petit cylindre perforé dont on se servait alors aux Indes pour indiquer les heures du jour. Ce cylindre est percé d'un petit trou à la partie inférieure. On le place dans un vase qui contient de l'eau. Cette eau pénètre peu à peu par l'orifice pratiqué au fond du cylindre, jusqu'à ce que le poids de l'eau qui y a pénétré le fasse enfoncer complètement dans le liquide. Avant de placer son cylindre sur l'eau, Bhaskara avait eu recours à l'un des plus célèbres astrologues de l'époque, afin que les deux jeunes gens pussent être unis à l'instant précis où le cylindre s'enfoncerait dans l'eau du vase inférieur.

Malheureusement, Bhaskara avait compté sans la destinée et les choses ne se passèrent pas tout à fait comme il l'avait prévu.

Lilavati, curieuse comme toutes les filles d'Ève, voulut voir l'eau entrer par le petit trou du cylindre. Elle s'approcha du vase et ne remarqua pas qu'une des perles de sa robe de mariée s'était détachée et était tombée dans le cylindre.

Cette perle alla juste dans l'ouverture du cylindre et, étant trop large pour pouvoir passer à travers, elle ferma l'issue et empêcha l'eau de pénétrer dans le cylindre qui, dès lors, resta sans s'enfoncer à la surface du liquide.

L'heure propice se passa pour ne plus revenir.

Le père fut bien peiné de ce fâcheux contretemps, mais, en sage qu'il était, il reconnut l'inutilité de lutter contre le destin.

Ce fut alors qu'il se tourna vers sa fille à laquelle il dit ces mots :

« J'écrirai un livre qui portera ton nom et qui vivra dans les siècles à venir. Une bonne renommée est une seconde vie et la base de la vie éternelle. »

Avant de faire l'examen du livre de Bhaskara, nous allons entrer dans quelques détails sur les écoles de l'Inde et sur la manière dont on y enseigne l'Arithmétique, à l'heure actuelle. Il va sans dire que nous ne parlons pas des écoles européennes, mais, tout simplement, des écoles indigènes.

Quand un petit Hindou va à l'école, pour la première fois, il accomplit la cérémonie religieuse connue sous le nom de *Pati Pouja*, ou rite de la planchette à écrire.

Cette planchette à écrire est couverte de Goulal (*Euphorbia tirucalli*), sur lequel on dessine une effigie de *Sarasvati*. Cette déesse de la science est fille de Brahma et épouse de Vishnou. Tout Hindou qui sait lire et écrire ne manque pas de célébrer son culte, le cinquième jour de la lune de janvier ou février.

On couvre l'effigie de la déesse de parfums, de riz, de sucre, de noix de bétel, de feuilles de palmier et de fleurs; puis on place, à côté, de l'encens que l'on fait brûler dans une cassolette de cuivre, et une lampe dont on parfume la flamme avec du camphre.

L'élève fait don de toutes ces choses au maître d'école, à qui il donne aussi une somme d'argent, un turban et autres présents, selon la position de ses parents.

Le maître distribue le riz, le sucre, les noix de bétel et les fleurs aux autres écoliers, puis le nouvel élève se prosterne devant la planchette sur laquelle est l'effigie de Sarasvati. Le maître écrit alors sur cette planchette les mots sanskrits *Shri Ganesayanama Om!* c'est-à-dire : « Salut à toi, Ganesa, Om! » (¹).

La planchette dont nous venons de parler a environ $0^{m},30$ de longueur sur $0^{m},20$ à $0^{m},22$ de largeur. Dans quelques parties de l'Inde on se sert d'autres matières colorantes. On trouve des planchettes peintes en noir ou en blanc et, pour les commençants,

(¹) Ganesa est le dieu de la sagesse. On le représente avec une tête d'éléphant. C'est le Janus Indien.

Om! Ce mot commence toutes les prières indiennes. Il est formé des lettres A, U, M, mais, comme, selon les règles phonétiques du sanskrit, A + U devient O, le mot AUM devient OM. Ce mot est le symbole de la Triade ou Trinité indienne : Brahmà, Vishnou et Siva.

il n'est pas rare que l'on saupoudre tout simplement la planchette de brique pulvérisée ou de sable. On trace alors les caractères ou les chiffres comme on le ferait dans l'allée sablée d'un jardin. D'autres fois on emploie de la farine colorée avec du pourpre. Les planchettes peintes en noir sont pour les élèves plus avancés. On y trace les lettres, avec de la craie mélangée d'eau.

Pour tracer les caractères sur ces planchettes on se sert d'un roseau convenablement taillé et que l'on permet à l'élève de tenir de la manière qu'il trouvera la plus commode. En général il conserve cette manière pendant tout le cours de son existence. C'est peut-être à cause de cela que les Hindous, comme presque tous les peuples de l'Orient, écrivent beaucoup mieux que les Européens.

L'élève, muni de sa planchette et de son roseau, apprend les lettres en commençant par les voyelles. De là il passe aux consonnes, puis aux combinaisons de consonnes et de voyelles [1].

De plus, on le place à côté d'un autre élève dont les études sont plus avancées. Cet élève devient, en quelque sorte, un second maître. Il est de son devoir de s'assurer que son condisciple travaille bien et de l'aider. Si le jeune élève ne s'acquitte pas convenablement de sa tâche, c'est à son condisciple, plus avancé, à en instruire le maître. La tâche du maître consiste donc principalement à s'assurer que tout le monde s'acquitte consciencieusement de son travail.

De temps en temps il pose des questions et fait répéter, à haute voix, à tel ou tel élève, ce qu'il est supposé avoir appris.

Ce système donne d'excellents résultats pour l'enseignement primaire.

Quand l'élève écrit suffisamment bien, il commence l'étude des nombres.

Cette étude commence nécessairement par celle des dix premiers nombres : 1, *ek;* 2, *do;* 3, *tîn;* 4, *châr;* 5, *pânch;* 6, *chhah;* 7, *sâth;* 8, *âth;* 9, *nau;* 10, *dasa.*

Quand il sait bien ces dix premiers nombres il apprend ceux de

[1] Cela n'a lieu que dans les parties de l'Inde où l'on se sert des lettres dites Devanagari. Dans les endroits où l'on se sert de l'alphabet arabe, on apprend les lettres d'après l'ordre qu'elles ont dans cet alphabet, c'est-à-dire *a, b, p, t,* ....

10 à 20 de la manière suivante :

1 devant	1	fait	11	
1	»	2	»	12
1	»	3	»	13

et ainsi de suite jusqu'à 20.

A partir de 20 il dit :

2 devant	0	fait	20	
2	»	1	»	21
2	»	2	»	22

jusqu'à ce qu'il arrive à cent.

Une fois qu'il connaît bien ces nombres il apprend le *Pare*, ou table de multiplication, qui consiste à multiplier les dix premiers nombres jusqu'à 30, et même quelquefois jusqu'à 100.

Après le *Pare* vient le *Pouke* ou table des quarts; puis le *Nimke*, table des demies, et le *Pounke*, table des trois quarts.

Ces tables sont suivies du *Sawake* ou table de $1\frac{1}{4}$; du *Deike*, table de $1\frac{1}{2}$; du *Arizke*, table de $2\frac{1}{2}$; et du *Outke*, table de $3\frac{1}{2}$. On ajoute généralement à ces tables celles de *Akarke* ou table de 11 et la table des carrés nommée *Ekotri*.

Toutes ces tables s'apprennent par cœur. Du reste, il en est à peu près de même de tout le reste dans les écoles indigènes de l'Inde. De plus, tout se répète à haute voix.

Il n'y a donc rien d'étonnant que la mémoire des Hindous soit excellente.

Ces tables se répètent de la manière suivante :

Une	fois	$\frac{3}{4}$	font	$\frac{3}{4}$
Deux	»	$\frac{3}{4}$	»	$1\frac{1}{2}$
Trois	»	$\frac{3}{4}$	»	$2\frac{1}{4}$

Ce n'est que lorsque l'élève sait parfaitement toutes ces tables qu'il apprend les poids et mesures et qu'il commence les règles ordinaires de l'Arithmétique.

A la fin de la journée de classe le maître fait répéter quelques unes des tables par tous les écoliers. Tous les élèves se tiennent debout. Le maître en fait avancer un, qui se place en face de ses condisciples, et qui répète les tables, à haute voix.

Tous les écoliers répètent immédiatement après lui.

Le maître choisit, généralement, pour cet exercice l'un des élèves les plus intelligents et les plus avancés de la classe.

C'est ce système qui permet aux Hindous de faire plusieurs opérations arithmétiques, sans autre secours que la mémoire.

J'en ai vu qui pouvaient faire des règles de trois composées, mentalement, et en fort peu de temps. Quant aux additions et aux soustractions de fractions, il est bien rare qu'un Hindou instruit ne puissent les faire mentalement.

Cela dit, nous allons maintenant donner quelques détails sur les différentes manières de faire les opérations ordinaires de l'Arithmétique.

Arithmétique.

De l'addition. — Cette opération se fait quelquefois comme chez nous, mais cela est fort rare. En général, la méthode indienne diffère de la nôtre.

Pour rendre ce mode d'opérer plus clair, nous allons prendre un exemple.

Soit à additionner

```
   2 4 3 1
   2 1 4 6
   7 8 2 3
   6 1 4 2
 ---------
 1 8 5 4 2
 ---------
 1 7 4 3 2
```

En commençant par la gauche, nous dirons : 2 et 2 font 4, et 7 font 11, et 6 font 17. Nous écrirons 17 au-dessous du total définitif.

Passant à la deuxième colonne de gauche, nous continuerons comme pour l'autre colonne en disant : 4 et 1, 5 et 8 font 13, et 1 font 14. Nous écrirons le 4 de 14 à côté du 17 du total et nous ajouterons les dizaines au nombre 17 ce qui nous donnera 18 que nous écrirons à la place du total définitif et nous continuerons l'opération jusqu'à la fin, de la même façon.

De la soustraction. — La soustraction se fait d'une manière qui diffère aussi de la nôtre.

Quand les chiffres à soustraire sont tous plus petits que ceux dont on doit les soustraire, l'opération ne présente pas la moindre difficulté.

Nous devons cependant faire remarquer que les Hindous placent toujours le nombre à soustraire *au-dessus* du nombre dont on soustrait.

Ainsi, si nous avions à soustraire 15 de 55, nous écririons les nombres comme ci-dessous

5 5
1 5

tandis qu'un Hindou les écrirait

1 5
5 5

Quand les chiffres à soustraire sont plus forts que ceux dont on les soustrait, on procède de la manière suivante qu'un exemple rendra claire.

Soit à soustraire 367 de 54132.

On écrira les nombres, comme il a été dit, en mettant le plus petit au-dessus du plus grand.

3 6 7
5 4 1 3 2
5 3 7 6 5

Comme on ne peut soustraire 7 de 2, on empruntera dix unités à la colonne suivante et l'on soustraira 7 de 10, ce qui donnera 3, chiffre auquel on ajoutera le 2 et l'on écrira le total 5 à la place convenable. On reportera les dix unités empruntées à la colonne suivante, ce qui donnera 7, qu'on devra soustraire de 3.

Nous dirons, comme précédemment, 7 de 10, reste 3, plus 3 font 6, et nous écrirons le 6 à sa place définitive.

Faisons remarquer, en passant, que cette méthode est excellente et que, quoiqu'on ne l'enseigne pas en Europe, j'ai vu néanmoins des Anglais, qui n'avaient jamais été aux Indes, ou autres parties de l'Orient, faire leurs soustractions de cette manière.

Avant de passer à la multiplication, nous allons donner une addition et une soustraction copiées sur la planchette même d'un écolier Hindou.

On verra la manière dont on dispose les chiffres.

Addition.

		4	3	2	0	1	4
		6	1	3	1	4	2
				6	8	1	9
		3	2	1	4	7	1
Total.	1	3	6	2	3	3	6
			0	1	1	1	1

ce qui nous donne pour total définitif 1 373 446, puisqu'on devra reporter les retenues de la dernière ligne à la colonne de gauche du vrai total. C'est-à-dire que les quatre 1 se reporteront respectivement sur les chiffres 6, 2, 3, 3 du total qui deviendront 7, 3, 4, 4.

Soustraction.

		1	1	1	1		
Nombre à soustraire			1	3	9	7	
de	4	6	0	3	9	6	
	4	5	8	9	9	9	est la différence.

De la multiplication. — Cette opération se fait de plusieurs manières. On choisit la plus commode.

Soit à multiplier 385 par 12.

On écrira, comme nous le faisons, le multiplicateur au-dessous du multiplicande, mais on aura soin que le dernier chiffre du multiplicateur soit placé au-dessous du dernier chiffre à gauche du multiplicande.

	3	8	5
1	2		
3	6		
	9	6	
		6	0
4	6	2	0

On multipliera chaque chiffre du multiplicande par 12, en arrangeant les produits comme nous l'avons fait ci-dessus.

S'il n'est pas commode de multiplier par le multiplicateur, alors on multiplie tout le multiplicateur par chacun des chiffres du multiplicande, en arrangeant l'opération comme ci-dessous.

Soit à multiplier 385 par 61 :

```
    3 8 5
  6 1
---------
1 8 3
  4 8 8
    3 0 5
---------
2 3 4 8 5
```

Ce système présente certains avantages. Il a pour lui la clarté et, de plus, il est souvent possible de simplifier l'opération en multipliant par deux chiffres à la fois. Aussi dans l'exemple que nous allons donner, après être arrivé au 9 du multiplicande, on pourra multiplier par 12 ce qui nous donnera de suite 28 980, au lieu des deux lignes 2415 et 4830. Il faudra avoir soin de placer le zéro sous le 2 du multiplicande.

Soit à multiplier 67 891 234 par 2415.

```
        6 7 8 9 1 2 3 4
  2 4 1 5
-----------------------
1 4 4 9 0
  1 6 9 0 5
    1 9 3 2 0
      2 1 7 3 5
          2 4 1 5
            4 8 3 0
              7 2 4 5
                9 6 6 0
-----------------------
1 6 3 9 5 7 3 3 0 1 1 0
```

Quelquefois les Hindous divisent le multiplicateur en deux autres nombres, dont la somme est égale au multiplicateur. Ainsi $12 = 4 + 8$ ou $6 + 6$ ou $3 + 9$.

Dans ce cas, on multiplie le multiplicande séparément par chacun des nombres et l'on ajoute les deux résultats ensemble.

Ainsi 385 à multiplier par 12 nous donnera, en prenant $12 = 4 + 8$,

$$\begin{aligned} 385 \times 4 &= 1540 \\ 385 \times 8 &= 3080 \\ \hline &\ 4620 \end{aligned}$$

qui sera le produit de 385 par 12.

Quelquefois on se sert aussi des facteurs du multiplicateur.

Quand le multiplicateur se compose de 4, ou de plus de quatre chiffres, on fait la multiplication en multipliant tous les chiffres du multiplicande, en commençant par la *droite,* par chacun des chiffres du multiplicateur, en commençant par la gauche.

Soit à multiplier 23 578 912 par 110 512.

```
2 3 5 7 8 9 1 2
1 1 0 5 1 2
-----------------------
2 3 5 7 8 9 1 2
  2 3 5 7 8 9 1 2
    1 1 7 8 9 4 5 6 0
        2 3 5 7 8 9 1 2
          4 7 1 5 7 8 2 4
-----------------------
2 6 0 5 7 5 2 7 2 2 9 4 4
```

Il est évident qu'on aurait pu abréger l'opération en multipliant par 11 et par 12, en une seule ligne, au lieu de multiplier par chaque chiffre séparément. C'est du reste ce qui se fait dans la pratique. De cette façon, on réduirait l'opération à la forme suivante :

```
2 3 5 7 8 9 1 2
1 1 0 5 1 2
-----------------------
2 5 9 3 6 8 0 3 2
    1 1 7 8 9 4 5 6 0
        2 8 2 9 4 6 9 4 4
-----------------------
2 6 0 5 7 5 2 7 2 2 9 4 4
```

De la division. — Les Hindous arrangent les nombres de la façon suivante.

On écrit d'abord le dividende, au-dessous duquel on place le diviseur. Le quotient se met à droite du diviseur et les différents restes se placent au-dessus du dividende.

Supposons qu'on demande de diviser 120 528 par 372.

L'opération sera disposée comme suit :

	1 4 8 8	
	1 4 8 8	
	7 4 4	
	8 9 2 8	
	1 1 1 6	Produit du diviseur par le 1[er] chiffre du quotient
Dividende.	1 2 0 5 2 8	Quotient 324
Diviseurs.	3 7 2	
»	3 7 2	
»	3 7 2	

Ceci demande quelques mots d'explication. On trouvera d'abord le premier chiffre du quotient, comme nous le faisons, puis on multipliera le diviseur par ce chiffre et l'on écrira le produit au-dessus du dividende. Alors seulement on fera la soustraction et, au lieu d'abaisser le chiffre suivant du dividende, à côté du reste, on écrira, au-dessus, tous les chiffres restants, c'est-à-dire 8928 et l'on continuera l'opération comme on l'a commencée, toutefois en écrivant le diviseur autant de fois qu'il sera nécessaire de diviser.

Des fractions.

Nous n'avons que très peu de remarques à faire sur ce sujet.

La réduction des fractions au même dénominateur, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division de fractions se font, à très peu de chose près, comme chez nous. La seule particularité à noter, c'est que les Hindous ne se servent pas du trait pour séparer le numérateur du dénominateur. Ainsi, un Hindou écrira $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$, au lieu de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

De la racine carrée.

La racine carrée s'extrait d'une façon qui diffère peu de celle usitée en Europe. La plus grande différence, c'est qu'au lieu de diviser le nombre en périodes de deux chiffres, au moyen du point, l'Hindou se sert de deux traits : l'un perpendiculaire pour marquer les chiffres de rang impair, à partir de la droite, et l'autre, horizontal, pour marquer ceux de rang pair.

Ainsi, s'il s'agissait de chercher la racine carrée du nombre 3 154 756, au lieu de se servir du point, on écrirait ce nombre comme suit :

3 1 5 4 7 5 6

Telles sont les principales règles de l'Arithmétique contenues dans le Traité de Bhaskara.

Ajoutons que ce mathématicien semble avoir été l'un des premiers à répandre les sciences mathématiques aux Indes et que ses méthodes sont encore celles que l'on suit le plus communément, aujourd'hui même, dans les écoles indigènes.

De la Géométrie.

Comme nous l'avons dit au commencement de cet article, Bhaskara est aussi l'auteur d'un traité de Géométrie et d'Algèbre.

Il est inutile de nous étendre sur ces Ouvrages dont les méthodes ressemblent, en bien des points, à celles dont nous nous servons aujourd'hui.

Les ouvrages de Bhaskara sont surtout intéressants au point de vue de la similitude des méthodes actuelles et de celles d'autrefois. Il est bon aussi de faire voir que les anciens Hindous n'étaient pas, comme on l'a cru trop longtemps, une race d'ignorants.

Pour l'Européen, il y a là une révélation sur laquelle il est bon de s'appesantir, parce qu'un examen, même succinct, des livres mathématiques des Hindous lui démontrera que les lumières actuelles de l'Europe ont été précédées d'autres lumières et que, si nous avons fait progresser les Sciences, les Orientaux sont les pionniers qui ont ouvert la voie.

Rien de plus curieux, par exemple, que de trouver dans le texte du *Lilavati* les règles suivantes qui, bien qu'elles y soient données sans démonstration, n'en sont pas moins exactes pour cela.

Problème I. — *Trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on connaît les deux côtés.*

Règle du Lilavati. — Multipliez l'un des côtés par l'autre, doublez le produit, ajoutez-y le carré de la différence des deux côtés et extrayez la racine.

Par exemple, si les côtés sont égaux à 4 et à 3, la règle donnera

$$2(4 \times 3) = 24 + (4 - 3)^2 = 25$$

et

$$\sqrt{25} = 5.$$

Problème II. — *Connaissant l'hypoténuse et l'un des côtés, trouver l'autre.*

Règle du Lilavati. — Multipliez la somme de la base et de l'hypoténuse par leur différence et extrayez la racine carrée.

Si l'hypoténuse égale 5 et le côté égale 3, nous aurons

$$(5+3)(5-3)=16$$

et

$$\sqrt{16}=4,$$

c'est-à-dire l'autre côté.

Le carré de l'hypoténuse.

Cette importante proposition, qui est la quarante-septième des éléments d'Euclide, est démontrée par Bhaskara d'une façon si élégante qu'on ne saurait l'omettre ici. Nous ne saurions affirmer qu'elle soit de Bhaskara lui-même, mais ce que nous pouvons assurer, c'est que, si elle n'est pas de lui, elle est due à l'un des commentateurs de son Ouvrage et à un Indien. La voici en entier.

Si A désigne l'hypoténuse, B le grand côté de l'angle droit et C le plus petit, et si du sommet de l'angle droit on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, et qu'on désigne par b et c les

Fig. 1.



deux segments de l'hypoténuse, les triangles semblables donneront les proportions suivantes :

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{b},$$

d'où

$$b = \frac{B^2}{A},$$

et

$$\frac{A}{C} = \frac{C}{c},$$

d'où

$$c = \frac{C^2}{A}.$$

Mais, puisque $A = b + c$, on aura aussi

$$A = \frac{B^2 + C^2}{A},$$

d'où

$$A^2 = B^2 + C^2.$$

De la circonférence et du cercle.

Ce qu'il y a peut être de plus original dans l'œuvre de Bhaskara, c'est la géométrie du cercle.

Le *Lilavati* donne la règle suivante pour trouver la circonférence d'un cercle.

Règle du Lilavati. — *Multipliez le diamètre par* 3927 *et divisez le produit par* 1250.

En effet, si nous effectuons la division, nous verrons que le quotient obtenu nous donne exactement 3,1416 sans reste. C'est donc là une valeur de Π suffisamment approchée pour les opérations ordinaires. Outre ce rapport, le *Lilavati* dit qu'on peut se servir du rapport $\frac{22}{7}$ pour ce qui ne demande pas une grande précision.

Ces nombres sont donnés sans preuve et l'on ne nous dit pas non plus comment on les a obtenus.

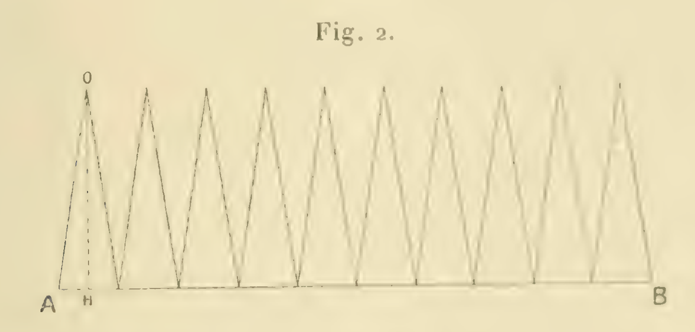
Cependant, l'un des commentateurs donne la raison suivante : « Le côté de l'hexagone inscrit est égal au rayon. D'après cela, nous pouvons trouver le côté du dodécagone d'où nous déduirons, par une méthode semblable, le côté du polygone de 24 côtés, et ainsi de suite, toujours en doublant le nombre des côtés jusqu'à ce que le côté diffère à peine de l'arc. La somme de ces derniers côtés sera presque égale à la circonférence du cercle. Nous chercherons donc le côté du polygone de 384 côtés et l'on trouvera par là le rapport donné. »

La méthode pour trouver la surface du cercle est très curieuse. Voici comment s'exprime l'auteur :

« Divisez le cercle en deux demi-cercles. Supposez qu'on ait tiré un assez grand nombre de rayons et que la demi-circonférence ait été développée sur une ligne droite. Chaque demi-cercle deviendra ainsi une série de triangles. Si nous les plaçons ensemble, on obtiendra un parallélogramme dont la base sera la moitié de la circonférence et dont la hauteur sera égale au rayon. »

La figure sera donc celle ci-dessous :

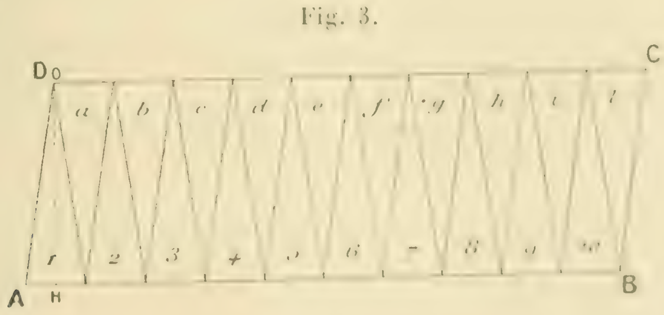
Fig. 2.



AB sera la demi-circonférence et OH le rayon du cercle.

Les deux séries de triangles formeront donc le parallélogramme ci-dessous :

Fig. 3.



Les triangles 1, 2, 3, ... représentent la moitié du cercle, tandis que a, b, c, d, ... représentent l'autre moitié, et que le parallélogramme ABCD représente le cercle dont on cherche la superficie.

Puisque AB est la demi-circonférence, $AB = \Pi R$ qui, multiplié par $OH = R$, donnera ΠR^2, c'est-à-dire la surface du cercle.

On trouve encore d'autres règles curieuses dans l'ouvrage de Bhaskara, telles que, par exemple, les règles suivantes :

« *Le diamètre d'un cercle, divisé par* 4 *et multiplié par la circonférence, donne l'aire du cercle.*

» *L'aire du cercle, multipliée par* 4, *donne la surface de la sphère.*

» *Cette superficie, multipliée par le diamètre de la sphère, et divisée par* 6, *donne le volume de la sphère.* »

Le *Lilavati* donne plusieurs exemples de ces règles, en prenant un cercle et une sphère de rayon 7.

Un autre exemple, bien digne de figurer ici, est le suivant :

« *Si le diamètre d'un cercle est égal à* 10 *et si la corde de l'arc double est* 6, *on demande quel sera le sinus verse.*

» *Du sinus verse trouver la corde, et de la corde et du sinus verse trouver le diamètre.* »

Règle du Lilavati. — « Multipliez la corde de l'arc double par le diamètre. Soustrayez du diamètre la racine carrée du produit, et la moitié du reste sera le sinus verse. »

Pour trouver la corde de l'arc double, « soustraire le sinus verse du diamètre et multiplier le reste par le sinus verse. Extraire la racine carrée du produit et multiplier par 2. »

» Pour trouver le diamètre du cercle, diviser le carré de la demi-corde par le sinus verse et ajouter le sinus verse au quotient. »

Le produit de l'arc par la circonférence diminuée de l'arc s'appelle un *adya*.

Pour trouver la corde, on multipliera le quart du carré de la circonférence par 5, on soustraira le produit de l'adya, multiplié par le reste, et l'on divisera l'adya par quatre fois le diamètre. Le quotient sera égal à la corde.

De l'Algèbre.

L'Algèbre est sans contredit le point faible de tout ce que Bhaskara a écrit sur les Mathématiques. La plupart de ses méthodes sont primitives.

Aucun signe ne sert à désigner les quantités positives et les quantités négatives y sont désignées par un point.

Les quantités inconnues se représentent au moyen de couleurs diverses et l'égalité s'exprime en mots et non au moyen d'un signe.

Bhaskara traite des équations du premier et du second degré, mais d'une manière très obscure. Malgré cela, quand on voit quels problèmes Bhaskara propose, on est forcé d'admettre qu'il avait atteint une certaine habileté à manier les formules algébriques.

Ainsi le problème suivant, que Bhaskara dit avoir tiré d'un auteur ancien, demande une dextérité à laquelle on ne se serait pas attendu de méthodes algébriques aussi primitives.

Ce problème est ainsi conçu : « *Quel est le nombre qui, multiplié par* 3 *et ayant* 1 *ajouté à ce produit, devient un cube, et dont la racine cubique, élevée au carré, puis multipliée par* 3 *et ayant une unité ajoutée, devient un carré.* »

La solution de l'équation du second degré se trouve dans plusieurs Traités hindous.

Cette solution est invariablement celle dont on se sert en France et dans plusieurs autres contrées de l'Europe, c'est-à-dire la méthode directe qui consiste à multiplier chaque terme de l'équation par $4a$, méthode qui a l'avantage de ne pas donner de dénominateur (1).

---

(1) En Angleterre, l'équation générale du second degré se résout toujours comme suit

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

divisant par a et transposant on obtient

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

et, en complétant le carré, on a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

d'où, en extrayant la racine,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

et finalement

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Quant à la méthode française ou plutôt indoue, elle y est pour ainsi dire inconnue.

C'est là à peu près tout ce que nous pouvons dire au sujet de l'Algèbre des Hindous.

Problèmes indiens.

Nous allons maintenant donner quelques problèmes qui sont assez curieux, vu la manière poétique dont leurs auteurs les ont proposés.

On remarquera qu'il y en a plusieurs qui ne sont que de simples questions d'Arithmétique.

PROBLÈME I. — *Dix fois la racine carrée d'une troupe de cygnes s'est envolée vers le lac de Manou lorsqu'elle a vu les nuages s'amonceler. La huitième partie de leur nombre a quitté le bord de l'eau pour les nénuphars, et trois couples sont restés à se jouer dans l'eau. Dis-moi, jeune fille à la belle chevelure, quel était le nombre total de cygnes?*

PROBLÈME II. — *La cinquième partie d'un essaim d'abeilles s'est posé sur la fleur d'un Kadamba, le tiers sur celle du Silindhri, trois fois la différence de ces nombres s'est envolée pour aller sur la fleur d'un Kutaja, et une abeille a plané dans l'air, attirée par l'odeur d'un jasmin et d'un pandanus. Dis-moi, jolie fille, le nombre d'abeilles?*

PROBLÈME III. — *Au milieu du combat, le furieux Prithava saisit un nombre de flèches pour tuer Karma. Il en employa la moitié pour sa propre défense et quatre fois la racine carrée contre les chevaux. Trois flèches transpercèrent Shalya, l'automédon, trois autres flèches crevèrent le parasol et brisèrent l'étendard et l'arc, tandis que la tête de Karma fut percée d'une flèche. Quel est le nombre de flèches qu'avait pris Arjoun* (1)?

PROBLÈME IV. — *La racine carrée de la moitié d'un essaim d'abeilles et puis aussi la huitième partie vont se poser sur un jasmin. La reine bourdonne en réponse au bourdonnement d'un mâle qui est dans un nénuphar.* (Cela signifie que deux abeilles restent écartées des autres.)

(1) Arjoun est un autre nom de Prithava qui, comme Karma, était un prince indien de l'antiquité.

O belle fille, dis-moi combien il y avait d'abeilles?

Problème V. — *On peut acheter une fille de six ans pour 32 niskas. Combien coûtera une fille de vingt ans?*

Question difficile à résoudre pour un Européen qui demandera sans doute si la valeur pécuniaire d'une fille est en raison directe ou indirecte de son âge.

Problème VI. — *Trente poutres de 12 pouces d'épaisseur, de 16 pouces de largeur et de 14 coudées de long coûtent 100 niskas. Que coûteront 14 poutres de 8 pouces d'épaisseur, de 12 pouces de largeur et de 10 coudées de longueur?*

Problème VII. — *Si les poutres étaient à une lieue de distance et qu'il fallût payer 8 drachmes pour les apporter, combien faudrait-il payer pour faire transporter le second lot à une distance de six lieues?*

Je ne donnerai pour finir qu'un autre problème qui m'a été proposé il y a quelques années, par un de mes amis, un Hindou qui m'avait demandé de lui en donner la solution. Ce problème est suffisamment curieux pour trouver sa place ici.

Problème VIII. — *Trois hommes avaient un singe. Les hommes qui avaient acheté des mangues se les partagèrent de la façon suivante :*

Dans la nuit, le premier homme vint où était la provision de mangues qu'il divisa en trois parties. Il prit une des parts pour lui et, comme il y avait une mangue en plus des trois parts, il la donna au singe.

Le deuxième homme vint aussi, divisa les mangues restantes en trois portions. Il y eut encore une mangue en plus qu'il donna au singe et il prit l'une des portions pour lui-même.

Alors le troisième individu arriva et divisa aussi les mangues en trois parts et, comme il y eut encore une mangue en plus, il la donna au singe et prit une des parts pour lui-même.

Le matin suivant, les trois hommes vinrent ensemble et divisèrent les mangues restantes en trois portions. Cette fois, il y eut encore une mangue en plus qu'on donna au singe, tandis que chacun des trois individus prit sa part.

On demande quel est le plus petit nombre de mangues avec lequel il soit possible d'effectuer ces partages? [1]

Au lecteur maintenant à dire si nos amis de l'Hindoustan n'ont pas droit aux louanges que nous leur avons données en commençant et si nous ne leur sommes pas redevables d'autres connaissances mathématiques que de la numération décimale qui, comme on le sait, nous vient des Hindous.

Nous n'en dirons pas plus, nous souvenant toujours que les Latins ont dit avec justesse : *Verbum sat sapienti.*

---

[1] Comme plusieurs personnes ont prétendu que ce problème était impossible, je crois devoir en donner ici une solution, espérant que de meilleurs mathématiciens que moi le résoudront d'une façon plus élégante.

Soient A le premier homme, B le second et C le troisième.

Soit encore x le nombre de mangues reçues le matin par A, B et C.

Alors $3x+1$ représente ce que C a laissé.

Et $\frac{1}{2}(3x+1)$ représente ce que C a pris.

Donc C a trouvé

$$\frac{3}{2}(3x+1)+1,$$

et B a pris

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(3x+1)+1\right],$$

et B a trouvé

$$\frac{3}{2}\left[\frac{3}{2}(3x+1)+1\right]+1,$$

et A a pris

$$\frac{3}{4}\left[\frac{3}{2}(3x+1)+1\right]+\frac{1}{2};$$

cette dernière équation doit être un nombre entier et est égale à

$$\frac{27x+9+6+4}{8}=3x+2+\frac{3(x+1)}{8},$$

d'où l'on verra que $x=7$ ou 15 ou 23, ..., 63, 71, 79, et que 79 est le plus petit nombre possible.

Donc :

A a d'abord eu	26	mangues et le singe	1	mangue
B »	17	» »	1	»
C »	11	» »	1	»
Et le matin A + B + C ont eu chacun 7 mangues soit en tout	21	» »	1	»
Total.........	75	» »	4	»

ce qui fait bien 79.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G.-B. GUCCIA. — LEZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE (Cours lithographié). 1 vol. in-4°, 416 pages. Palerme, Longo et Cie, 1890.

Les travaux de Chasles et Poncelet, continués et développés par de nombreux mathématiciens, ont donné naissance aux méthodes de transformation et de correspondance qui sont si fécondes en Géométrie. Tout particulièrement en Italie, M. Cremona a contribué, pour une large part, au développement des théories de Chasles et Poncelet, tant par ses travaux personnels (1) que par son remarquable enseignement.

Ce sont, en majeure partie, les idées de Cremona que M. G.-B. Guccia a exposées dans ses Leçons à l'Université de Palerme, qu'il vient de publier.

L'auteur expose d'abord les propriétés générales des systèmes linéaires, la théorie des centres harmoniques et le procédé polaire (*polaren-process*); puis, il applique ces théories à l'étude des propriétés générales des courbes et des surfaces algébriques.

Le Cours débute par dix Leçons de Géométrie analytique, dont M. Guccia ne publie que les titres, qui sont suivies de cinq Leçons de généralités : [Définitions des *courbes-lieux* et des *courbes-enveloppes*, de l'*ordre*, de la *classe*, du *genre* des courbes et des surfaces. Définitions des points et des tangentes multiples, etc.]. A la seizième Leçon, commence l'étude des systèmes linéaires, dans la géométrie de la droite, du plan et de l'espace, par l'exposé du principe de correspondance de Chasles.

Désignons, d'une manière générale, sous le nom d'*élément d'ordre n*, soit un groupe de n points en ligne droite ou un groupe de n droites passant par un point, soit une courbe-lieu d'ordre n ou une courbe-enveloppe de classe n, soit encore une surface-lieu d'ordre n ou une surface-enveloppe de classe n, de telle

(1) CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (*Memorie della R. Accad. delle Scienze dell' Instituto di Bologna*, série I, t. XII; 1862). — *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (*Ibid.*, série II, t. VI et VII; 1866 et 1867). — *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Journal de Crelle*, t. 68; 1868).

façon qu'un élément d'ordre n soit représenté, analytiquement, par une équation homogène d'ordre n, $U = 0$, à deux, trois ou quatre variables, suivant les cas.

Un *système linéaire d'éléments d'ordre n et d'espèce k* est un système linéaire k fois infini d'éléments d'ordre n, défini, par suite, par une équation de la forme

$$(1) \qquad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_{k+1} U_{k+1} = 0,$$

où $U_1, U_2, \ldots, U_{k+1}$ sont des fonctions homogènes, du même degré n, *linéairement indépendantes* et où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ sont $(k+1)$ paramètres arbitraires. Un tel système est évidemment parfaitement défini si l'on connaît $(k+1)$ éléments de ce système n'appartenant pas à un système d'espèce inférieure à k. Un système linéaire S_n^k d'ordre n et d'espèce k contient une infinité de systèmes $S_n^{k'}$ de même ordre et d'espèce k' inférieure à k qu'on obtient en établissant une ou plusieurs relations linéaires et homogènes entre les λ. Ces systèmes sont appelés des systèmes *mineurs* de S_n^k. Ainsi, tous les éléments de S_n^k qui contiennent ν points *fixes*, $\nu < k$, forment un système mineur $S_n^{k-\nu}$ d'espèce $k - \nu$. En particulier, il n'y a qu'un seul élément de S_n^k qui contienne k points donnés.

On dit que deux systèmes linéaires, de même espèce k, $S_{n_1}^k$ et $S_{n_2}^k$ d'ordres n_1 et n_2 sont *projectifs* s'il existe, entre ces deux systèmes, une correspondance univoque telle qu'à tout élément de l'un corresponde un élément de l'autre et, d'une manière générale, qu'à tout système mineur d'espèce $(k-l)$ de l'un corresponde un système mineur de même espèce $(k-l)$ de l'autre. On voit immédiatement que, si deux systèmes

$$\sum_1^{k+1} \lambda_h U_h^1 = 0, \qquad \sum_1^{k+1} \lambda'_h U_h^2 = 0$$

sont projectifs, les paramètres λ' sont des fonctions linéaires, homogènes, indépendantes, des λ. Il est aisé de voir qu'on peut toujours choisir les éléments U_h^1 et U_h^2, de telle façon que l'on ait

$$\lambda'_h = \lambda_h.$$

On voit alors immédiatement qu'*étant donnés* $(k+1)$ sys-

tèmes projectifs $S^k_{n_1}, S^k_{n_2}, \ldots, S^k_{n_{k+1}}$, *d'espèce k, il existe un élément d'ordre* $n_1 + n_2 + \ldots + n_{k+1}$, *dont tous les points sont communs aux* $(k+1)$ *systèmes.*

M. Guccia établit successivement ces propriétés générales des systèmes pour les systèmes de points, de courbes-lieux et de surfaces-lieux qu'il étudie, *séparément,* par une voie géométrique. (Au moyen du principe de dualité, il passe immédiatement aux systèmes de droites passant par un point, de plans passant par une droite, de courbes et de surfaces-enveloppes.)

Géométriquement, un système linéaire de points sur une droite, appelé aussi *involution d'ordre n et d'espèce k*, est un système linéaire de groupes de n points, tel que tout groupe de n points soit défini, d'une manière univoque, lorsqu'on connaît k des points de ce groupe.

Tout point de la droite peut être considéré comme un point multiple d'ordre $s \leqq k$ de l'involution et il n'y a que $(k+1)(n-k)$ *points multiples d'ordre* $(k+1)$. En particulier, cette dernière proposition, qui est très importante, est démontrée d'une façon très élégante (Th. VII, p. 56).

Un système C^k_n de courbes planes détermine sur une droite quelconque, par ses intersections, une involution I^k_n d'ordre n et d'espèce k. On en conclut qu'il y a $(k+1)(n-k)$ courbes du système qui ont un contact d'ordre $k+1$ avec une droite quelconque du plan. L'auteur étudie, plus particulièrement, les systèmes de première espèce ou *faisceaux* et les systèmes de seconde espèce ou *congruences linéaires* (p. 69-77).

Dans un faisceau (C_n) d'ordre n il y a, en général, $3(n-1)^2$ courbes qui ont un point double (Th. IX, p. 72).

Des systèmes linéaires de courbes planes on passe, sans difficulté, aux systèmes de surfaces (p. 77-107). Comme un système S^k_n de surfaces détermine sur une droite une involution I^k_n et sur un plan un système C^k_n de courbes planes, on en conclut qu'il y a $(k+1)(n-k)$ surfaces du système qui ont un contact d'ordre $(k+1)$ avec une droite quelconque (Th. I, p. 80) et qu'il y a $3(n-1)^2$ surfaces d'un faisceau qui touchent un plan donné (Th. IV, p. 81).

Les Leçons XXVII à XXXIII sont l'exposé de la théorie des polaires des courbes planes. Étant donnés n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

sur une droite, un pôle O sur cette droite et un point M, si l'on désigne par $\left(\frac{MA}{OA}\right)_r$ l'un quelconque des produits des n rapports $\frac{MA_1}{OA_1}, \ldots, \frac{MA_n}{OA_n}$ r à r, on désigne, d'après M. de Jonquières, par *centres harmoniques d'ordre r* les points M tels que l'on ait

$$\sum \left(\frac{MA}{OA}\right)_r = 0.$$

Soit $f(x_1, x_2) = 0$ l'équation de degré n qui représente les n points $A_1, \ldots, A_n$. Les coordonnées y_1, y_2 des r centres harmoniques $M_1, \ldots, M_r$ sont fournies par l'équation

$$\Delta_z^{n-r} f_y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_y^r f_z = 0,$$

où z_1, z_2 désignent les coordonnées de O et $\Delta_z^k f_y$ le symbole opératif

$$z_1^k \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} + \frac{k}{1} z_1^{k-1} z_2 \frac{\partial^k}{\partial y_1^{k-1}\, \partial y_2} + \ldots + z_2^k \frac{\partial^k}{\partial y_2^k}.$$

Étant donnés une courbe C_n d'ordre n et un point O dans son plan, on considère une sécante variable issue de O qui coupe la courbe en $A_1, A_2, \ldots, A_n$; le lieu des centres $M_1, \ldots, M_r$ de $A_1, \ldots, A_n$, par rapport à O, est une courbe $P_r^{(n-r)}$ d'ordre r qu'on appelle *la $(n-r)^{\text{ième}}$ polaire de C_n par rapport à* O. La $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire est une droite, la $(n-2)^{\text{ième}}$, une conique.

Des propriétés élémentaires des polaires, qui découlent immédiatement des propriétés du symbole opératif Δ_z^k, jointes aux propriétés des faisceaux et des congruences de courbes, on arrive à tirer toute la suite des propositions importantes sur les relations qui existent entre les *nombres caractéristiques* d'une courbe.

Soient n l'*ordre*, m la *classe*, δ le nombre des *points doubles*, χ le nombre des *points de rebroussement*, τ le nombre des *tangentes doubles*, i le nombre des *tangentes d'inflexion*, et enfin p le *genre* d'une courbe plane. [Si la courbe a un point multiple d'ordre r ayant s tangentes confondues en une seule, on compte ce point comme la réunion de $\frac{r(r-1)}{2} - (s-1)$ points doubles et de $(s-1)$ points de rebroussement; de même, une tangente multiple d'ordre ρ ayant σ points de contact confondus est comptée pour $\frac{\rho(\rho-1)}{2} - (\sigma-1)$ tangentes doubles et $(\sigma-1)$ tangentes

d'inflexion]. Il existe entre les nombres m, n, δ, χ, τ, i les quatre relations

$$(1)\qquad m = n(n-1) - 2\delta - 3\chi,$$
$$(2)\qquad n = m(m-1) - 2\tau - 3i,$$
$$(3)\qquad i = 3n(n-2) - 6\delta - 8\chi,$$
$$(4)\qquad \chi = 3m(m-2) - 6\tau - 8i.$$

Les relations (2) et (4) se déduisent des relations (1) et (3) par dualité. D'ailleurs, ces quatre relations *ne sont pas distinctes*, car de (1) et (3) ou de (2) et (4) on peut tirer la *même* relation

$$(5)\qquad \chi - i = 3(n-m).$$

De ces relations, données par Plücker, on peut tirer d'autres relations

$$(6)\qquad 2(\delta - \tau) = (n-m)(n+m-9)$$

et

$$(7)\qquad \frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2\chi = \frac{m(m+3)}{2} - \tau - 2i.$$

Enfin, la relation (7) conduit immédiatement, avec la relation (5), à l'égalité *importante* que voici

$$(8)\qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \chi = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - i,$$

qui prouve que *le genre d'une courbe est le même soit qu'on la considère comme courbe-lieu ou comme courbe-enveloppe* (p. 154). On a alors aussi

$$(9)\qquad \begin{cases} 2p - 2 = m + \chi - 2n \\ = n + i - 2m \\ = n(n+3) - 2(\delta + \chi) \\ = m(m+3) - 2(\tau + i). \end{cases}$$

Voici comment M. Guccia établit les relations (1) et (3) : La relation (1) n'est qu'un cas particulier du théorème plus général suivant : *Dans un faisceau d'ordre m, il y a*

$$n(n+2m-3) - 2\delta - 3\chi$$

courbes qui touchent une courbe donnée d'ordre n ayant δ

points doubles et q points de rebroussement (Th. XXXVII, p. 135). Pour $m = 1$, on a un faisceau de droites et l'on conclut la formule (1). Pour établir la relation (3), on définit la *steinérienne* et la *hessienne* d'une courbe donnée : Toutes les premières polaires P_{n-1}^1 d'une courbe donnée C_n forment une congruence linéaire ; toutes les P_{n-1}^1, dont le pôle décrit une droite donnée R, forment un faisceau d'ordre $(n-1)$ qui possède $3(n-2)^2$ courbes ayant un point double. Donc, sur toute droite R, il y a $3(n-2)^2$ points, dont les premières polaires ont un point double et, par suite, *le lieu des points, dont les premières polaires par rapport à C_n ont un point double, est une courbe de degré $3(n-2)^2$*. C'est cette courbe que Cremona désigne sous le nom de *steinérienne*.

Le lieu des points doubles des courbes de la congruence formée par les premières polaires P_{n-1}^1 est ce qu'on appelle la hessienne, qui donne une explication géométrique du covariant de Sylvester. *La hessienne est une courbe d'ordre $3(n-2)$ dont tous les points de rencontre avec C_n sont ou des points multiples ou des points d'inflexion de C_n*. On conclut de là qu'on peut compter le nombre i des points d'inflexion de C_n en retranchant du nombre $3n(n-2)$ des intersections de la hessienne et de C_n un nombre convenable de fois les points multiples de C_n. On obtient ainsi la relation (3) (p. 152).

Les Leçons XLI à XLVIII contiennent une étude très intéressante des correspondances de courbes par points et de la correspondance univoque qu'on peut établir entre les courbes d'une congruence linéaire et les points d'un plan (p. 167). L'auteur établit d'abord la proposition de Zeuthen suivante :

S'il existe entre les points de deux courbes C_1, C_2 de genres p_1, p_2 une correspondance algébrique telle que : 1° à un élément de C_1 il corresponde x_2 éléments de C_2 et, à un élément de C_2, x_1 éléments de C_1 ; 2° que y_1 et y_2 soient les nombres des couples de points confondus de C_1 et C_2 qui correspondent à un même point de l'autre courbe, on a la relation

$$(1) \qquad y_1 - y_2 = 2x_2(p_1 - 1) - 2x_1(p_2 - 1).$$

Dans le cas particulier de $x_1 = x_2 = 1$, on a nécessairement

$$y_1 = y_2 = 0.$$

et l'on obtient la belle proposition, due à Riemann, qui est du plus haut intérêt dans l'étude des intégrales abéliennes : *Deux courbes qui se correspondent point par point sont du même genre* (p. 165).

Comme application, on voit que la steinérienne d'une courbe C_n étant la première polaire de la hessienne par rapport à C_n, que ces deux courbes se correspondent point par point et, par suite, que *la steinérienne et la hessienne sont de même genre.*

Enfin, M. Guccia termine ses Leçons sur les courbes planes en étudiant à fond les trois courbes hessienne (ou jacobienne), steinérienne et cayleyenne d'une courbe donnée C_n [la cayleyenne est l'enveloppe de la droite qui joint deux points correspondants de la steinérienne et de la hessienne], qui sont trois courbes de même genre. Il donne (p. 225) un tableau fournissant les nombres caractéristiques des trois courbes en fonction de trois des nombres caractéristiques de C_n [le genre, l'ordre et la classe].

Les treize dernières Leçons du Cours sont l'extension à la Géométrie de l'espace des propositions démontrées dans la Géométrie du plan. Toutes les propriétés des courbes planes ont leurs correspondantes dans les surfaces. On étudie les nombres caractéristiques des surfaces et les trois surfaces adjointes, hessienne, steinérienne et cayleyenne, comme précédemment, au moyen des systèmes linéaires de surfaces et des surfaces polaires d'une surface donnée.

L'éminent professeur de Palerme s'est surtout attaché à ne faire que des démonstrations purement géométriques. Les démonstrations y gagnent beaucoup en élégance et en simplicité. Cette unité de méthode, dans toute l'exposition, est un des attraits de l'Ouvrage, qui, d'ailleurs, possède encore ce grand mérite d'enseigner au lecteur des résultats très importants de la théorie *générale* des courbes et des surfaces algébriques en n'exigeant de lui que les connaissances *les plus élémentaires* de Géométrie analytique et de Calcul différentiel. C. Bourlet.

S. DICKSTEIN. — POJECIA I METODY MATEMATYKI. Tom pierwszy. Cześć pierwza. *Teorya działán* [1]. Varsovie, Gebethner et Wolff, 1891. VI-258 p. in-8°.

1. L'Ouvrage dont nous présentons la première Partie aux lecteurs du *Bulletin* doit former, à ce qu'on peut en juger dès aujourd'hui, une petite encyclopédie des Mathématiques pures [2], et vraiment on y trouve, à des degrés différents, les mérites et les défauts d'une encyclopédie : d'un côté, la distribution régulière et systématique de la matière et l'érudition étendue et presque complète; de l'autre, une impersonnalité qui exclut, ou peu s'en faut, la critique, et la fusion imparfaite de la matière en un tout homogène et organisé.

2. Cette première Partie se compose d'une Introduction générale et de sept Chapitres.

Le premier problème qu'on aborde dans l'Introduction (§ 1) est la recherche de la nature des objets dont s'occupent les Mathématiques. Ils se divisent en trois groupes, à savoir :

a. Nombres (réels, complexes, idéaux, transfinis, etc.), et fonctions (c'est-à-dire séries d'états d'un nombre qui varie indépendamment d'autres nombres);

b. Formes géométriques constantes et variables;

c. Formes qui figurent dans l'étude mathématique des phénomènes naturels (Phoronomie, Mécanique, Physique, etc.).

A chacun de ces groupes d'objets il correspond une branche différente des Mathématiques, mais ces branches, au lieu de s'éloigner indéfiniment l'une de l'autre, ont entre elles de nombreux points de contact, d'où il suit que les Mathématiques constituent,

---

(1) *Les concepts et les méthodes des Mathématiques*, t. I. Première Partie : *Théorie des opérations*.

(2) La deuxième et la troisième Partie du Tome premier contiendront la théorie des nombres et l'Algèbre; le Tome deuxième sera dédié à l'Analyse, le troisième enfin à la Géométrie et à la Cinématique.

non pas un ensemble de Sciences, mais au contraire une Science unique. On doit chercher l'explication de ce fait dans l'unité de l'origine psychologique des objets mathématiques, qui tous se déduisent des objets réels par *abstraction* ou par *généralisation*.

Après avoir passé en revue les opinions de Kant, Wronski, Comte, Wundt, sur la nature des objets mathématiques, l'auteur traite (§ 2) des concepts de *grandeur* et d'*égalité;* il s'occupe ensuite de l'applicabilité des opérations mathématiques aux objets déduits par abstraction des objets réels, et à ce propos il donne un extrait étendu du Mémoire de M. Helmholtz : *Zahlen und Messen* (1). Les paragraphes suivants sont dédiés à la continuité (§ 3), à la discussion (§ 4) si l'on doit regarder la Géométrie et la Cinématique comme des Sciences pures ou comme des Sciences appliquées (discussion où l'auteur se range du premier côté), à l'*Algebra of logic* (§ 5) (2), aux concepts d'analyse et de synthèse suivant les anciens et suivant les modernes (§ 6), enfin au *principe de la permanence des lois formelles* de Hankel (§ 7). Ce principe peut être généralisé de la façon suivante (§ 19) :

Si l'on effectue sur les formes d'une classe déterminée des constructions et des opérations déterminées, qui donnent lieu à des relations entre les formes de cette classe, on regarde ces relations comme existant même lorsque les résultats des constructions et des opérations n'appartiennent pas immédiatement à la classe considérée.

Le principe de la permanence est pour notre auteur un des fondements, non seulement des Mathématiques, mais aussi des Sciences physiques; c'est bien en vertu de ce principe que nous pouvons transporter aux objets mathématiques les relations entre les éléments des phénomènes que nous fournit la Physique : c'est donc

---

(1) *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem funfzigjahrigen Doctor-Jubiläum gewidmet.* Leipzig, 1887.

(2) M. Dickstein distingue l'*Algèbre de la logique* de la *logique mathématique*, en désignant par ce dernier nom la science des rapports logiques entre les concepts et les méthodes mathématiques. On peut envisager cette science à deux points de vue différents : en premier lieu, on peut chercher la forme que prennent les méthodes générales de recherche, c'est-à-dire l'analyse, la synthèse, l'abstraction, l'induction, la déduction, lorsqu'on les applique aux Mathématiques, ou bien on peut se proposer d'établir le caractère logique des diverses branches de cette science.

par ce principe que se rend possible l'application des Mathématiques aux Sciences expérimentales. Il faut toutefois avoir égard à ceci, que les relations entre les objets nouvellement créés par le principe de la permanence ne doivent jamais conduire à des résultats contredisant aux lois qui régissent la classe primitive de formes.

3. Le Chap. I est dédié aux nombres entiers. Le concept de nombre entier se déduit (§ 8) de la considération d'une suite d'objets réels, auxquels on fait correspondre un à un les symboles 1, 2, 3, ... Vient ensuite la théorie de l'addition, de la multiplication, de l'élévation à puissance et des opérations inverses (§ 9); enfin un court aperçu sur les *nombres transfinis* de M. G. Cantor. Une Note contient les principes de la théorie des ensembles et des types ordonnés.

Dans le Chap. II, on étudie les opérations formelles, d'après les Chap. II et III de la *Theorie der complexen Zahlensysteme* de Hankel (§ 11), et la théorie de M. Dedekind, d'après son opuscule : *Was sind und was sollen die Zahlen* (§ 12).

Dans le Chap. III on applique le principe de la permanence aux nombres fractionnaires (§ 13) [1]; on y parle ensuite de la théorie de M. Weierstrass (§ 14) [2], et de l'idée de M. Kronecker de substituer les congruences aux équations pour exclure par là de l'Algèbre tout concept différent de celui de nombre entier et positif. On établit (§ 14) les relations d'égalité et d'inégalité entre les nombres fractionnaires par la convention que $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$ suivant que $ad \gtreqless bc$; enfin on démontre que l'ensemble des nombres fractionnaires est dénombrable.

La théorie des nombres négatifs et celle des nombres complexes sont développées d'une façon tout à fait analogue dans les Chap. IV (§ 15-17) et V (§ 18-20), dont chacun commence par un aperçu historique sur l'argument.

Dans le Chap. VI on passe aux nombres complexes à plusieurs

(1) HANKEL, *Ouvrage cité*, § 11.
(2) V. BIERMANN, *Theorie der analytischen Functionen*, p. 9-11. Leipzig, 1887.

unités principales (¹). On commence par l'exposition de l'historique de la question (§ 21), d'où il résulte que MM. Weierstrass et Dedekind sont parvenus, par des chemins différents, à la conclusion, que tous les résultats auxquels conduit l'Arithmétique des quantités à plusieurs unités peuvent se déduire de la théorie des quantités complexes ordinaires. Toutefois notre auteur pense (et nous sommes d'accord avec lui) qu'on ne doit regarder comme inutile l'étude de ces quantités-là ; il n'y a qu'à se rappeler les applications qu'on en a faites dans la théorie de la transformation des formes quadratiques (²) et dans celle des groupes de transformations (³). Le § 22 contient la théorie de M. Weierstrass, les § 23-29 celle de Grassmann, les § 30 et 31 le calcul des quaternions.

Le Chap. VII traite des fonctions algébriques rationnelles entières. En voici le sommaire : Définitions et théorèmes fondamentaux (§ 32 et 33). Division des fonctions entières (§ 34). Théorie du plus grand commun diviseur (§ 35). Développement d'une fonction entière suivant les puissances d'une autre (§ 36). Fonctions symétriques (§ 37). Dérivation des fonctions entières, discriminant, Wronskien, Jacobien, Hessien (§ 38). Séries de Taylor et de Maclaurin et binôme de Newton (§ 39). Différences d'une fonction entière, différences inverses, nombres de Bernoulli (§ 40). Formule d'interpolation de Lagrange et ses applications (§ 41). Loi suprême de Wronski (§ 42).

4. Un seul regard aux nombreuses Notes qui suivent chaque Chapitre suffit pour montrer les connaissances étendues de l'auteur dans la littérature mathématique, ancienne et récente, de tous les peuples. Mais la façon dont ces Notes sont rédigées ne permet pas aux lecteurs, ainsi que nous l'avons déjà remarqué sous une

(¹) *Voir* à ce sujet la belle thèse de M. Berloty : *Théorie des quantités complexes à n unités principales*. Paris, 1886.

(²) Lipschitz, *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*. Bonn, 1886.

(³) Schur, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen* (*Math. Ann.*, t. XXXIII) ; Study, *Complexe Zahlen und Transformationengruppen* (*Berichte der K. sächs. Ges. der Wiss.*, 1889) ; Scheffers, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* (*Ibid.*) ; Scheffers, *Ueber die Berechnung der Zahlensysteme* (*Ibid.*).

autre forme, de se former une idée exacte de la valeur relative des auteurs et des ouvrages mentionnés. Pour en donner un exemple, ne voit-on pas cité avec largeur, à côté des écrits immortels de Carnot, Gauss, Cauchy, etc., l'Ouvrage de Dühring : *Neue Grundmittel und Erfindungen* (Leipzig, 1884), sans même un mot pour nous éclaircir sur la valeur réelle de ce Livre?

5. Mais il y a à faire d'autres remarques plus importantes. Pour cela nous devons rappeler brièvement les principes de la théorie des nombres [1]. On peut développer cette théorie par deux voies tout à fait différentes, que nous distinguerons par les noms de *méthode réelle* et de *méthode formelle*.

Dans la méthode réelle on définit les nombres comme des symboles correspondant aux divers éléments d'une série d'objets réels disposés dans un ordre déterminé. Si a est le nombre correspondant à l'objet A, on peut regarder a, ou comme un symbole désignant la place occupée par A dans la série d'objets (*nombre ordinal*), ou comme un symbole désignant l'ensemble α de tous les éléments de cette série depuis l'origine jusqu'à A (*nombre cardinal*). Laissant de côté cette distinction, il faut remarquer que la propriété caractéristique des nombres, en vertu de laquelle ils deviennent un précieux instrument de recherche, c'est que a désigne non seulement α, mais aussi tout autre ensemble α' *égal* à a, c'est-à-dire tel que les éléments de α et de α' puissent se faire correspondre d'une façon univoque et complète. Si deux nombres a, b représentent deux ensembles inégaux α, β, on dit que a est *plus grand* que b, si en faisant correspondre un à un les éléments de α et de β, l'ensemble β est épuisé avant que ne le soit l'ensemble α. Pour *additionner* les nombres a, b, il n'y a qu'à réunir en un seul ensemble γ les éléments des ensembles α, β; le nombre c représentant l'ensemble γ est la *somme* de a et de b : $c = a + b$. On peut démontrer [2] que l'addition est commutative, et aussi qu'elle est associative et univoque, et que, si l'on remplace a par un autre nombre, la somme c devient nécessairement différente.

---

(1) *Voir*, dans le fascicule de mars 1891, notre article bibliographique sur : BETTAZZI, *Teoria delle grandezze*.

(2) *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Helmholtz.

De même pour la multiplication, etc. Bref, dans la méthode réelle une opération est l'image d'une action effectuée sur un ou plusieurs ensembles d'éléments, et de la nature de cette action on peut déduire les propriétés caractéristiques de l'opération.

Dans la méthode formelle on considère certains concepts (*grandeurs*) ayant cette propriété, que deux quelconques d'entre eux étant donnés, on peut toujours établir s'ils sont égaux ou inégaux, et, dans ce dernier cas, lequel des deux est le plus grand. Il n'est pas même nécessaire d'attribuer une signification déterminée aux mots *égal, plus grand,* etc.; il suffit seulement que les idées qu'ils représentent satisfassent à quelques conditions, pour lesquelles nous renvoyons à notre article bibliographique déjà cité. Une *opération* représente le passage d'une ou plusieurs grandeurs à une autre grandeur qui en est le *résultat*. Quelle est la signification effective de ce passage? Nous n'en pouvons rien dire, car nous n'avons rien établi sur la nature des concepts (grandeurs) sur lesquels nous agissons. Il ne nous reste donc, pour le caractériser, c'est-à-dire pour le distinguer des autres passages possibles, qu'à lui attribuer *a priori* des propriétés déterminées; ainsi, par exemple, nous pouvons établir *par définition* qu'une opération Θ soit commutative, associative et univoque, et que $\Theta(a', b)$ soit différent de $\Theta(a, b)$ si a' est différent de a.

6. Cette seconde théorie est évidemment bien plus générale que la première, qui y est comprise comme cas particulier. En effet, il suffit de remplacer les grandeurs par les nombres, qui sont des grandeurs particulières, et l'opération Θ par l'addition, qui en a toutes les propriétés, pour que la théorie formelle se réduise à la théorie réelle. Si l'on prend au contraire, par exemple, comme grandeurs tous les segments rectilignes possibles, et si par opération Θ on entend la composition d'après les règles du calcul graphique, la théorie formelle donne lieu immédiatement à la théorie de la composition des segments.

La théorie formelle du nombre a été exposée systématiquement pour la première fois par Hankel, dans sa *Theorie der complexen Zahlensysteme* (Leipzig, 1867). Cet Ouvrage, excellent à beaucoup d'égards, a, à ce qu'il nous semble, deux défauts.

D'abord le premier Chapitre est étranger à la methode que

l'auteur s'est proposée, le nombre y étant défini d'une façon réelle. Il est vrai que ce Chapitre a été écrit, comme le dit l'auteur lui-même dans la Préface, pour montrer l'insuffisance de la méthode commune; mais ceci n'empêche pas que le concept de la théorie des opérations ressorte par là moins net et en soit quelque peu offusqué. C'est ce que prouve le Livre même de M. Dickstein, où nous trouvons un premier Chapitre fait à l'imitation de celui de Hankel, avec ceci de plus, que l'auteur n'a pas soin de nous éclaircir sur le fait et les motifs de l'existence de cet élément étranger. Mais, ce qui est pis encore, il y a même lieu de soupçonner que l'auteur lui-même ne se soit pas aperçu clairement de se trouver hors de son domaine; voici en effet ce qu'il écrit dans ce premier Chapitre (p. 48) : « Il est évident, et cette évidence ... doit être regardée comme une hypothèse fondamentale de la théorie des opérations », que $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$. Or, puisqu'on a introduit les nombres (p. 45) d'après la méthode réelle, le fait représenté par cette équation est une *vérité démontrable;* elle ne serait une *hypothèse* (ou mieux un élément de la définition de l'addition), que si nous nous trouvions effectivement dans le domaine de la théorie des opérations.

La deuxième imperfection de l'Ouvrage de Hankel dérive de ce qu'il jugeait presque impossible de définir rigoureusement les nombres irrationnels d'une façon purement formelle [1], et par conséquent nécessaire, ou tout au moins convenable, de quitter la méthode formelle lors de l'introduction de ces nombres (sauf à y revenir pour les nombres complexes). Cet exemple n'a pas été suivi: MM. Stolz [2] et Bettazzi [3] ont exposé la théorie des nombres irrationnels sans s'éloigner de la méthode purement formelle. M. Dickstein a pensé de faire mieux en omettant tout simplement la théorie des nombres irrationnels [4].

---

(1) « Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal, und ohne den Begriff der Grösse zu behandeln, muss auf höchset abstruse und beschwerliche Künsteleien führen, die, selbst wenn sie sich in vollkommener Strenge durchführen liessen, wie wir gerechten Grund haben zu bezweifeln, einen höheren wissenschaftlichen Werth nicht haben » (*Th. der compleren Zahlensysteme*, p. 46). — (Das Irrationale verlangt zu seiner systematischen Fassung den Grössenbegriff, p. 47).

(2) *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*. I. Th. Leipzig, 1885.

(3) *Teoria delle grandezze*. Pisa, 1890.

(4) Il n'y a dans son Ouvrage que la seule explication du terme *incommensu-*

Mais cette omission, qui est vraiment étrange, acquiert le caractère d'une faute par le fait que, dans le cours de l'Ouvrage, on rencontre souvent des racines carrées de nombres rationnels, ou bien on a affaire à des nombres réels quelconques ([1]).

7. Une faute analogue, quoique moins importante, est celle que commet notre auteur en faisant libre usage (p. 159, 194 et ailleurs) de la théorie des combinaisons que les lecteurs ont le droit d'ignorer. Il nous semble aussi peu convenable de parler du plus grand diviseur commun de deux fonctions avant d'avoir traité ce même argument pour les nombres entiers.

Le troisième principe de génération des nombres transfinis (*Hemmungsprincip*) est rappelé (p. 57), et si l'on veut même commenté, mais il n'est point du tout énoncé. Et au sujet de ces mêmes nombres on ne comprend pas pourquoi M. Dickstein n'a pas suivi à la page 57, ainsi qu'il l'a fait à la page 65, l'usage adopté par M. Cantor dans son dernier travail, d'écrire le multiplicande avant le multiplicateur ([2]).

Le théorème bien connu de Hankel se trouve énoncé (p. 75) comme il suit : *Si deux opérations univoques et associatives sont liées entre elles par la loi distributive, l'une d'elles est nécessairement commutative.* Mais laquelle? Désignons les deux opérations par Δ_1, Δ_2, et représentons la relation de distribution (qui n'est pas symétrique par rapport aux deux opérations) par les formules

$$\Delta_2[\Delta_1(a, b), c] = \Delta_1[\Delta_2(a, c), \Delta_2(b, c)],$$
$$\Delta_2[c, \Delta_1(a, b)] = \Delta_1[\Delta_2(c, a), \Delta_2(c, b)];$$

on démontre alors que Δ_1 doit être commutative, mais on ne peut rien affirmer au sujet de Δ_2.

L'assertion (p. 134) qu'à toute valeur de $a^2 + b^2$ il correspond

rable, et cela même dans le premier Chapitre, qui, nous l'avons déjà dit, est étranger à l'objet propre du Livre.

([1]) *Voir*, par exemple, p. 106, 119, 133, 142 et 152; en outre, tout le Chapitre VII, où les variables peuvent prendre des valeurs quelconques, sans aucune restriction.

([2]) En vertu de cette innovation, la relation $2^a 2^b = 2^{a+b}$ a lieu aussi pour les nombres transfinis.

seulement un ensemble fini de couples de valeurs rationnelles a, b n'est pas exacte; prenons en effet $a^2 + b^2 = 1$, nous pouvons poser $a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 - n^2}$, $b = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$, où m, n sont deux entiers quelconques. Il en est ainsi de la solution du problème proposé à la page 255, si l'on n'ajoute pas la condition que le degré de F doive être $\overline{\gtrless} p$.

Nous remarquerons enfin que, si notre imparfaite connaissance de la langue polonaise ne nous a pas trompé, l'objection de M. Dickstein (p. 91) contre la démonstration de M. Dedekind (Ouvrage cité) de l'existence de systèmes infinis ne nous semble pas fondée. Et puisque nous avons nommé M. Dedekind, nous dirons encore que nous aurions bien voulu trouver, dans l'Ouvrage que nous analysons, sa belle théorie des nombres complexes à n unités *in extenso* à côté de celle de M. Weierstrass.

8. En achevant cet article critique, peut-être trop sévère et minutieux, nous devons adresser à M. Dickstein un éloge sincère pour avoir voulu s'engager dans un travail qui était jusqu'ici un *desideratum* de la littérature mathématique moderne. Et qu'il nous soit aussi permis d'exprimer le désir qu'il veuille bien, avant de poursuivre son Ouvrage, s'occuper à corriger et à compléter cette première Partie; cela fait, il n'y aura plus qu'à souhaiter qu'elle soit traduite dans une langue plus répandue, de sorte qu'elle puisse être profitable aux mathématiciens de tous les pays.

G. VIVANTI.

BERTRAND (J.), de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — CALCUL DES PROBABILITÉS. Grand in-8°, LVIII-332 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1889.

Il n'y a peut-être pas de branche des Mathématiques à la fois plus intéressante, plus délicate et plus importante dans la pratique que la Théorie des probabilités. Son histoire révèle en même temps les merveilles que peut accomplir la science mathématique et les limites qu'elle ne saurait franchir. C'est le lien entre la rigueur de la déduction et le champ plus vaste de l'induction. Une théorie

complète de la probabilité serait en même temps une théorie complète de la formation des croyances. Il est, à coup sûr, regrettable que, suivant l'expression de M. Bertrand, on ne puisse connaître le Calcul des probabilités sans avoir lu le livre de Laplace et que l'on ne puisse lire le livre de Laplace sans s'y préparer par les études mathématiques les plus profondes.

Si c'est le seul moyen d'arriver à la Science complète, on peut du moins, sans un tel effort, acquérir un ensemble très utile de connaissances.

En réalité, la préface de quarante et quelques pages de M. Bertrand, intitulée *Les lois du hasard,* donne une vue d'ensemble sur la théorie sans l'emploi d'un seul signe algébrique.

Remarquez cette *réduction à l'absurde* de la théorie de Bernoulli sur l'espérance morale.

« Si je gagne, dit Pierre qui est pauvre, en proposant à Paul une partie de cartes, votre enjeu de 3^{fr} payera mon dîner. — Repas pour repas, répond Paul, vous me devrez 20^{fr} en cas de perte car tel sera le prix de mon souper. — Si je perdais 20^{fr}, s'écrie Pierre effrayé, je ne dînerais pas demain; vous pouvez, sans en venir là, perdre 1000^{fr}; déposez-les contre mes 20^{fr}; l'avantage, Daniel Bernoulli l'affirme, restera de votre côté. »

Plus complète encore est cette réfutation du calcul de Condorcet, relatif à la probabilité du lever du soleil.

« Paul veut parier que le soleil se lèvera demain. La théorie fixera les enjeux, Paul recevra 1^{fr} si le Soleil se lève et donnera un million s'il fait défaut. Pierre accepte le pari. Au lever de chaque aurore il perd 1^{fr} et paye. La chance pour lui diminue chaque jour puisque le soleil compte un lever de plus. Paul consciencieusement augmente son enjeu; consciencieusement aussi, Pierre continue à lui payer 1^{fr}. Les conventions demeurent équitables. Les parieurs voyagent, on parcourt vingt contrées de l'occident à l'orient. Pierre perd toujours; il poursuit sa chance cependant, conduit Paul vers le nord; on franchit le cercle polaire; le soleil reste un mois au-dessous de l'horizon; Paul perd 30 millions, et croit l'ordre de nature perverti. »

Laplace lui-même n'échappe pas à la raillerie plaisante de

M. Bertrand; et l'homme moyen idéal de M. Quételet est critiqué en ces termes :

« Dans le corps de l'homme moyen, l'auteur belge place une âme moyenne. L'homme type sera sans passions et sans vices, ni fou ni sage, ni ignorant ni savant, souvent assoupi; c'est la moyenne entre la veille et le sommeil; ne répondant ni oui ni non; médiocre en tout. Après avoir mangé pendant trente-huit ans la ration moyenne d'un soldat bien portant, il mourrait, non de vieillesse, mais d'une maladie moyenne que la statistique révélerait pour lui. »

Je me hâte d'arriver au corps même de l'Ouvrage; qu'il me suffise de dire que dans ces quelques pages d'introduction sont condensés les sujets suivants : Le paradoxe de Saint-Pétersbourg, la querelle de d'Alembert et de Bernoulli sur l'inoculation de la petite vérole, la ruine des joueurs, la probabilité des causes, la loi des grands nombres de Poisson, l'application des probabilités aux statistiques, la théorie des erreurs d'observation, la probabilité des jugements.

Après en avoir autant vu sans calcul, nous sommes prêts à accepter la promesse de M. Bertrand pour l'Ouvrage tout entier que « peu de pages pourraient embarrasser un lecteur familier avec les éléments des Mathématiques. »

A peine un signe d'intégration, jamais de fonction génératrice, c'est vraiment une simplicité charmante; partout on est éclairé par le bon sens si copieusement répandu dans la préface.

Le propre de la méthode de l'auteur est de nous signaler, au moyen de nombreux exemples concrets les erreurs possibles et les pièges à éviter.

Voici, par exemple, un problème, choisi parmi une demi-douzaine d'autres relatifs au même sujet, montrant qu'il est absurde de calculer la probabilité lorsque le nombre des cas favorables et des cas possibles sont tous deux infinis.

« On trace dans un cercle une corde au hasard; quelle est la probabilité qu'elle sera plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit? »

On peut dire : La probabilité n'est pas changée si l'on se donne l'une des extrémités de la corde. La probabilité qu'elle sera assez

longue est alors la même que la probabilité que sa direction ne sera pas comprise entre les deux cordes issues du point et soustendant des arcs de $120°$: cette probabilité est $\frac{1}{3}$.

On peut dire aussi : La direction n'importe pas, pourvu que la corde soit assez rapprochée du centre, c'est-à-dire à une distance plus petite que la moitié du rayon : la probabilité est $\frac{1}{2}$.

On peut dire encore : Choisir une corde au hasard c'est choisir au hasard son milieu. Pour que la corde soit assez longue, son milieu doit être hors du cercle concentrique au premier et de rayon moitié moindre. Cela donne la probabilité $\frac{1}{4}$.

On trouve de même, dans un Chapitre sur les probabilités totales et composées, de nombreux problèmes montrant combien il est essentiel, dans l'évaluation de la probabilité composée, de prendre pour la probabilité du second événement celle qu'il a *quand on sait que le premier est arrivé*.

Maxwell lui-même a méconnu ce principe en donnant la formule

$$\varphi(x) = G e^{-kx^2},$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est la probabilité que l'une des composantes de la vitesse d'une molécule de gaz soit égale à x. Il admet que les probabilités relatives aux trois composantes sont indépendantes. Or elles ne le sont manifestement pas pour la raison suivante : si x est égal au maximum de vitesse d'une molécule, le mouvement est parallèle à l'axe des x, et y et z sont nuls.

Dans le Chapitre sur l'espérance mathématique, l'étude du problème de Saint-Pétersbourg fournit à l'auteur une occasion de railler à nouveau la théorie de Daniel Bernoulli. Je cite quelques passages :

« On joue, c'est l'hypothèse. A-t-on tort ou raison? La question n'est pas posée.

» Pierre, pour toute fortune, possède 100000^{fr}, il veut avoir une chance de gagner 100 millions.

» Rien n'est plus facile, répond sans s'émouvoir le géomètre qu'il consulte. Si le jeu est équitable, vous aurez 999 chances sur 1000 de perdre vos 100000^{fr}. »

« La théorie de l'espérance morale est devenue classique, jamais le mot ne put être plus exactement employé ; on l'étudie.

on l'enseigne, on la développe dans des livres justement célèbres. Le succès s'arrête là, on n'en a jamais fait et n'en pourra faire aucun usage. »

Deux Chapitres sont consacrés à ce fameux théorème de Jacques Bernoulli : *qu'aucun événement possible n'est si improbable que sa chance d'arriver ne puisse être aussi grande qu'on veut, si l'on attend assez longtemps.*

Trois démonstrations distinctes en sont données dont la première est la plus directe et la plus complète. J'en donne un résumé.

Les probabilités de deux événements contraires étant p *et* q, *la combinaison la plus probable pour* μ *épreuves est celle où le premier événement arrive* μp *fois et le second* μq *fois.*

Par l'application du théorème de Stirling, la probabilité de cette combinaison est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

et la probabilité que le premier événement arrivera $\mu p \pm h$ fois est

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{\frac{-h^2}{2\mu pq}}.$$

Cette formule, approximativement vraie pour de petites valeurs de h, peut être prise comme vraie pour des valeurs grandes ou même infinies, parce que, alors, les valeurs vraies et celles données par la formule sont toutes deux assez petites pour être négligées.

Ainsi, pour $\mu = 1000$, $h = 100$, $p = q = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$\frac{\sqrt{2}\, e^{-20}}{\sqrt{1000\pi}} = 0{,}000\,000\,000\,52006.$$

Par un simple artifice, nous substituons à (1), donnant la probabilité d'un écart égal à h, la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{\frac{-z^2}{2\mu pq}}\, dz,$$

pour la probabilité d'un écart compris entre z et $z + dz$.

Pour vérifier cette formule, remarquons que, la somme des probabilités de toutes les erreurs possibles représentant la certitude, nous devons avoir et avons en effet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}\,dz = 1.$$

On peut donner d'autres vérifications.

La probabilité d'un écart plus petit que α sera, d'après ce qui précède,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-t^2}\,dt = \Theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

Si α a une valeur déterminée, si grande que l'on veut, la probabilité que l'écart ne le dépassera pas, lorsque μ augmente indéfiniment, tend vers 0, ce qui démontre le théorème de Bernoulli.

L'écart *relatif* est de plus en plus petit, l'écart *absolu* de plus en plus grand.

Pour préciser, supposons que l'on joue à pile ou face : combien doit-on faire d'épreuves pour que la probabilité d'obtenir pile, ou bien face, un million de fois au moins de plus que l'autre, surpasse 0,01?

Nous obtenons, en désignant par μ le nombre cherché,

$$0,99 = \Theta\left(\frac{1000000\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\right) = \Theta(1,83),$$

et de là

$$\mu = 597\,211 \text{ millions}.$$

Non seulement lorsque la probabilité d'un événement est connue on peut prédire avec presque certitude le nombre d'arrivées sur un nombre donné d'épreuves, mais encore, si la probabilité est inconnue, on peut la déterminer par l'emploi inverse du théorème de Bernoulli. Le rapport du nombre d'arrivées au nombre total d'épreuves tend, en effet, vers cette probabilité inconnue lorsque le nombre d'épreuves augmente.

Mais deux conditions sont nécessaires : la probabilité ne doit pas changer pendant les épreuves, et elle doit avoir une valeur déterminée.

« Le roi de Siam a quarante ans, quelle est la probabilité pour qu'il vive dans dix ans? Elle est autre pour nous que pour ceux qui ont interrogé son médecin, autre pour le médecin que pour ceux qui ont reçu ses confidences; très différente enfin pour des conjurés qui prendraient leurs mesures pour l'étrangler le lendemain. »

En un mot, le théorème de Bernoulli s'applique à la probabilité *objective* et non à la probabilité *subjective*.

Une conséquence immédiate du théorème est la ruine inévitable de tout joueur qui joue assez longtemps à un jeu équitable. Mais le nombre de parties avant l'instant de la ruine peut être considérable. Ainsi à pile ou face, à 1^{fr} la partie, il faut 624000 parties pour assurer une probabilité égale à 0,9 que l'un ou l'autre des joueurs perdra 100^{fr}.

Cette perspective n'est pas en vérité de nature à effrayer un joueur courageux.

Si, dans ces mêmes conditions, l'un des joueurs s'est mis au jeu avec 1^{fr} et doit recevoir 1^{fr} par partie tant qu'il n'aura pas perdu sa mise de 1^{fr}, son espérance mathématique est infinie.

Revenons à l'emploi inverse du théorème de Bernoulli. Prenons le problème suivant :

Une urne contient μ balles, les unes blanches, d'autres noires, dans une proportion inconnue. On tire K *boules, en remettant chaque fois dans l'urne la boule sortie. On obtient m tirages de boules blanches et n de noires. Quelle est la composition la plus probable de l'urne?*

Avant le tirage, toutes les hypothèses sont possibles pour la composition de l'urne. Supposons-les toutes également probables. Il s'ensuit que le rapport probable entre blanches et noires est $\frac{m}{n}$ et que la probabilité d'un écart ε avec ce rapport est

$$G e^{-\frac{\varepsilon^2(m+n)}{2pq}},$$

où G est indépendant de ε.

L'hypothèse que toutes les compositions sont, *a priori*, également probables est rarement réalisée. Supposons que les boules ont été mises dans l'urne par le sort avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque

couleur. Nous obtenons alors pour la proportion probable des boules blanches

$$\frac{\mu + m}{2\mu + m + n},$$

rapport compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{m}{m+n}$.

Si μ est très grand, le rapport est voisin de $\frac{1}{2}$ quels que soient m et n; si au contraire m et n sont très grands, il est voisin de $\frac{m}{m+n}$ quel que soit μ.

Ainsi la probabilité des causes dépend toujours de probabilités *a priori*.

Trois Chapitres sont consacrés à la question habituellement désignée sous le nom de *méthode des moindres carrés*.

Un quatrième Chapitre sur *Les erreurs de situation d'un point* est en réalité une extension de la loi de Gauss sur les erreurs.

Très intéressante est la critique du raisonnement de Gauss.

Tout d'abord peut-on affirmer en toute rigueur que la probabilité d'une erreur Δ est fonction de Δ?

« Ne dépend-elle pas de la grandeur mesurée? Si l'on fait une pesée, si l'on mesure un angle, lorsque le poids est un nombre exact de milligrammes, lorsque l'angle contient un nombre exact de secondes, n'a-t-on pas plus de chances d'évaluer juste que s'il faut ajouter une fraction? Si cette fraction, que l'instrument ne donne pas, est égale à $\frac{1}{2}$, n'a-t-on pas, en l'évaluant, moins de chances d'erreur que si elle est 0,27? »

Il y a un cas où le postulatum de Gauss peut être rigoureusement démontré, mais la conclusion est néanmoins seulement approximative. Supposons, en effet, que la quantité à mesurer soit la proportion des boules blanches dans une urne dont la composition est inconnue.

Sur μ boules tirées, m sont blanches.

La fraction $\frac{m}{\mu}$ est une mesure du rapport cherché. La mesure est d'autant plus précise que le nombre de tirages est plus grand.

L'opération répétée n fois donne les n mesures successives

$$\frac{m_1}{\mu}, \quad \frac{m_2}{\mu}, \quad \ldots, \quad \frac{m_n}{\mu}.$$

La valeur la plus probable du rapport, déduite des tirages, est

$$\frac{\Sigma m}{n\mu} = \frac{1}{n}\sum \frac{m}{\mu},$$

moyenne arithmétique de n mesures qui méritent la même confiance.

Maintenant si sur μ tirages on a rencontré m boules blanches, la probabilité pour que le rapport des boules blanches au nombre total soit $\frac{m}{\mu} + z$ est *approximativement*

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi m(\mu - m)}} e^{-\frac{z^2\mu^2}{2m(\mu-m)}},$$

qui est de la forme

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 h^2};$$

c'est précisément ce que donnerait la loi de Gauss : mais si la loi était vraie, la formule serait *rigoureusement exacte*.

L'hypothèse que la moyenne arithmétique de plusieurs quantités est la valeur la plus probable conduit à des inconséquences. Elle exige, par exemple, que la valeur la plus probable du carré de la quantité soit la moyenne arithmétique des carrés. On ne peut, pour écarter l'objection, faire une distinction entre les mesures directement observées et celles qui résultent d'un calcul. Un mécanicien pourrait aisément annexer à une balance une aiguille marquant le carré ou le logarithme du poids.

La même objection s'applique à la considération de la probabilité d'une erreur comme une fonction de l'erreur seule.

L'auteur pose ce problème : *Si Gauss avait adopté, au lieu de la moyenne, un autre mode de combinaison des mesures, quelle loi des erreurs en aurait-il déduite?*

La question n'est pas résolue, mais il est démontré que si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est la valeur la plus probable d'une quantité dont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des mesures, alors, pour que la probabilité d'une erreur soit fonction de l'erreur, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ doit être la moyenne arithmétique des x augmentée d'une fonction de leurs différences. En d'autres termes, f est telle que si tous les x sont augmentés de α, elle augmente elle-même de α.

Malgré les objections à la théorie de Gauss, son adoption est complètement justifiée par des expériences constamment répétées. En ce qui concerne la moyenne arithmétique, Verrero a montré (*voir* la revue de Charles Peirce dans l'*American Journal of Math.*, I, 59) que toutes les fonctions des mesures qu'il n'est pas absurde de prendre pour valeur la plus probable de la quantité mesurée doivent, si les mesures sont bonnes, concorder dans leurs résultats; il va sans dire que si les mesures sont mauvaises aucune méthode ne peut fournir de bons résultats.

On lit avec plaisir les définitions suivantes, énoncées avec tant de soin, de la précision et du poids.

La précision d'une mesure est dite α fois plus grande que celle d'une autre mesure, lorsque la probabilité d'une erreur comprise entre z et $z + dz$ pour une mesure du premier système est la même que celle d'une erreur comprise entre αz et $\alpha(z + dz)$ pour le second.

Le poids d'une observation est dit β fois plus grand que celui d'une autre observation, lorsque les conséquences que l'on peut déduire sur la valeur de la grandeur mesurée par une observation du premier système équivalent à celles que l'on peut déduire de β observations du second système donnant toutes le même résultat.

Si β est une fraction $\frac{m}{n}$, il faudra que m observations concordantes du premier système puissent être remplacées par n observations identiques du second système.

Le système d'observations qui donne à l'erreur z une probabilité proportionnelle à

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2}$$

aura k pour précision et k^2 pour poids, si l'on prend pour unités la précision et le poids d'une observation d'un système dans lequel la probabilité d'une erreur z serait proportionnelle à e^{-z^2}.

Ensuite M. Bertrand discute la suppression des observations douteuses. Il ne donne cependant aucun criterium, comme le fait Peirce, pour reconnaître quand elles doivent être rejetées. Cela

est laissé à l'appréciation du calculateur, sous la condition que le nombre des mesures adoptées soit grand.

Lorsqu'on a supprimé les mesures dont la différence avec la valeur probable est supérieure à λ, la valeur la plus probable de la nouvelle erreur est

$$\frac{1}{2n k^2}\,\frac{\Theta(k\lambda) - \dfrac{2k\lambda}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2\lambda^2}}{[\Theta(k\lambda)]^2}.$$

Gauss, dans ses derniers Mémoires, s'est affranchi, pour établir la méthode des moindres carrés, de toute hypothèse sur la loi des erreurs : à ce propos, l'auteur montre que négliger les carrés et puissances supérieures des erreurs équivaut à adopter la loi de l'exponentielle.

Il n'est pas toujours légitime d'égaler la valeur probable d'une fonction à sa vraie valeur. En voici un exemple :

On a mesuré cinq angles l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. Des conditions géométriques entraînent les égalités

$$l_4 + l_1 - l_3 = 0,$$
$$l_5 + l_2 - l_3 = 0.$$

On trouve d'après les mesures

$$l_4 + l_1 - l_3 = h_1,$$
$$l_5 + l_2 - l_3 = h_2.$$

En désignant les erreurs réellement commises par e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, on a donc

$$e_4 + e_1 - e_3 = h_1,$$
$$e_5 + e_2 - e_3 = h_2.$$

Quels que soient les nombres λ_1, λ_2, λ_3, le trinôme

$$\lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + \lambda_3 h_1 h_2$$

est connu.

Ce trinôme est une fonction homogène du second degré des erreurs, et si l'on nomme m^2 la valeur probable du carré de l'une de ces erreurs, celle du produit de deux d'entre elles étant nulle, on trouvera pour valeur probable de l'expression précédente calculée avant les mesures prises

$$m^2(3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3).$$

Égalant à la vraie valeur, on a

$$m^2 = \frac{\lambda_2 h_1^2 - \lambda_1 h_2^2 - \lambda_3 h_1 h_2}{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3},$$

donnant pour m^2 une infinité de valeurs.

Ce n'est pas là, néanmoins, la raison la plus sérieuse de l'impossibilité d'évaluer avec précision les chances d'erreur.

« On suppose *a priori* toutes les mesures également précises ; il est impossible, dans la plupart des cas, de croire à cette égalité : c'est faute de connaître aucune raison de préférence qu'on accepte l'équivalence des résultats. Mais, connues ou inconnues, ces raisons, si elles existent, doivent exercer une influence sur l'erreur réellement commise, et c'est celle-là dont on prétend donner les chances.

» Après avoir discuté par d'immenses calculs les observations du passage de Vénus sur le Soleil en 1761, Encke a trouvé pour la parallaxe du Soleil 8″,49 et pour erreur probable 0″,06. Il y avait, en conséquence, plus de 300000 à parier contre 1 que l'erreur n'atteindrait pas 0″,42, représentant sept fois l'erreur probable. Les astronomes, cependant, admettent aujourd'hui pour parallaxe 8″,91, qui correspond précisément à l'erreur 0″,42.

» On peut affirmer seulement, et c'est là le point important, que, si la somme des carrés des corrections est petite, la probabilité est grande pour que les observations aient été bien faites.

L'extension de la loi de Gauss aux erreurs de situation d'un point donne pour la position la plus probable du point le centre de gravité de poids égaux placés aux positions observées.

En se limitant au cas de deux coordonnées, la probabilité d'une erreur comprise entre u et $u+du$ pour x et entre v et $v+dv$ pour y est

$$G e^{-k^2u^2 - 2\lambda uv - k'^2v^2}\,du\,dv.$$

Les points d'égale probabilité sont sur une même ellipse ayant pour équation

$$k^2u^2 + 2\lambda uv + k'^2v^2 = H.$$

u et v désignent les différences entre les coordonnées du point considéré et la position véritable, centre commun de toutes les

ellipses semblables dont les dimensions sont proportionnelles à $\sqrt{\Pi}$.

L'auteur fait la comparaison entre la théorie et les résultats du tir de mille balles dans une cible.

La loi avait été pressentie par Galton dans son Ouvrage : *Discussion on the Data of Stature*, et plus complètement étudiée par M. Hamilton Dickson (voir *Natural Inheritance*, p. 100 et suiv.).

Il est regrettable que, dans le Chapitre sur les lois de la Statistique, l'auteur n'ait pas fait au moins quelque allusion aux recherches de Galton.

Un point qui pourrait passer inaperçu dans l'application des lois de la Statistique est bien mis en relief.

« Il y a bien des moyens de consulter le hasard; quand ils donnent le même résultat moyen, ils ne donnent pas pour cela les mêmes probabilités d'écart. Au lieu de tirer des boules dans une urne de composition donnée, on peut associer plusieurs urnes de compositions différentes et puiser alternativement dans chacune d'elles; les résultats moyens sont les mêmes que pour des tirages faits dans une urne de composition moyenne, les chances d'écart ne le sont pas.

» Si, pour prendre un cas extrême, au lieu de puiser 10000 fois dans une urne contenant une boule noire et une boule blanche, on puisait alternativement dans deux urnes contenant, l'une la boule noire, l'autre la boule blanche, on obtiendrait avec certitude 5000 fois la boule blanche, et l'écart deviendrait nul.

» La substitution de plusieurs urnes à une seule pour représenter les Tables de mortalité parut, *a priori*, très plausible. Parmi les individus du même âge, il est impossible de ne pas faire des catégories pour lesquelles les chances de vie sont inégales. »

Le Livre se termine très plaisamment par un Chapitre sur les applications erronées de la théorie des probabilités aux décisions judiciaires.

A propos de ce sujet, ne semble-t-il pas que la grande probabilité, qui s'attache à la concordance de jugements indépendants, est le meilleur argument possible en faveur de la culture de l'indépendance intellectuelle, et en faveur de l'abandon des erreurs systématiques qu'imposent l'éducation, le monde, les sectes et les partis ?

Je n'ai donné qu'un compte rendu très incomplet de cette admirable Introduction à la Science des probabilités : la vie et la vigueur de l'original ne peuvent être reproduites dans un court résumé.

ELLERY W. DAVIS.

Bulletin of the New-York mathematical Society (Octobre 1891).

(Traduit par P. COUSIN,
Professeur au Lycée de Caen.)

MASSAU (J.). — COURS DE MÉCANIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE GAND. Ier fascicule : *Géométrie symbolique, statique, cinématique*. 3e édition, revue et augmentée. 365 p. Petit in-folio; autographié. Gand; Lobel: 1891. (A Paris, chez Gauthier-Villars et fils.)

Les *Leçons de Mécanique* dont M. Massau publie la troisième édition sont claires et intéressantes ; elles se distinguent des ouvrages analogues par un emploi judicieux de ce que l'auteur appelle la *Géométrie symbolique;* il serait peut-être plus clair de dire *Géométrie des segments de droite ou des vecteurs*. Quoi qu'il en soit, le mode d'exposition adopté par M. Massau met très bien en évidence l'identité des démonstrations à apparence analytique ou à apparence géométrique; il n'y a, au fond, qu'une différence d'écriture; il va sans dire que les élèves doivent s'habituer à lire couramment, en quelque sorte, les deux modes d'écriture, quitte à avoir leurs préférences personnelles qui, le plus souvent, ne sont qu'une affaire d'habitude. A ce point de vue, M. Massau sera pour eux un excellent guide.

Nous indiquerons rapidement dans ce qui suit l'ordre qu'il a adopté.

Les deux premiers Chapitres se rapportent à la *Géométrie symbolique;* dans le premier, on s'occupe des opérations finies les plus simples sur les segments de droite : définitions, addition de deux ou plusieurs segments, multiplication d'un segment par un nombre, équations géométriques, projections, produit partiel (ou intérieur) de deux segments, centre des distances proportionnelles, représentation des aires par des segments ; moment de deux segments, moment d'un segment par rapport à une droite ou un

point, couples, tétraèdres, etc. Le second Chapitre se rapporte aux opérations infinitésimales effectuées sur un segment de droite qui dépend d'une variable numérique. On y remarquera, en particulier, la façon dont l'auteur présente les règles principales de la Géométrie infinitésimale et l'usage qu'il fait de ce qu'il appelle les *limites relatives*. On trouvera dans ce Chapitre les notions relatives aux dérivées et différentielles géométriques, la formule de Taylor pour un segment qui dépend d'une variable, ainsi que la notion d'intégrale géométrique. Dans le Chapitre qui suit sont exposées les *Notions générales de Mécanique*. On y définit la vitesse et l'accélération. L'auteur a rejeté toute discussion métaphysique sur la mesure du temps et la nature des forces; il se borne à énoncer et à préciser le sens de la loi de l'inertie et du principe de l'indépendance des effets des forces, pour en tirer l'équation fondamentale de la Mécanique

$$\overline{\mathrm{F}} = m\,\overline{\mathrm{J}}.$$

M. Massau insiste avec soin sur la mesure numérique des quantités qui figurent dans l'équation fondamentale, et sur les précautions qu'il faut prendre quand on change d'unités.

Ces trois premiers Chapitres constituent, en quelque sorte, une introduction, les deux premiers contenant, en quelque sorte, la partie géométrique commune à la Statique et à la Cinématique, partie qu'il y a évidemment avantage à séparer de l'une ou de l'autre de ces deux sciences; l'auteur aurait même pu aller un peu plus loin dans cette voie et faire rentrer dans cette introduction la théorie de la composition des segments qu'il expose dans la Statique, d'ailleurs de la façon la plus simple (statique du point et statique des solides invariables). Le parallélogramme des forces, au point de vue où se place l'auteur, est une conséquence du principe de l'indépendance des effets des forces.

M. Massau passe ensuite à la statique des systèmes composés : groupes de solides, polygones funiculaires, systèmes articulés, courbes funiculaires, etc. Deux Chapitres sont consacrés au principe des vitesses virtuelles; l'un contient une exposition théorique, l'autre l'application à l'équilibre de quelques machines simples; on reconnaît là, ainsi qu'à quelques exemples pratiques placés çà et là dans les autres Chapitres de la Statique, que l'au-

teur n'est pas seulement un géomètre. La recherche des centres de gravité, des notions élémentaires relatives à la théorie de l'attraction, la discussion de quelques problèmes simples donnés à titre d'exemple, terminent la Statique.

La Cinématique débute par l'étude du mouvement d'un point matériel : notions complémentaires sur la vitesse et l'accélération; formules relatives aux coordonnées polaires, etc.; l'auteur donne même quelques indications sur le cas des mouvements relatifs, quoique la composition des accélérations ne puisse pas être traitée, à ce moment, d'une façon complète.

Passant ensuite au mouvement d'un corps solide, il développe d'abord les propositions relatives aux vitesses à un moment donné, puis celles qui concernent un déplacement fini, enfin les plus importantes parmi celles qui se rapportent aux accélérations; il convient de signaler la façon dont l'auteur a insisté sur le cas d'une surface solide qui roule et glisse sur une surface fixe. Un Chapitre spécial est consacré aux mouvements relatifs. La partie la plus originale du Cours de M. Massau est peut-être le Chapitre intitulé : *Cinématique des systèmes déformables* et, en particulier, l'étude approfondie qu'il fait à ce propos de ce qu'il appelle la *fonction linéaire,* c'est-à-dire de l'opération qui consiste à substituer à un point un autre point dont les coordonnées sont des fonctions linéaires des coordonnées du premier : cette étude est faite d'une façon élégante au moyen de formules symboliques très simples. Un dernier Chapitre, intitulé : *Applications diverses*, comporte des sujets un peu hétérogènes : c'est d'abord la méthode de Roberval et la construction de Savary; puis les transformations que la Cinématique permet de faire subir, dans le cas d'un corps solide, à l'équation qui exprime le principe des vitesses virtuelles, la réciprocité du travail virtuel, la notion des axes indépendants et dépendants, ces derniers étant tels qu'ils puissent servir de lignes d'action à des forces en équilibre, et enfin quelques indications intéressantes sur le rôle que jouent, en Statique ou en Cinématique, les complexes et les congruences linéaires.

J. T.

PADÉ (H.). — PREMIÈRES LEÇONS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE. NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS. OPÉRATIONS SUR LES POLYNOMES. Avec une préface de *Jules Tannery*. 1 vol. in-8°; XXIII-81 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892.

Le petit Livre publié par M. Padé pourra rendre quelques services à l'enseignement, surtout à un moment où nos programmes officiels ont été modifiés dans le sens de la logique et imposent l'introduction des nombres négatifs au début de l'Algèbre. A coup sûr, cette introduction peut être faite autrement, mais l'exposition de M. Padé est très claire et met nettement en évidence les difficultés que présente la question; elle peut donc être utile même à ceux qui adopteraient une méthode différente. Un autre mérite de M. Padé est d'avoir, dans un livre d'enseignement, séparé nettement la théorie des opérations sur les nombres de la théorie des opérations sur les polynômes, théorie qu'il pousse jusqu'à la division, de manière à bien éclaircir la notion d'identité entre deux polynômes.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STOFFAES. — Cours de Mathématiques supérieures a l'usage des candidats a la Licence ès Sciences physiques. 1 vol. in-8° ; VII-531 p. Paris. Gauthier-Villars et fils ; 1891.

L'organisation actuelle de nos Facultés des Sciences présente un inconvénient dont souffrent tous ceux qui n'ont pas suivi, dans les Lycées, la classe de Mathématiques spéciales et qui ne peuvent trouver, à la Faculté, le moyen d'apprendre ces éléments de l'Analyse et de la Géométrie analytique, indispensables aux auditeurs des cours de Mathématiques et de Physique ; il faudra sans doute, un jour ou l'autre, créer, au moins dans quelques Facultés, des enseignements qui relient aux cours élémentaires des Lycées les cours préparatoires aux Licences ès Sciences mathématiques et physiques ; la nécessité de ces enseignements intermédiaires se fera sentir d'autant plus vivement en raison du caractère particulier de l'enseignement donné dans les classes de Mathématiques spéciales, en vue des concours qui donnent accès aux grandes Écoles scientifiques.

Quoi qu'il en soit, en attendant, les livres qui permettent aux étudiants de combler, tant bien que mal, une lacune regrettable, seront sans doute les bienvenus. M. l'abbé Stoffaes vient de publier un pareil Livre ; il n'a pas d'autre prétention que d'être utile et c'est à ce point de vue qu'il faut le juger : il contient les matières essentielles, c'est-à-dire quelques principes d'Algèbre, les éléments du Calcul différentiel et intégral et ceux de la Géométrie analytique qui, ainsi que l'explique une Note, doivent être, au moins en partie, étudiés avant les applications géométriques du Calcul intégral ; le tout est exposé avec mesure et concision, et avec une clarté très suffisante pour des lecteurs qui n'ont ni le temps, ni souvent même le désir, d'aller au fond des choses. Pour ceux qui voudraient y aller, l'auteur les renvoie aux « Maitres de la Science », c'est-à-dire « Briot et Bouquet, Serret, MM. Bertrand, Rouché, de Comberousse, Gilbert, Pruvost, de Longchamps, etc. » Si M. l'abbé Stoffaes n'a pas voulu distinguer parmi ces différents

Maîtres, et recommander les uns plutôt que les autres, c'est sans doute excès de modestie de sa part, et j'espère que tous lui en sauront gré. J. T.

HAGEN (J.). — SYNOPSIS DER HOEHEREN MATHEMATIK. T. I : *Arithmetische und algebraische Analyse*. Gr. in-4° ; VIII-398 p. Berlin, Felix-L. Dames ; 1891. (A Paris, chez Gauthier-Villars et fils.)

Le but que poursuit M. Hagen, Directeur de l'Observatoire de *Georgetown College*, en publiant ce *Tableau* des hautes Mathématiques est extrêmement louable : avoir une vue d'ensemble sur les différentes parties des Mathématiques, trouver, pour les principaux résultats, des renseignements historiques et bibliographiques, c'est assurément ce que désirent bon nombre d'étudiants et de professeurs ; l'Auteur, dans sa préface, a dit qu'il avait voulu faire une sorte de guide ou d'itinéraire qui permît de s'orienter dans l'immense domaine des Mathématiques. On ne saurait mieux caractériser que par cette ingénieuse comparaison le service qu'il a voulu rendre. Il n'est que juste de dire que M. Hagen a conçu son Livre d'une façon très large et qu'il a commencé de l'exécuter avec un grand soin. Souhaitons-lui de pouvoir le terminer rapidement, car sa place sera marquée dans toutes les bibliothèques mathématiques.

Un livre de cette nature comporte des inconvénients inévitables ; si complet que M. Hagen ait essayé de faire le sien, il ne pouvait entrer dans son esprit de fournir à chacun tous les renseignements dont il a besoin sur le point particulier qui l'intéresse ; et si son Livre est, dans la mesure du possible, complet aujourd'hui, il ne le sera plus demain. Quoiqu'il s'agisse d'un guide, on ne peut raisonnablement espérer que le Livre de M. Hagen ait jamais autant d'éditions que les guides de M. Baedeker, qui recommande judicieusement d'acheter toujours la plus récente, et les Mathématiques, en ce temps-ci, changent et s'accroissent encore plus vite que les notes des aubergistes. Quoi qu'il en soit, le guide de M. Hagen sera utile pendant longtemps, car, après tout, ce que l'on sait aujourd'hui en Mathématiques sera toujours sans doute le fondement de ce que l'on saura plus tard.

Voici les titres des divers Chapitres contenus dans le premier Volume : Théorie des nombres. — Des nombres complexes. — Des combinaisons. — Des séries. — Des produits infinis et des facultés. — Des fractions continues. — Des différences et des sommes. — Des fonctions. — Des invariants. — Des déterminants. — Des groupes de substitutions. — Des équations.

L'Ouvrage se termine par une Table des matières (dans l'ordre suivi dans l'Ouvrage), — par un Index des principaux ouvrages cités ou utilisés, enfin par une Table alphabétique des matières. L'Auteur a tout fait pour que son Livre fût commode à consulter.

NASSIRUDDIN-EL-TOUSSY. — TRAITÉ DU QUADRILATÈRE, d'après un manuscrit tiré de la Bibliothèque de S. A. Edhem Pacha, ancien Grand-Vizir, traduit par ALEXANDRE PACHA CARATHEODORY, ancien Ministre des Affaires étrangères. 214 pages in-8° de texte français, 187 pages de texte arabe. Constantinople, typographie et lithographie Osmanié, 1891. (A Paris, chez Gauthier-Villars et fils.)

Nasir Eddin, de Thous dans le Khorassan, qui vécut de 1201 à 1274, est bien connu, dans l'histoire de l'Astronomie, comme auteur des *Tables iskhaniennes*, dans celle de la Géométrie, comme ayant donné d'Euclide une édition dont le texte arabe a été imprimé à Rome en 1594. Le *Traité du quadrilatère*, dont une traduction en français vient de paraître, a été trouvé dans un manuscrit qui ne porte point le nom de l'auteur, mais où il est dit, d'une part, que l'Ouvrage fut achevé à une date de l'hégire correspondant au 22 mars 1261 ; d'un autre côté, qu'il avait d'abord été composé en persan, mais que l'auteur lui-même le traduisit en arabe. Comme à cette époque on ne connaît aucun mathématicien persan autre que Nasir Eddin auquel on puisse attribuer un Traité aussi important que celui du quadrilatère, il n'y a évidemment pas à le lui contester [1].

L'intérêt qu'offre cet Ouvrage est considérable ; en réalité, c'est

(1) Le manuscrit a été écrit quelques années après sa mort.

un Traité de Trigonométrie et il nous révèle jusqu'à quel point les Arabes avaient développé cette branche de la Mathématique. Il nous permet d'embrasser dans son ensemble comme dans ses détails la transformation qui substitua aux procédés des Grecs une méthode tout à fait analogue à celle dont nous nous servons aujourd'hui. A la vérité, les mathématiciens de l'Occident, au moyen âge et à la renaissance, n'ont emprunté aux Arabes, en ce qui concerne la Trigonométrie, que des connaissances bien inférieures à celle dont fait preuve Nasir Eddin; mais s'ils ont dû réinventer pour leur compte ce que les Arabes orientaux avaient déjà trouvé, il n'en sera que plus intéressant de comparer les voies suivies de part et d'autre et l'on pourra d'ailleurs trouver, dans l'auteur arabe, des procédés d'exposition qui ne sont nullement à dédaigner.

Le *quadrilatère* qui donne son nom au Traité est le quadrilatère complet formé sur la surface de la sphère par un triangle sphérique et un arc de grand cercle transversal. On sait que, dans un tel quadrilatère, le produit des sinus de trois segments non adjacents est égal au produit des sinus des trois autres.

Cette propriété fondamentale est la seule qui se trouve appliquée dans les Ouvrages mathématiques des Grecs (en particulier dans l'Almageste) pour la solution des problèmes trigonométriques qui se posaient en Astronomie. Elle se trouve d'ailleurs énoncée par Ptolémée (et avant lui par Ménélaos) sous une forme quelque peu différente, notamment en ce que les Grecs, au lieu de Tables de sinus, se servaient de Tables de cordes des arcs.

Malgré l'apparence, le mot *trigonométrie* n'est de fait nullement grec, et les anciens en réalité ne se posaient aucunement le problème de la résolution des triangles. Ils ne se servaient en tous cas des cordes des arcs qu'en Astronomie, c'est-à-dire à peu près exclusivement pour calculer des arcs sur la sphère; mais, au lieu de chercher comme nous à rattacher ces arcs à des triangles dont trois éléments sont connus, ils les rattachaient à des quadrilatères complets dont cinq éléments fussent déterminés (¹).

(¹) Si, par exemple, pour un triangle sphérique ABC, rectangle en A, on trace l'équateur correspondant au pôle B, et qu'on prolonge les trois côtés du triangle jusqu'à la rencontre de cet équateur, on forme ainsi des quadrilatères complets pour lesquels les relations entre six segments correspondent à des formules de résolution du triangle.

C'est dans cet état que les Arabes trouvèrent la Science, sauf que les Hindous qui la leur transmirent les premiers, employaient le sinus au lieu de la corde [1]. Depuis l'invention (probablement due à Apollonius de Perge), il n'y avait eu aucun progrès décisif.

Aboul-Wéfa (939-998) fut le premier qui constitua la théorie des tangentes [2], qu'il appela *ombres premières,* et des cotangentes (*ombres secondes*).

Mais Dschabir-ibn-Aflah (Geber) de Séville, au XIe siècle, dont les livres d'Astronomie, traduits au XIIe siècle par Gérard de Crémone, vulgarisèrent dans l'Occident les procédés arabes, semble ignorer les travaux d'Aboul-Wéfa; il montre une grande habileté dans le maniement des équations, démontre directement diverses formules pour les triangles rectangles, sait enfin déterminer un angle par son cosinus; mais c'est là le seul progrès considérable qui semble réalisé depuis Ptolémée.

Pour les triangles quelconques, Albatàni (mort en 929) connaissait déjà la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Voilà à peu près tout ce que l'on savait sur les travaux des Arabes, avant la traduction du *Traité du quadrilatère* de Nasir Eddin.

Dans ce Traité, la résolution des triangles quelconques est nettement posée comme but de l'Ouvrage, dont elle forme le Livre V. Nasir Eddin nous apprend comment, pour établir la théorie de cette résolution, ses précurseurs avaient cherché à substituer au quadrilatère de Ptolémée une autre figure fondamentale plus simple. Or il s'en trouvait déjà une dans l'Almageste (et même chez Ménélas), laquelle n'est qu'un cas particulier, le plus fréquemment employé par Ptolémée, du quadrilatère complet. En la simplifiant, on la ramène à un groupe de deux triangles ABC, A'BC' rectangles en A et A' et ayant en B un angle commun. Cette figure, que nous retrou-

(1) La substitution du sinus aux cordes était tellement indiquée qu'elle a probablement été faite par les Grecs alexandrins de l'École rivale d'Hipparque, à qui les Hindous ont emprunté leurs connaissances astronomiques.

(2) Cependant déjà considérée avant lui par Albatàni et Ibn Younis.

vons dans Geber, et que Nasir Eddin appelle *supplémentaire* (¹), aurait été considérée en premier lieu par Thabit-ben-Korrah (836-901); l'idée de s'en tenir à cette figure pour établir la théorie générale aurait été développée par Abou-Nasr-Mansour, le commentateur de Ménélas, dans son *Almageste royal.* Cette figure donne, pour les triangles rectangles ABC, A'BC', la relation fondamentale

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin a'}{\sin b'},$$

et on en déduit aisément, pour un triangle quelconque, la formule

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

dont la priorité serait d'ailleurs disputée à Abou-Nasr par Aboul-Wéfa et Alhodjendi (vers 992).

D'autre part, par une construction spéciale sur la figure *supplémentaire,* Aboul-Wéfa aurait inventé une figure dite *ombrée* (c'est-à-dire des tangentes) donnant, pour les triangles rectangles précités ABC, A'BC', la relation fondamentale

$$\frac{\operatorname{tang} b}{\sin c} = \frac{\operatorname{tang} b'}{\sin c'}.$$

Au moyen de ces deux figures, Nasir Eddin établit *toutes* nos formules modernes pour les triangles rectangles; quant aux triangles quelconques, il enseigne à les résoudre, soit en les divisant en deux triangles rectangles, soit en les complétant par la figure *supplémentaire* (²) et en appliquant à celle-ci la formule d'Abou-Nasr ou celle d'Aboul-Wéfa. Dans le cas où l'on connaît les trois angles, il sait construire le triangle que nous appelons *supplémentaire.*

Nasir Eddin expose cette transformation de la méthode de Ptolémée comme si elle avait été amenée par la difficulté théorique de démontrer, dans tous les cas de figures possibles, les relations

(¹) Pour marquer qu'elle peut suppléer le quadrilatère (?). Le terme choisi par le traducteur est peu heureux, en raison de son sens technique spécial.

(²) En prolongeant les trois côtés jusqu'à l'équateur correspondant à un sommet pris pour pôle.

que fournit un quadrilatère complet, et de fait, après avoir consacré son premier Livre à montrer qu'une même relation entre 6 quantités peut prendre 18 formes différentes, il énumère dans son second Livre les diverses figures que peut prendre le quadrilatère complet; leur nombre est de 48 (qu'on peut ramener, il est vrai, à 12), et les segments sont au nombre de 12 qu'on peut prendre 6 par 6 de toutes les manières possibles. On arrive ainsi au chiffre effrayant de 3456 cas et de 20736 démonstrations, qui est encore bien inférieur à celui que, pour ne rien laisser à désirer, on pourrait, dit-il, fixer à 497664.

On voit dans quel dédale les géomètres arabes s'étaient jetés, par recherche du raffinement et défaut d'esprit de généralisation. Mais, parmi eux, il s'en était heureusement trouvé qui avaient su éviter cette impasse et s'ouvrir des voies nouvelles.

Ainsi, dans le Livre III du Traité de Nasir Eddin [1], nous trouvons : 1° une théorie très claire de la résolution des triangles rectilignes, fondée sur la proportionnalité des côtés et des sinus des angles opposés; cette théorie est mise en regard d'une autre dans laquelle on emploie les cordes au lieu des sinus et qui était, jusqu'à présent, la seule connue, d'après Geber, comme pratiquée par les Arabes; 2° des procédés pour déterminer deux arcs dont on connaît la somme ou la différence (plus petite qu'une demi-circonférence) et le rapport des sinus. Ces procédés qui doivent servir pour la résolution des triangles sphériques dont on connaît les trois côtés, sont encore, il est vrai, calculés pour l'emploi des Tables de sinus seuls (non de tangentes). On a, par exemple, d'après Aboul-Nasr,

$$\sin a = \frac{\sin(a+b)}{\sqrt{\sin^2(a+b) + \left[\cos(a+b) + \dfrac{\sin b}{\sin a}\right]^2}}.$$

Ajoutons enfin qu'Albirouni est indiqué comme ayant pris le rayon pour unité [2].

Nous avons en somme, dans le Traité de Nasir Eddin, un ensemble décisif de faits jusqu'à présent inconnus qui assurent aux

(1) Le livre IV donne la théorie détaillée du quadrilatère complet.

(2) A la vérité, en le divisant en soixante minutes, et conservant, par conséquent, l'usage de la numération sexagésimale.

Arabes la priorité de découvertes que l'on croyait avoir été réservées aux Occidentaux.

Il n'est certainement plus permis de dire avec Hankel en parlant de l'invention des tangentes :

« Cet important progrès d'Aboul-Wéfa a eu presque le même sort que sa découverte de la variation de la Lune. Il n'y a plus tard qu'un seul auteur, Oloug-Bey, qui la mentionne; elle est restée sans influence sur le développement ultérieur de la Trigonométrie et, chez les Latins, au XVe siècle, Regiomontanus dut encore une fois inventer les tangentes (1).

A la vérité, la gloire de Regiomontanus reste entière, car les derniers progrès réalisés par les Arabes d'Orient étaient bien, semble-t-il, restés inconnus à leurs frères d'Occident et par suite aux Latins. Mais, si Regiomontanus reste pour nous le véritable créateur de la Trigonométrie moderne, on ne voit plus qu'il ait en rien, comme on le croyait, dépassé les Arabes du XIIIe siècle, et il est précisément curieux de retrouver, dans ses procédés qui paraissent les plus originaux, une profonde analogie avec les méthodes exposées par Nasir Eddin.

Je ne puis me laisser aller à développer ici des rapprochements de ce genre; mais qu'en terminant il me soit permis de féliciter hautement l'éminent traducteur d'avoir occupé ses loisirs à faire connaître au monde savant une œuvre aussi intéressante, et aussi digne d'être tirée d'un oubli qui menaçait d'être éternel.

PAUL TANNERY.

GALILÉE. — LE OPERE DI GALILEO GALILEI, edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume I. Firenze, Barberà, 1890, 423 pages in-4°.

Nous avons annoncé, il y a deux ans (1890, pages 123 et suiv.), dans quelles conditions était entreprise, aux frais du gouvernement italien, une nouvelle édition complète des Œuvres de Ga-

(1) *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (p. 285. Leipzig, Teubner; 1874).

lilée. Aujourd'hui deux Volumes ont paru ; la beauté typographique, la singulière correction du texte sont au-dessus des éloges. On ne pouvait, certes, mieux attendre du légitime orgueil d'une nation honorant un de ses fils les plus illustres, ni, d'autre part, de la scrupuleuse conscience et du jugement éclairé dont M. Favaro et ses savants collaborateurs avaient déjà donné tant d'autres preuves.

Le premier Volume, que je me propose d'analyser seul aujourd'hui, comprend cinq écrits différents sous les titres : 1° *Juvenilia;* 2° *Theoremata circa centrum gravitatis solidorum;* 3° *La Bilancetta;* 4° *Postille ai libri de Sphæra et Cylindro di Archimede;* 5° *De motu.* Il se termine par un index des noms propres cités.

I. Juvenilia. — C'est un très long écrit latin inédit, publié d'après un manuscrit autographe de Galilée, dont la date remonte à 1584. A cette époque, l'illustre Pisan, âgé de vingt ans à peine, était encore étudiant dans sa patrie et suivait les cours de Philosophie et de Médecine. Nous avons d'ailleurs devant nous, non pas une œuvre précoce, mais simplement une copie de leçons professées à Pise par un des maîtres de Galilée (probablement Francesco Buonamici) sur les *Livres du Ciel* d'Aristote, et divisées en Traités sur le monde, le ciel, les changements de qualités, les éléments et les qualités premières. L'ensemble est d'une remarquable érudition et d'une dialectique qui n'est nullement à dédaigner. Quelques mutilations sont à regretter.

Les éditeurs ont eu quelque scrupule à admettre, en tête des Œuvres de Galilée, un travail où sa part personnelle s'est tout au plus bornée à des changements insignifiants d'un texte qu'il avait sous les yeux. On ne peut que les féliciter du parti auquel ils se sont arrêtés.

C'est, en tout cas, une excellente occasion d'apprécier l'enseignement scolastique tel qu'il était alors donné en Italie et tel que Galilée eut à le combattre plus tard. Désormais nous ne le connaissons guère que par les sarcasmes dont l'ont couvert les adversaires qui en ont triomphé et nous sommes portés à en exagérer les défauts incontestables. Le vice capital en était surtout dans la fausse conception du but ; il était exclusivement calculé pour former

à la discussion orale, nullement pour aboutir à quelque autre résultat pratique. De là, l'appel continuel aux autorités, l'ignorance de l'usage qu'on peut faire des observations et des expériences, les raffinements inouïs sur le pour et le contre de questions mal posées ou insolubles. Mais, cela mis à part, il faut reconnaître que cet enseignement trempait singulièrement les esprits au-dessus du médiocre et que, sous la condition de se plier à des formes convenues, il permettait, en réalité, une très grande liberté d'opinions et agitait sous toutes leurs faces, à côté de problèmes plus ou moins oiseux, la plupart de ceux dont la solution fait la gloire de Galilée.

Le joug d'Aristote, quoiqu'on en ait dit, était une pure fiction, car la dialectique était dressée à tirer des écrits du Stagirite ce qu'on voulait y lire. Le danger intellectuel, c'était plutôt, comme résultat du genre de liberté laissé à la discussion, un scepticisme qui se donnait d'autant plus carrière dans les matières scientifiques que, sur d'autres sujets, il fallait respecter absolument les définitions des dogmes reçus par l'Église. Plus on étudiera les scolastiques contre lesquels ont eu à lutter Galilée et Descartes, plus l'on se convaincra que la difficulté réelle, pour ces grands rénovateurs, était de faire accepter un dogmatisme rigoureux à des gens habitués à un probabilisme très large. Ils ne voulurent pas plier le mode de leur doctrine aux conventions traditionnelles, ils prétendirent, à l'ancien enseignement, en substituer un nouveau, aussi bien dans la forme que dans le fond. Voilà ce qui suscita contre eux une si vive opposition; voilà pourquoi Galilée fut poursuivi comme hérétique, à propos de l'opinion de Copernic, laquelle, dans l'écrit scolastique qu'il copiait à vingt ans, est discutée très poliment et considérée comme parfaitement libre; et si Descartes, plus politique et dégagé personnellement des coteries universitaires, échappa au même sort, ce ne fut certes pas la faute des professeurs que ses théories troublaient sur le commode oreiller du doute.

II. Les *Théorèmes sur le centre de gravité* (pages 185-208), composés en latin, ont été publiés par Galilée comme appendice à ses *Discorsi* de 1638. Il les avait rédigés à l'âge de vingt et un ans, après deux ans d'études de Mathématiques; comme il le

dit, il abandonna cette matière après s'être vu devancé par Luca Valerio.

Dans ces théorèmes, Galilée détermine, à la façon des anciens, le centre de gravité du cône, de la pyramide et du conoïde parabolique (paraboloïde de révolution), ainsi que de leurs troncs. Ces propositions, certainement connues d'Archimède, avaient été conclues des écrits de ce dernier par Commandin, la démonstration ancienne étant perdue; celle de Galilée, qu'il rédigea pour remédier aux imperfections du travail de Commandin, n'a évidemment qu'un intérêt historique, mais elle nous montre à quel point le jeune étudiant de Pise, longtemps insoucieux des Mathématiques, s'était en peu de temps profondément assimilé l'esprit des méthodes d'Archimède.

III. La *Bilancetta*, qui est le plus ancien document où Galilée ait montré son génie d'inventions originales, est une autre preuve notable des études qu'il consacrait alors à Archimède. Cet écrit de six pages (215-220), en italien, publié pour la première fois par Hodierna (Palerme, 1644) deux ans après la mort de Galilée, fut composé vers 1585 et communiqué dès lors en manuscrit par l'auteur. Au sujet de la légende relative à la couronne de Hiéron, il s'était proposé de chercher un moyen pratique de résoudre le problème, car ceux que racontent les écrivains anciens n'ont certainement pas été employés par Archimède. Galilée combina à cet effet sa *balancette*, qui est une romaine hydrostatique, avec un ingénieux procédé pour augmenter la sensibilité de l'appareil.

A ce petit écrit, M. Favaro a ajouté une Table de pesées, dans l'air et dans l'eau, de métaux et pierres précieuses, qu'il avait déjà publiée dans ses *Inedita Galilæana*. Elle nous montre l'inventeur de la *balancette* s'en servant réellement pour des mesures exactes et procédant à des recherches méthodiques sur les densités.

IV. Un troisième témoignage des études de Galilée sur Archimède, à cette période de sa vie, consiste dans les *Annotations* qu'il écrivit dans les marges d'un exemplaire de l'édition de Bâle, sur le traité *de la Sphère et du Cylindre*, et qui ont été conservées par une copie de Vincenzio Santini. Ces *Annotations*

(pages 233-242) sont ou bien motivées par des fautes dans l'édition où elles ont pour but de compléter quelques démonstrations; mais désormais il n'y aurait plus rien à en tirer pour la critique ou l'explication du texte d'Archimède.

V. Le Volume se termine par un long écrit latin (pages 251-419) qui en constitue, sans aucun doute, la partie la plus intéressante, d'autant qu'il n'a pas été compris jusqu'à présent dans les éditions des *Œuvres de Galilée*. En fait, cet écrit comprend trois rédactions successives (deux sous forme de Traité, une en dialogue) des idées de l'illustre Pisan sur le mouvement vers 1590. A cette date, il enseigne déjà dans l'école où il a étudié; il a déjà composé sur l'*Almageste* des commentaires qu'il se propose de publier, mais qui sont entièrement perdus; il a exécuté les célèbres expériences de la tour de Pise et convaincu Aristote d'une erreur de fait. Comme écrivain, il est en pleine possession de son talent; ce travail de jeunesse sur le mouvement, qu'il a repris par trois fois, représente, sous chacune des rédactions, un ensemble complet, sous une forme soignée et d'apparence définitive; cependant Galilée ne l'a jamais publié : il s'est contenté, longtemps après, d'en tirer des morceaux qu'il a textuellement insérés dans ses *Dialogues des nouvelles Sciences*.

La récente publication de l'ensemble de ce travail a jeté un jour inattendu sur le développement des idées de Galilée et elle est de nature à changer entièrement l'appréciation de son caractère scientifique. Où nous étions habitués à voir un génie principalement porté aux expériences, ayant de prime abord le don de les conduire méthodiquement et d'en tirer des conclusions certaines et inattendues, nous rencontrons un esprit profondément méditatif qui combine le double enseignement qu'il a reçu, procède par argumentation *a priori*, et ne recourt à l'expérience que pour trouver un appui contre les opinions en vogue. En suivant les leçons de Buonamici, il s'est imbu des doctrines scolastiques sur la pesanteur; l'étude d'Archimède (*Des corps flottants*) lui révèle le rôle du milieu déplacé et lui montre que la gravité peut aussi bien amener des mouvements de bas en haut et de haut en bas. Voilà son point de départ; il en déduit, contre Aristote, qu'il n'y a pas de corps légers absolument (c'est-à-dire tendant naturellement en

haut), opinion qui, au reste, avait été soutenue dès l'antiquité et dans l'école même du Stagirite; mais, pour assurer le triomphe de cette opinion, Galilée va élargir le champ de ses attaques contre les doctrines dominantes; il va critiquer, l'un après l'autre, tous les points de la théorie du mouvement et de la pesanteur d'après Aristote, et il sera assez heureux pour frapper juste et à coups décisifs. Cependant, à cette théorie qu'il renverse, il en substitue tout d'abord une autre qui est également *a priori*, aussi ingénieuse et aussi fausse; à ce moment, il lui manque deux notions que l'antiquité ne lui a pas fournies et qu'il n'a pas encore dégagées par une réflexion plus profonde : c'est, d'une part, la claire notion de masse à mouvoir, indépendamment du poids moteur; d'un autre côté, l'idée que l'accélération du mouvement soit due à la continuité de l'action. Il est donc arrivé à penser que, dans la descente naturelle des graves, le mouvement doit être uniforme et la vitesse proportionnelle à la différence de densité du grave et du milieu déplacé. Mais le fait qu'un grave est maintenu au repos créerait un état violent et le mobile ne pourrait passer de la vitesse nulle à la vitesse définitive que par des degrés successifs franchis d'autant plus rapidement que la différence de densité avec le milieu serait plus faible : de là l'accélération observée dans les premiers temps de la chute. Galilée admet même comme vrai, sur la foi d'Averroès, que, tout à fait au début, le corps plus léger tombera plus vite que le corps plus lourd, que ce n'est qu'un peu plus tard que ce dernier dépassera le premier. C'est bien là, ce me semble, une preuve suffisante qu'il n'a pas recours à l'expérience pour asseoir les fondements de sa théorie.

En revanche, il est déjà en possession de la loi suivant laquelle la pesanteur diminue sur un plan incliné; c'est là le point de départ de ses recherches ultérieures qui le conduisirent à la découverte de la loi de l'accélération, à laquelle il semble n'être arrivé qu'en 1604, ainsi bien longtemps après la date des écrits dont nous venons de parler

Il est réellement difficile de reconnaître, tout compte fait, pourquoi la gloire de cette découverte fut réservée à la renaissance : l'antiquité avait eu son Copernic dans Aristarque de Samos; le siècle d'Hipparque était encore assez riche en génies pour qu'il eût pu avoir son Galilée. Le long retard qui, pendant dix-huit

siècles, entrava les progrès de la Mécanique, ne peut plus s'expliquer par le défaut de la méthode expérimentale chez les Grecs, s'il est établi que la découverte ne fut obtenue que par des raisonnements *a priori*, et que l'expérience n'intervint que pour confirmer les conclusions. On ne peut certainement dénier aux anciens toutes les capacités qui étaient nécessaires pour arriver au même résultat, abstraction faite, bien entendu, de ce qui constitue personnellement un génie comme celui de Galilée.

La seule explication à donner est peut-être que le problème des mouvements dus à la pesanteur n'intéressait pas suffisamment les anciens au point de vue pratique pour que son étude théorique ait tenté un savant capable de le résoudre. Au XVIe siècle, la question de la trajectoire et des mouvements des projectiles de l'artillerie avait acquis, au contraire, une importance capitale dont témoigne notamment l'essai malheureux, mais néanmoins très intéressant, de Nicolo Tartaglia dans sa *Nova Scientia* de 1537. On voit, dans les écrits de Galilée de 1590, que la même question le préoccupe déjà aussi et que c'est elle qui le conduit à poser le problème du mouvement des graves sur un plan incliné.

Ces écrits sont suivis, dans le premier Volume de l'Édition nationale italienne, par de courts fragments et des notes relatives au même sujet. J'y relève un *lapsus calami*.

Page 116, l. 16-20, Galilée cite Aristote (3° *Divinorum*, particula 8) : « tangit enim circulus regulam non secundum punctum, sed sicut dicebat Pythagoras redarguens geometras. » Au lieu de *Pythagoras*, il faut lire *Protagoras*. Ce passage d'Aristote est, d'ailleurs, *Metaph.* II, Chap. 2, 20. PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

SUR CERTAINES SURFACES A PLAN DIRECTEUR;

PAR M. CH. BIOCHE.

Les surfaces réglées à plan directeur peuvent être caractérisées par ce fait que l'une des séries de lignes asymptotiques est donnée par les intersections de la surface, avec un plan qui se déplace parallèlement au plan directeur. J'ai trouvé que, pour certaines surfaces particulières, l'autre série pouvait être donnée aussi par les intersections avec une surface de forme et de grandeur invariable qui éprouverait une translation, la direction de cette translation étant fixe et parallèle à une droite du plan directeur. Cette propriété appartient à toutes les surfaces dont les génératrices font partie d'une congruence linéaire singulière, ayant sa directrice rejetée à l'infini.

Pour définir une surface à plan directeur, je considère une courbe (c)

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z),$$

et par chaque point je mène la parallèle au plan $z = 0$, qui est située dans le plan osculateur. J'ai ainsi une surface ayant pour asymptotique la courbe c. Les autres asymptotiques sont données par

$$x = \varphi(z) + \frac{\alpha\varphi''}{\sqrt{\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi''}},$$

$$y = \psi(z) + \frac{\alpha\psi''}{\sqrt{\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi''}},$$

α étant une constante arbitraire, et les accents désignant des dérivées prises par rapport à z. Si les projections sur un des plans de coordonnées se déduisent les unes des autres par translation, les asymptotiques seront situées sur des cylindres égaux et parallèles. Or on voit que si l'on a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi''}{\varphi''}\right) = \text{const.},$$

en désignant cette constante par $\frac{\alpha^2}{\lambda^2}$, les projections sur le plan des xz sont données par

$$x - \lambda = \varphi(z),$$

ce qui met en évidence la propriété énoncée.

On peut intégrer deux fois l'équation de condition et interpréter le résultat obtenu. On voit ainsi que les tangentes de la courbe c appartiennent à un complexe linéaire dont fait partie la droite de l'infini du plan $z = 0$; et que, par suite, les génératrices de la surface font partie d'une congruence linéaire singulière ayant cette droite pour directrice. D'ailleurs, on peut, en tenant compte de cette équation de condition, reconnaître que l'équation générale des surfaces en question est de la forme

$$ay = xz + F(z),$$

que j'ai signalée (*Bulletin de la Soc. math. de France*, XIX, p. 120) comme représentant les surfaces dont les génératrices appartiennent à une congruence singulière dont la directrice est à l'infini.

On peut trouver d'autres surfaces que des cylindres pour déterminer les asymptotiques. En particulier, si l'on prend $F(z) = Kz^m$ ou $F(z) = Ke^z$, les lignes asymptotiques sont situées sur des paraboloïdes égaux déduits les uns des autres par translation. Mais je me borne, quant à présent, à ces exemples d'une propriété qui m'a semblé assez curieuse.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ÉDOUARD LUCAS. — THÉORIE DES NOMBRES. — *Tome Ier* : Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique. XXXIV-520 p. Gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

Une mort prématurée a frappé Éd. Lucas dans toute la plénitude de son talent, trois mois à peine après l'impression de son Volume *Sur la théorie des nombres*. Il se proposait, pour terminer une œuvre méditée depuis longtemps, d'y ajouter au moins deux tomes d'égale importance; malheureusement, on ne peut guère espérer tirer de ses papiers plus que la valeur d'environ 300 pages qui, à la vérité, formeront un second volume complétant le premier sur les points essentiels, mais où l'on ne retrouvera sans doute pas la richesse extraordinaire des questions traitées ou indiquées à titre d'*exemples*, qui caractérise la partie déjà parue.

Ces *exemples*, qui ne sont, la plupart du temps, que des énoncés, ou au sujet desquels l'auteur s'est borné à un développement de quelques lignes, constituent un des plus grands attraits de l'œuvre; loin d'être de simples applications des théories exposées, ils ouvrent à chaque page, pour ainsi dire, des perspectives inattendues sur les sujets les plus variés. Puis la fenêtre se referme brusquement, une autre s'ouvre et le point de vue a changé.

Éd. Lucas n'avait pas l'esprit fait pour l'ampleur d'une exposition méthodique et complète; prime-sautier et curieux, c'est aux accidents de route qu'il s'intéresse et il les multiplie à plaisir; à sa suite, on oublie aisément et bien volontiers le but vers lequel on marche et le tracé général du chemin que l'on doit suivre, mais d'où l'on dévie à chaque pas. Bien plus, si l'on recherche exactement ce chemin, on s'aperçoit qu'il n'est, le plus ordinairement, que jalonné, et qu'il faut une certaine attention pour passer d'un point à l'autre. C'est que l'auteur, pour la théorie proprement dite, affecte une concision et une sobriété qui donnent souvent à ses démonstrations un tour singulièrement élégant, mais qui obligent le lecteur à des efforts intellectuels constants.

même sur les questions tout à fait classiques. Cette sobriété dans l'exposition, qui fait contraste avec la profusion des exemples et des remarques d'érudition historique, témoigne incontestablement en faveur de la puissance et de l'originalité d'Éd. Lucas; mais il me semble que, comme modèle, il vaut mieux l'admirer que de chercher à l'imiter.

Il a regretté, dans sa Préface, de n'avoir pu faire subir à son Ouvrage l'épreuve d'un enseignement public. On doit, je crois, partager ce regret. Les Chapitres de son Livre font l'effet de programmes de leçons composées, mais non faites; avec des matériaux en surabondance, mais sans qu'il y ait, entre les diverses parties, cet équilibre auquel on ne peut guère arriver que devant un auditoire.

Ces remarques, je me hâte de le dire, ne portent que sur la composition; elles n'enlèvent rien au mérite d'une œuvre que l'auteur avait le droit d'espérer pouvoir refondre dans une édition ultérieure et qui, telle qu'elle est, est, au plus haut degré, instructive et suggestive. Mais c'est avant tout un livre de travail et il est plus fait pour les maîtres que pour les écoliers.

En tout cas, le présent Volume forme par lui-même un ensemble complet divisé en trois Livres, indiqués dans le sous-titre.

Le premier de ces Livres traite de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division et de la classification des entiers; des nombres figurés et de l'analyse combinatoire. Il se termine par deux Chapitres, l'un sur la Géométrie de situation, l'autre sur la multiplication algébrique.

Au Chapitre de l'addition se trouve exposé le triangle arithmétique de Pascal et ainsi de suite pour les suivants; chaque notion primordiale se trouve accompagnée de ses divers développements immédiats. Nous ne pouvons que signaler cette méthode dont l'application systématique a conduit l'auteur à nombre d'heureux rapprochements qu'il faut étudier dans son Livre.

Les dix Chapitres du second Livre sont consacrés aux nombres fractionnaires, au Calcul des probabilités, à la division algébrique, aux polynômes dérivés, au calcul symbolique (particulièrement appliqué aux permutations sur l'échiquier), à la sommation des puissances numériques (nombres de Bernoulli, de Genocchi et d'Euler, suites de Cesaro); aux fonctions symétriques, aux déter-

minants, aux suites récurrentes linéaires et aux fonctions numériques de second ordre, dont la théorie, comme on sait, appartient en propre à l'auteur.

Le Livre III comprend six Chapitres : codiviseurs et comultiples (Éd. Lucas emploie ces abréviations commodes au lieu des expressions : diviseurs communs et multiples communs); nombres premiers; diviseurs des nombres; indicateur (terme de Cauchy pour désigner le nombre des entiers au plus égaux à n et premiers à n); restes (résidus); fractions continues.

Onze additions concernent : la partition du polygone, le problème des rencontres; celui des ménages; les nombres d'Hamilton; les réseaux d'un quinconce; la sommation des indicateurs; les permutations circulaires avec répétition; les restes du triangle arithmétique; les nombres de Clausen et de Staudt; l'extraction des racines par les moyennes; et les réduites intermédiaires.

En dehors des expressions techniques spéciales que nous avons déjà signalées, Éd. Lucas propose et emploie celle de *gaussien* de a pour un module donné pour désigner le plus petit exposant g qui rend $a^g - 1$ divisible par le module; enfin, avec M. Sylvester, il appelle *cumulant* le résultat de l'opération du symbole généralisé d'Euler pour la théorie des fractions continues.

Cette terminologie ne peut qu'être approuvée; il n'en est pas de même de celle que l'auteur emploie, au reste sans système bien arrêté, dans l'exposition de la théorie des nombres polygones. Ainsi, après avoir défini le $n^{\text{ième}}$ polygonal P_n^q de q côtés comme la somme des n premiers termes de la progression arithmétique commençant à 1 et de raison $(q-2)$, Éd. Lucas énonce le théorème :

Tout polygonal est égal au nombre qui indique son rang, augmenté d'autant de fois le triangulaire de rang précédent qu'il y a d'unités dans son côté diminué de deux.

C'est la transcription de la formule

$$P_n^q = n + (q-2)\frac{n(n-1)}{2}.$$

et il est clair que par *côté* du polygone, Éd. Lucas entend ici, comme dans le théorème analogue suivant, le nombre q.

Or, dans la terminologie ancienne, que l'auteur conserve au reste dans l'énoncé des exemples, le *côté* est le nombre n, tandis que q représente le nombre des angles (ou des côtés). Cette terminologie doit d'autant moins être modifiée que les polygones comprennent les carrés, et qu'il est inadmissible d'entendre par côté d'un carré le nombre 4.

Je remarque à la page suivante (55) une autre inadvertance.

Exemple XI. — Étant donné un nombre, trouver de combien de manières il peut être polygonal. Il suffit de diviser le nombre donné par les triangulaires successifs, en ne conservant que les divisions dans lesquelles le reste est égal *au triangulaire du rang précédent.*

Il faut lire, comme il ressort du théorème énoncé ci-dessus, *au rang du triangulaire suivant.*

Éd. Lucas eut sans doute corrigé les *lapsus* de ce genre dans l'*Errata* de son second Volume. Il serait à désirer que ses savants amis, qui ont assumé la tâche de publier ses manuscrits, ne reculent pas devant celle de reviser soigneusement le premier Volume, pour faire disparaître les quelques taches inévitables dans une œuvre de ce genre.

D'autre part, si sur les sujets si variés qu'il a abordés, Éd. Lucas a cherché à être complet dans l'énumération des travaux importants qui les concerne, s'il a fait preuve à cet égard d'une singulière érudition et si, pour les recherches des contemporains, son œuvre est riche en indications précieuses, ses informations historiques ne doivent souvent être admises que sous bénéfice d'inventaire. Mais, au lieu de me livrer, à cet égard, à des critiques de détail trop faciles, j'appellerai l'attention sur la reproduction (p. 176-177) d'un passage de la Préface des *cogitata physicomathematica* de Mersenne (1644) relatif aux nombres parfaits. Il résulte de ce passage d'après Éd. Lucas, que Mersenne était en possession d'une méthode importante dans la théorie des nombres premiers, et que cette méthode ne nous serait pas parvenue.

Or, ce que possédait Mersenne à ce sujet, c'était uniquement l'énoncé de propositions qu'il a données dans son Ouvrage postérieur *Reflectiones physicomathematica* de 1647, et qui peuvent se résumer comme suit :

« Un nombre de la forme $2^n - 1$ est composé, toutes les fois que n n'est pas de la forme $2^m \pm 1$ ou $2^m \pm 3$. »

Cette proposition est vraie empiriquement pour $n < 71$, mais on n'en sait rien de plus.

Éd. Lucas la connaissait parfaitement (je la lui avais signalée il y a quatre ans); je pense que, s'il ne l'a pas insérée à la suite du texte de Mersenne qu'il a reproduit, c'est qu'il l'a réservée pour la faire figurer au nombre des propositions de Fermat qu'il a annoncé vouloir commenter à la suite de son Ouvrage. Mais j'estime qu'à cet égard il était dans l'erreur et que la proposition en question n'appartenait pas à Fermat, mais bien à Frenicle et qu'elle était, de la part de ce dernier, une réplique à la célèbre proposition erronée du géomètre de Toulouse, que les nombres de la forme $2^{2^m} + 1$ sont premiers.

Dans ces conditions, on peut douter fortement de la vérité de la proposition dont il s'agit; il n'y en a pas moins là un problème d'autant plus irritant que les méthodes font défaut pour l'aborder de face.

Quant à cette circonstance que Mersenne ne reconnaît pas comme premier le nombre $2^{61} - 1$, pour lequel cette propriété a été récemment établie, on peut ne pas l'imputer à son garant sur la matière, c'est-à-dire à Frenicle, car le Minime ne comprenait pas toujours exactement les renseignements qu'il se procurait et les reproduisait assez souvent avec des erreurs du genre de celle qu'il a pu commettre en l'occurrence. PAUL TANNERY.

FINE (H.). — THE NUMBER-SYSTEM OF ALGEBRA TREATED THEORETICALLY AND HISTORICALLY. 1 vol. in-8°; IX-131 p., 1890. Boston et New York, Leach, Shewell et Sanborn.

Ce petit Livre comprend deux Parties : les soixante-dix-huit premières pages constituent un résumé concis des notions et propositions fondamentales de l'Analyse, qui part de l'idée de nombre entier, et qui aboutit à la définition, au moyen de séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable complexe, des fonctions exponentielles et circulaires.

Le nombre entier positif est, pour M. Henry-B. Fine, le fondement essentiel de l'Analyse; les nombres négatifs, fractionnaires, imaginaires, sont successivement introduits comme des symboles dont les propriétés résultent de la nécessité de conserver les propriétés fondamentales des opérations sur les nombres entiers; il est certain que cette *loi de permanence*, comme l'appelle l'auteur, d'après Peacock et Hankel, est, en effet, la raison de l'introduction de ces nombres et des conventions dont ils sont l'objet; mais il n'est pas sûr qu'elle suffise à elle seule, au point de vue pédagogique, à rendre parfaitement claire la définition des nombres négatifs, fractionnaires et complexes, le nombre entier étant seul regardé comme donné, et il est à craindre qu'une propriété formelle imposée à un symbole ne suffise pas pour en éclaircir la signification. Pour les nombres irrationnels, l'auteur adopte la définition donnée par M. Mézay et par M. Heine. Une digression sur la représentation graphique des nombres réels et complexes, faite en vue de parvenir à une démonstration de l'existence des racines dans une équation algébrique entière, a peut-être l'inconvénient de laisser croire que cette représentation graphique est indispensable à l'Analyse; il est juste de reconnaître que la *commodité* de cette représentation est incontestable, et que la suite du livre de M. Henry-B. Fine suffira au lecteur pour concevoir comment on aurait pu s'en passer. L'auteur développe ensuite les propositions indispensables de la théorie des séries, et parvient à la définition de la fonction exponentielle en déterminant les coefficients d'une série $f(x)$, procédant suivant les puissances entières et positives de x et telle que l'on ait

$$f(x+z) = f(x) \times f(z);$$

la fonction exponentielle engendre ensuite facilement les fonctions logarithmiques et circulaires.

La partie historique contient des renseignements intéressants sur les systèmes de numération en usage chez les peuples anciens, tant pour les nombres entiers que pour les fractions, sur la découverte des nombres irrationnels, sur les origines de l'Algèbre et l'introduction des nombres négatifs et imaginaires; le dernier paragraphe intitulé *Recognition of the purely symbolic character of Algebra* est principalement consacré à mettre en lumière

les services qu'a rendus le mathématicien anglais Peacock ([1]) en introduisant le premier la conception de l'Algèbre que M. Henry-B. Fine adopte comme définitive. J. T.

MÉLANGES.

RÉSUMÉ DE QUELQUES TRAVAUX SUR LES SYSTÈMES VARIABLES DE FONCTIONS ASSOCIÉS A UNE FORME DIFFÉRENTIELLE QUADRATIQUE ([2]);

Par M. G. RICCI,
Professeur à la Faculté des Sciences de Padoue.

1. *Notions et définitions générales sur les systèmes variables.* — Dans l'Analyse pure aussi bien que dans ses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique, il y a souvent lieu de considérer des systèmes de fonctions de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui peuvent toutes être représentées par un symbole général $X_{rs\ldots t}$, dans lequel on a un certain nombre d'indices, qui peuvent tous prendre les n valeurs $1, 2, \ldots, n$. Si le nombre des indices est m, nous aurons là ce que nous appellerons un *système de fonctions à n variables* m^{uple} *ou d'ordre m* et les n^m fonctions, distinctes ou non, dont il résulte, seront les *éléments* du système. Par exemple, nous aurons des systèmes simples de fonctions à trois variables en considérant les projections d'un vecteur sur trois axes coordonnés ou les premières dérivées d'une fonction de trois variables. Les composantes des pressions dans la théorie de l'élasticité et les coefficients de la conductivité dans la théorie analytique de la chaleur seront les éléments de deux systèmes

---

([1]) *Arithmetical and symbolical Algebra* (1830 et 1845).

([2]) *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, t. XIV).

Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella Analisi applicata (*Studi editi dalla Università di Padova a commemorare l'ottavo Centenario dalla origine della Università di Bologna*, vol. III).

Sopra certi sistemi di funzioni (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, seduta del 20 gennaio 1889).

doubles, bien que, dans ces cas, le nombre des éléments distincts soit six au lieu de neuf. Les coefficients d'une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du premier ordre à n variables seront les éléments d'un système simple de fonctions de ces variables; ceux d'une expression différentielle quadratique homogène seront les éléments d'un système double. Nous aurons un exemple d'un système m^{uple} à n variables en considérant toutes les dérivées de l'ordre m d'une fonction de ces variables, bien que dans cet exemple le nombre des éléments distincts soit moindre que n^m. A ce point de vue, une fonction de n variables doit être regardée comme un système à o indices ou d'ordre o.

On peut appeler un système de fonctions *invariable,* lorsqu'il résulte des mêmes éléments, quel que soit le système des variables indépendantes; *variable* dans tout autre cas. En d'autres mots, si le système est invariable, lorsqu'on change les variables indépendantes, on n'a qu'à remplacer, dans chaque élément du système, les anciennes variables par leurs expressions en fonction des variables nouvelles; si, au contraire, le système est variable, on aura de plus à exécuter une certaine substitution sur les éléments mêmes du système. Il s'ensuit que, pour définir complètement un système de fonctions, il faut en donner les éléments pour un système déterminé, quelconque du reste, de variables indépendantes et la substitution σ, identique ou non, qu'on doit appliquer à ses éléments, lorsqu'on applique une substitution s aux variables indépendantes. La substitution σ doit être unique et déterminée, lorsque la substitution s est donnée, mais elle peut être regardée comme tout à fait arbitraire. Toutefois elle sera le plus souvent déterminée par la signification analytique, géométrique, mécanique ou physique des éléments du système, si cette signification se rapporte de quelque manière aux variables indépendantes et si elle doit rester inaltérée, quelles que soient ces variables.

Si, par exemple, le système résulte des premières dérivées d'une fonction U de n variables, quel que soit le système de ces variables, lorsqu'on remplace des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il ne suffit pas de remplacer les x par leurs expressions en fonction des y dans $\frac{dU}{dx_1}, \frac{dU}{dx_2}, \ldots, \frac{dU}{dx_n}$,

mais il faut encore remplacer ces éléments par les éléments $\frac{dU}{dy_1}$, $\frac{dU}{dy_2}, \dots, \frac{dU}{dy_n}$ au moyen de la substitution

$$\frac{dU}{dy_r} = \sum_s^{\overset{n}{}}{}_{\!1} \frac{dU}{dx_s}\frac{dx_s}{dy_r}.$$

De même, si nous considérons le système simple qui a pour éléments les coefficients d'une équation

$$\sum_r X^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0,$$

indépendamment du choix des variables indépendantes, nous aurons un système variable d'après la substitution

$$Y^{(r)} = \sum_{s=1}^{n} X^{(s)} \frac{dy_r}{dx_s}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà dit, on peut concevoir des systèmes variables d'après des substitutions tout à fait quelconques, mais nous allons nous occuper seulement de deux espèces de systèmes variables, dont on peut reconnaître les types dans les deux exemples que nous venons de signaler, et que nous appellerons respectivement *covariants* et *contrevariants*. Nous représenterons les éléments d'un système m^{uple} par une même lettre affectée de m indices placés en bas ou en haut selon que le système sera covariant ou contrevariant. Si $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $Y_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sont les éléments d'un même système covariant selon que les variables indépendantes sont $x_1, x_2, \dots, x_n$ ou $y_1, y_2, \dots, y_n$, on passera des uns aux autres par la substitution

$$(1) \qquad Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{s_1 s_2 \dots s_m} X_{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{dx_{s_1}}{dy_{r_1}} \frac{dx_{s_2}}{dy_{r_2}} \cdots \frac{dx_{s_m}}{dy_{r_m}} \text{ (}^1\text{)}.$$

Les systèmes contrevariants m^{uples} seront, au contraire, variables

(¹) A moins que le contraire ne soit explicitement annoncé, nous représenterons par $\Sigma_{s_1 s_2 \dots s_m}$ les sommatoires dans lesquels chaque indice variable doit prendre les n valeurs $1, 2, 3, \dots, n$.

d'après la substitution

$$Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum_{s_1 s_2 \dots s_m} X^{(s_1 s_2 \dots s_m)} \frac{dy_{r_1}}{dx_{s_1}} \frac{dy_{r_2}}{dx_{s_2}} \cdots \frac{dy_{r_m}}{dx_{s_m}}.$$

Dans cette théorie, un système d'ordre o, c'est-à-dire un système composé d'un seul élément, devra être regardé comme invariable. Nous appellerons *invariants* toutes les expressions absolument invariables formées avec les éléments d'un ou de plusieurs systèmes variables et les systèmes d'ordre o seront, par conséquent, des invariants.

Remarquons, dès à présent, que :

1° Si l'on a deux systèmes covariants (ou contrevariants) du même ordre m, par exemple, les systèmes $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $X'_{r_1 r_2 \dots r_m}$, le système $X_{r_1 r_2 \dots r_m} + X'_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sera aussi covariant ou contrevariant. On pourra l'appeler *somme des deux systèmes donnés.*

2° Si l'on a deux systèmes covariants (ou contrevariants), par exemple $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $X'_{s_1 s_2 \dots s_p}$, dont les ordres sont respectivement m et p, le système $X_{r_1 r_2 \dots r_m} . X_{s_1 s_2 \dots s_p}$ est lui aussi covariant (ou contrevariant) et d'ordre $m + p$. On l'appellera *produit des deux systèmes donnés.*

Il importe et il est aisé de reconnaître que, si un système variable peut être regardé comme somme ou comme produit d'un certain nombre de systèmes, cela a lieu quel que soit le système des variables indépendantes.

3° Si l'on a un système covariant d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ et un système contrevariant d'ordre $p < m$, $Y^{(r_1 r_2 \dots r_p)}$, le système

$$\sum_{r_1 r_2 \dots r_p} Y^{(r_1 r_2 \dots r_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m}$$

est covariant et d'ordre $m - p$. Nous dirons qu'il est *composé* des deux systèmes donnés, qu'on appellera *systèmes composants.* Puisque les indices r_1, r_2, ..., r_p peuvent être choisis d'une manière quelconque parmi ceux du système $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ et, après les avoir choisis, on peut les permuter entre eux de toutes les manières possibles, les systèmes donnés donneront lieu, en général, à $m(m-1)\dots(m-p+1)$ systèmes composés distincts.

Si l'on a $p = m$ les systèmes composés tels que

$$\Sigma_{r_1 r_2 \dots r_m} Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m}$$

sont des invariants.

Enfin si p est $> m$ les systèmes composés

$$\Sigma_{r_1 r_2 \dots r_m} Y^{(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} \dots r_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_m}$$

sont contrevariants et d'ordre $p - m$.

2. *Les systèmes variables associés à une forme différentielle quadratique. Dérivations covariante et contrevariante selon cette forme.*

Dans ce qui va suivre nous allons associer les systèmes variables de fonctions de n variables indépendantes à une expression homogène et du deuxième degré par rapport aux différentielles de ces variables. Nous représenterons par

$$\varphi = \Sigma_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

cette expression, qu'on pourra appeler une *forme différentielle quadratique* à n variables, et nous supposerons qu'elle soit *irréductible*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas une forme différentielle quadratique à m variables $y_1, y_2, \dots, y_m$, m étant moindre que n, qui devienne identique à φ, en substituant à $y_1, y_2, \dots, y_m$ certaines fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Comme je l'ai démontré [1], pour que la forme φ soit irréductible, il est nécessaire et il suffit que son discriminant, que nous indiquerons par a, ne soit pas nul.

Les coefficients a_{rs} de la forme φ, que nous appellerons *forme fondamentale*, sont les éléments d'un système double covariant et *symétrique*, c'est-à-dire tel que ses éléments correspondant à des différentes permutations des mêmes indices sont identiques. Au contraire, si l'on désigne par $a^{(rs)}$ les coefficients des éléments a_{rs} en a divisés par a, les $a^{(rs)}$ sont les éléments d'un système double contrevariant et symétrique.

---

(1) RICCI, *Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, serie II, t. XII).

A l'aide d'une forme fondamentale φ on peut tirer de tout système covariant $X_{p_1p_2\dots p_m}$ un système contrevariant de même ordre en posant

$$(A)\qquad X^{(q_1q_2\dots q_m)} = \Sigma_{p_1p_2\dots p_m} a^{(p_1q_1)} a^{(p_2q_2)} \dots a^{(p_mq_m)} X_{p_1p_2\dots p_m}$$

De même on peut tirer de tout système contrevariant $X^{(q_1q_2\dots q_m)}$ un système covariant de même ordre, en posant

$$(B)\qquad X_{p_1p_2\dots p_m} = \Sigma_{q_1q_2\dots q_m} a_{p_1q_1} a_{p_2q_2} \dots a_{p_mq_m} X^{(q_1q_2\dots q_m)}.$$

La résolution des équations (A) par rapport aux éléments $X_{p_1p_2\dots p_m}$ du système covariant donne comme résultat les (B), de manière qu'en partant de ce dernier système pour en tirer un système contrevariant à l'aide de la forme φ, on retomberait sur le système $X^{(q_1q_2\dots q_m)}$. Nous appellerons deux systèmes tels que $X_{p_1p_2\dots p_m}$ et $X^{(q_1q_2\dots q_m)}$ *réciproques par rapport à la forme* φ, et nous signifierons cela en écrivant

$$X^{(q_1q_2\dots q_m)} \equiv R_\varphi(X_{q_1q_2\dots q_m}), \qquad \text{ou} \qquad X_{q_1q_2\dots q_m} \equiv R_\varphi(X^{(q_1q_2\dots q_m)}).$$

Les identités

$$a^{(rs)} = \Sigma_{pq} a^{(pr)} a^{(qs)} a_{pq}$$

nous disent donc que

$$a^{(rs)} \equiv R_\varphi(a_{rs}).$$

Puisque nous nous rapporterons toujours à une même forme fondamentale φ, pour désigner les éléments du système réciproque par rapport à cette forme d'un système donné, covariant ou contrevariant, il nous suffira de porter du bas en haut ou du haut en bas les indices dans les symboles, qui représentent les éléments de ce dernier système.

Dans ce qui suit, si $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont deux systèmes de variables indépendantes, qu'on peut remplacer les unes par les autres, nous représenterons par les symboles $x_r^{(pq\dots)}$, $y_s^{(tu\dots)}$ les dérivées d'un ordre quelconque de la variable x_r par rapport à $y_p, y_q, \dots$ et respectivement de la variable y_s par rapport à $x_t, x_u, \dots$. De plus, en indiquant par $X_{r_1r_2\dots r_m}$, $Y^{(r_1r_2\dots r_m)}$ respectivement les éléments d'un système covariant ou contrevariant, lorsqu'on considère comme variables indépendantes les x, nous indiquerons par $(X_{r_1r_2\dots r_m})$, $(Y^{(r_1r_2\dots r_m)})$ les

éléments des mêmes systèmes après la substitution des variables x par les y. En général, il sera entendu que, si l'on fait usage d'une certaine notation lorsqu'on considère les x comme variables indépendantes, pour en tirer la notation valable après la substitution des y, il suffira de renfermer les symboles entre des parenthèses.

Il est utile de rappeler ici quelques propriétés des formes différentielles quadratiques irréductibles et la méthode par laquelle on peut les établir.

En considérant le système des coefficients de la forme différentielle φ, on a les formules

$$(a_{pq}) = \Sigma_{rs} a_{rs} x_r^{(p)} x_s^{(q)},$$

et l'on en tire

$$\frac{d(a_{pq})}{dy_m} = \Sigma_{rst} \frac{da_{rs}}{dx_t} x_r^{(p)} x_s^{(q)} x_t^{(m)} + \Sigma_{rs} a_{rs} (x_r^{(p)} x_s^{(qm)} + x_s^{(q)} x_r^{(pm)}).$$

Posons

$$2 a_{rs,t} = \frac{da_{rt}}{dx_s} + \frac{da_{st}}{dx_r} - \frac{da_{rs}}{dx_t},$$

et nous aurons les équations

$$(1) \qquad (a_{pq,m}) = \Sigma_t x_t^{(m)} (\Sigma_{rs} a_{rs,t} x_r^{(p)} x_s^{(q)} + \Sigma_r a_{rt} x_r^{(pq)}),$$

dont le nombre est $\frac{n^2(n+1)}{2}$ et qui résolues par rapport aux $x_r^{(pq)}$ nous donneront

$$(1') \qquad x_r^{(pq)} = \Sigma_{st} (a^{(st)})(a_{pq,t}) x_r^{(s)} - \Sigma_{stu} a^{(ur)} a_{st,u} x_s^{(p)} x_t^{(q)}.$$

En dérivant les (1) par rapport à y_l et en ayant recours de nouveau à ces équations, on en tire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d(a_{pq,m})}{dy_l} - \Sigma_{rs}(a^{(rs)})(a_{pq,r})(a_{ml,s}) \\ & \quad = \Sigma_{rstu} \left(\frac{da_{rs,t}}{dx_u} - \Sigma_{hk} a^{(hk)} a_{rs,h} a_{tu,k} \right) x_r^{(p)} x_s^{(q)} x_t^{(m)} x_u^{(l)} \\ & \qquad + \Sigma_t x_t^{(m)} [\Sigma_r a_{rt} x_r^{(pql)} + \Sigma_{rs} a_{rs,t} (x_r^{(p)} x_s^{(ql)} + x_s^{(q)} x_r^{(pl)} - x_s^{(l)} x_r^{(pq)})], \end{aligned} \right.$$

dont, en posant

$$(3) \quad a_{rt,su} = \frac{da_{rs,t}}{dx_u} - \frac{da_{ru,t}}{dx_s} + \Sigma_{hk} a^{(hk)} (a_{ru,h} a_{st,k} - a_{rs,h} a_{tu,k}),$$

on tire enfin

$$(2') \qquad (a_{pm,ql}) = \Sigma_{rstu}\, a_{rt,su}\, x_r^{(p)} x_t^{(m)} x_s^{(q)} x_u^{(l)}.$$

Le système $a_{rt,su}$ est donc un système quadruple covariant, et l'on sait que, pour que la forme φ soit la transformée d'une forme à coefficients constants (et je dis alors qu'elle est *de classe zéro*) il est nécessaire et il suffit que ce système soit identiquement nul.

Les éléments $a_{rt,su}$ sont liés entre eux par des relations linéaires, qui réduisent à $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ le nombre de ceux qui sont linéairement indépendants.

En particulier, si l'on a $n = 2$, on a à considérer seulement l'élément $a_{12,12}$ et le rapport $\frac{a_{12,12}}{a}$ est un invariant qu'on peut appeler *invariant de Gauss* et qui représente la courbure totale des surfaces, dont l'élément linéaire peut être représenté par la racine carrée de la forme φ.

Si l'on a $n = 3$, le système covariant quadruple que nous considérons peut être remplacé par un système double contrevariant et symétrique. Dans ce cas, en effet, le nombre des éléments $a_{rt,su}$, qui ne sont pas liés par des relations linéaires, est égal à six. Si nous convenons de regarder comme identiques les indices congrus par rapport à 3, on peut les obtenir tous en donnant à r et à s les valeurs 1, 2, 3 dans l'expression générale $a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}$ et il est aisé de se convaincre que le système double et symétrique

$$(4) \qquad \alpha^{(rs)} = \frac{a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}}{a}$$

est contrevariant.

Soit $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ un système covariant quelconque. Nous aurons les formules

$$(X_{q_1 q_2 \ldots q_m}) = \Sigma_{r_1 r_2 \ldots r_m} X_{r_1 r_2 \ldots r_m} x_{r_1}^{(q_1)} x_{r_2}^{(q_2)} \ldots x_{r_m}^{(q_m)}.$$

Si on les dérive par rapport à $y_{q_{m+1}}$, si l'on fait usage des équations (1′) pour éliminer les dérivées du second ordre des x par rapport aux y, et que l'on pose

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} = {} & \frac{dX_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{dx_{r_{m+1}}} \\ & - \sum_{rs} \alpha^{(rs)} \sum_{l}^{m}{}_{1}\, a_{r_l r_{m+1}, r}\, X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}, \end{aligned} \right.$$

on parvient aux équations

$$(X_{q_1 q_2 \ldots q_{m+1}}) = \Sigma_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} x_{r_1}^{(q_1)} x_{r_2}^{(q_2)} \ldots x_{r_{m+1}}^{(q_{m+1})}.$$

Nous pouvons donc, à l'aide de la forme fondamentale, tirer de tout système covariant d'ordre m un nouveau système de même nature d'ordre $m+1$, et cela par des opérations exécutées sur les éléments du système donné, et dont nous pourrons considérer l'ensemble comme une opération exécutée sur le système même. Nous appellerons cette opération, qui est définie par les formules (α), *dérivation covariante selon la forme* φ, et le système $X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}}$ *système dérivé du système* $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ selon la même forme.

D'une manière analogue, si l'on a un système contrevariant $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$, si l'on dérive les équations

$$(X^{(q_1 q_2 \ldots q_m)}) = \Sigma_{r_1 r_2 \ldots r_m} X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)} y_{q_1}^{(r_1)} y_{q_2}^{(r_2)} \ldots y_{q_m}^{(r_m)}.$$

par rapport à y_r, et si l'on a recours aux formules

$$(a^{(r q_{m+1})}) = \Sigma_{pq} a^{(pq)} y_r^{(p)} y_{q_{m+1}}^{(q)}$$

et à celles qu'on tire des (1′) en échangeant les variables x avec les y et conséquemment les coefficients a_{rs} avec les (a_{rs}) ..., en posant

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} & X^{(q_1 q_2 \ldots q_{m+1})} \\ & = \sum_p a^{(p r_{m+1})} \left(\frac{dX^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}}{dx_p} + \sum_{rs} a_{pr,s} \sum_{l}^{m} a^{(r_l s)} X^{(r_1 \ldots r_{l-1} r r_{l+1} \ldots r_m)} \right), \end{aligned} \right.$$

on parvient aux équations

$$(X^{(q_1 q_2 \ldots q_{m+1})}) = \Sigma_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} X^{(r_1 r_2 \ldots r_{m+1})} y_{q_1}^{(r_1)} y_{q_2}^{(r_2)} \ldots y_{q_{m+1}}^{(r_{m+1})}.$$

Par l'opération (β) on peut donc, à l'aide de la forme fondamentale, tirer de tout système contrevariant d'ordre m un système de même nature d'ordre $m+1$. Nous appellerons cette opération *dérivation contrevariante selon la forme* φ, et le système $X^{(r_1 r_2 \ldots r_{m+1})}$ *système dérivé* du système $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$ selon la même forme.

Comme nous l'avons déjà remarqué, un système d'ordre 0, c'est-à-dire un système résultant d'une seule fonction X, est un inva-

variant, et, par suite, on peut le regarder comme un trait d'union entre les systèmes covariants et, les systèmes contrevariants. A l'aide de la forme fondamentale il est, en effet, possible d'en tirer aussi bien un système simple covariant X_r en posant

$$X_r = \frac{dX}{dx_r},$$

et un système simple contrevariant $X^{(r)}$ en posant

$$X^{(r)} = \sum_s a^{(rs)} \frac{dX}{dx_s},$$

et ces formules, qui se rapportent au cas où l'on a $m = 0$, peuvent être regardées comme des cas particuliers respectivement des (α) et des (β).

Comme par la dérivation covariante selon φ nous avons tiré du système m^{uple} $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ le système $(m+1)^{\text{uple}}$ $X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}}$, on peut de même tirer de ce dernier système un système $(m+2)^{\text{uple}}$ $X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+2}}$ au moyen de la dérivation covariante selon la même forme φ ou selon une autre forme différentielle quadratique irréductible à n variables. En général, p dérivations covariantes successives respectivement selon les formes φ, ψ, ..., χ nous conduiront d'un système m^{uple} covariant à un système de même nature d'ordre $m+p$. Nous écrirons

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+p}} = D_{\varphi\psi\ldots\chi}(X_{r_1 r_2 \ldots r_m}),$$

pour exprimer que le système $X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+p}}$ a été tiré du système $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ de la manière indiquée. Avec une notation analogue nous écrirons

$$X^{(r_1 r_2 \ldots r_{m+p})} = D^{\varphi\psi\ldots\chi}(X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}),$$

pour exprimer que le système $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$ a été tiré du système $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$ par p dérivations contrevariantes successives exécutées respectivement selon φ, ψ, ..., χ.

En appliquant l'opération (α) au système des coefficients de la forme fondamentale, on trouve que les éléments du système dérivé sont identiquement nuls. On peut donc conclure que :

Le système dérivé selon une forme fondamentale du système des coefficients de cette forme est nul.

Des formules (α) il est aussi aisé de conclure que :

Le système dérivé selon une forme fondamentale de la somme de plusieurs systèmes est égal à la somme des systèmes dérivés.

Si l'on a

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = Y_{r_1 r_2 \ldots r_p} Z_{r_{p+1} r_{p+2} \ldots r_m},$$

on a aussi d'après les (α)

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} = Y_{r_1 r_2 \ldots r_p} Z_{r_{p+1} r_{p+2} \ldots r_{m+1}} + Z_{r_{p+1} r_{p+2} \ldots r_m} Y_{r_1 r_2 \ldots r_p r_{m+1}}.$$

En généralisant d'une manière connue ce résultat, on a pour la dérivation des produits de systèmes une règle tout à fait analogue à celle qui régit la dérivation des produits de fonctions. D'après cette règle,

Pour dériver selon une forme fondamentale quelconque un système covariant produit de plusieurs systèmes, on n'a qu'à dériver successivement selon la même forme chacun des systèmes facteurs sans dériver les autres et à ajouter ensuite les résultats.

Considérons à présent un système covariant tel que

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_p} Z^{s_1 s_2 \ldots s_p} Y_{s_1 s_2 \ldots s_p r_1 r_2 \ldots r_m}$$

composé de deux systèmes. L'application de la dérivation covariante selon une forme fondamentale φ et la substitution des dérivées des éléments des systèmes composants par leurs expressions en fonction des éléments de leurs systèmes dérivés nous conduira immédiatement au résultat suivant :

Si l'on a un système covariant composé

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_p} Z^{s_1 s_2 \ldots s_p} Y_{s_1 s_2 \ldots s_p r_1 r_2 \ldots r_m}$$

et, $\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ *étant une forme fondamentale quelconque, on pose*

$$D_\varphi(Y_{s_1 s_2 \ldots s_p r_1 r_2 \ldots r_m}) = Y_{s_1 s_2 \ldots s_p r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}},$$

$$D_\varphi(Z^{s_1 s_2 \ldots s_p}) = Z^{s_1 s_2 \ldots s_p} [illegible],$$

on a

$$D_\varphi(X_{r_1 r_2 \dots r_m}) = \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_p} Z^{(s_1, s_2, \dots, s_p)} Y_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$$
$$+ \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_p q}\, a_{q r_{m+1}} Z^{(s_1 s_2 \dots s_p q)} Y_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m}.$$

En supposant $m = 0$ le système $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ considéré ci-dessus se réduit à un invariant

$$X = \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_p} Z^{(s_1 s_2 \dots s_p)} Y_{s_1 s_2 \dots s_p},$$

et, en désignant par X_r les dérivées de X par rapport aux variables indépendantes, on a comme corollaire la formule

$$X_r = \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_p} Z^{(s_1 s_2 \dots s_p)} Y_{s_1 s_2 \dots s_p r} + \Sigma_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s s_2 \dots s_p)} Z_{s_1 s_2 \dots s_p r}.$$

Un système covariant $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ peut être regardé comme composé de son système réciproque par rapport à la forme fondamentale φ et du système d'ordre $2m$, $a_{s_1 r_1} a_{s_2 r_2} \dots a_{s_m r_m}$, produit de m systèmes tous identiques avec le système des coefficients de φ. Le système dérivé de ce dernier selon φ est donc identiquement nul et la proposition précédente nous permet encore de conclure que :

Les systèmes dérivés de deux systèmes réciproques par rapport à une forme fondamentale φ selon cette forme sont eux aussi réciproques par rapport à φ.

Ce théorème est très important parce qu'il nous permettra de borner nos considérations aux dérivations covariantes et de déduire de tout théorème relatif aux systèmes variables un théorème *réciproque* en échangeant entre eux les mots *covariant* et *contrevariant* et les symboles correspondants. Nous laisserons à ceux qui voudront porter leur attention sur cette théorie le soin d'énoncer et de démontrer les théorèmes réciproques de ceux que nous venons de démontrer et de ceux qui vont suivre.

Un système $X_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}}$ et une forme fondamentale φ étant donnés, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un système $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ tel que l'on ait

$$X_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} = D_\varphi(X_{r_1 r_2 \dots r_m}),$$

sont une seule et même chose avec les conditions d'intégrabilité du système (α), dans lequel les fonctions $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sont les in-

connues. Or les équations (α) dérivées par rapport à $x_{r_{m+2}}$ nous donnent

$$\frac{d^2 X_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{dx_{r_{m+1}}\, dx_{r_{m+2}}} = \frac{dX_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}}{dx_{r_{m+2}}}$$

$$+ \sum_{rs} a^{rs} \sum_{l}^{\overset{m}{}}{}_{1} \frac{da_{r_l r_{m+1}, r}}{dx_{r_{m+2}}} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}$$

$$+ \sum_{rs} a^{rs} \sum_{l=1}^{m} a_{r_l r_{m+1}, r} \frac{dX_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}}{dx_{r_{m+2}}}$$

$$+ \sum_{rs} \frac{da^{rs}}{dx_{r_{m+2}}} \sum_{l=1}^{m} a_{r_l r_{m+1}, r} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}.$$

En ayant recours aux identités

$$\frac{da_{ps}}{dx_{r_{m+2}}} = a_{s r_{m+2}, p} + a_{p r_{m+2}, s},$$

$$\sum_p a^{(pq)} \frac{da_{ps}}{dx_{r_{m+2}}} = - \sum_p a_{ps} \frac{da^{(pq)}}{dx_{r_{m+2}}},$$

des formules (α) on tire aussi

$$\frac{dX_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}}{dx_{r_{m+2}}} = X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m r_{m+2}}$$

$$- \sum_{pq} a^{pq} a_{p r_{m+2}, s} X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}$$

$$- \sum_{pq} a_{ps} \frac{da^{pq}}{dx_{r_{m+2}}} X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}$$

$$+ \sum_{pq} a^{pq} \sum_{h=1}^{l-1} a_{r_h r_{m+2}, p} X_{r_1 \ldots r_{h-1} q r_{h+1} \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}$$

$$+ \sum_{pq} a^{pq} \sum_{h=l+1}^{m} a_{r_h r_{m+2}, p} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_{h-1} q r_{h+1} \ldots r_m}.$$

A l'aide de ces équations en posant

$$D_{[illegible]}(X_{r_1 r_2 \ldots}) = [illegible]$$

on parvient aux formules

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 X_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{dx_{r_{m+1}}\, dx_{r_{m+2}}} = X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+2}}
&- \sum_{rs} a^{(rs)} \sum_{l}^{m}{}_{1} \left(\frac{da_{r_l r_{m+1}, r}}{dx_{r_{m+2}}} - \sum_{pq} a^{(pq)} a_{r_l r_{m+1}, p} a_{r r_{m+2}, q} \right) X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m} \\
&+ \sum_{rs} a^{(rs)} \sum_{l}^{m}{}_{1} \left(a_{r_l r_{m+1}, r} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m r_{m+2}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + a_{r_l r_{m+2}, r} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m r_{m+1}} \right) \\
&- \sum_{rs} a^{(rs)} a_{r_{m+1} r_{m+2}, r} X_{r_1 r_2 \ldots r_m s} \\
&+ \sum_{pqrs} a^{(pq)} a^{(rs)} \sum_{hl} a_{r_l r_{m+1}, r} a_{r_h r_{m+2}, p} X_{r_1 \ldots r_{h-1} q r_{h+1} \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m},
\end{aligned}
$$

dans lesquelles j'ai désigné par Σ_{hl} une somme, qui doit comprendre tous les termes que l'on peut tirer du terme général en y remplaçant hl par toutes les combinaisons simples deux à deux des nombres $1, 2, 3, \ldots, m$.

En soustrayant de la formule précédente celle qu'on en tire en échangeant entre eux les indices r_{m+1}, r_{m+2}, on parvient enfin aux formules

$$
(\gamma) \quad \left\{
\begin{aligned}
& X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}} \\
& \quad = \sum_{rs} a^{(rs)} \sum_{l=1}^{m} a_{r r_l, r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, si U est un invariant et φ une forme fondamentale, et si l'on pose

$$D_\varphi(U) = U_r,$$

on a

$$U_r = \frac{dU}{dx_r}.$$

En posant

$$D_\varphi(U_r) = D_{\varphi\varphi}(U) = U_{rs},$$

on a aussi, d'après les (α),

$$U_{rs} = \frac{d^2 U}{dx_r\, dx_s} - \sum_p a_{rs,p} U^{(p)},$$

et par conséquent

$$U_{rs} - U_{sr} = 0.$$

Ces formules peuvent être regardées comme un cas particulier des (γ) pour $m = 0$.

Si la forme fondamentale est de classe 0, les seconds membres des (γ) disparaissent et l'on a les formules

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1} r_{m+2}} = X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}}.$$

Donc, *un système* $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ *étant donné, et* φ *étant une forme fondamentale de classe* 0, *pour qu'il existe un système* $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ *tel que l'on ait*

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}} = D_\varphi(X_{r_1 r_2 \ldots r_m}),$$

en posant

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1} r_{m+2}} = D_\varphi(X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+1}}),$$

il est nécessaire et il suffit que les éléments du système $X_{r_1 r_2 \ldots r_{m+2}}$ *soient symétriques par rapport aux deux derniers indices.*

3. *Les invariants d'une forme fondamentale et des systèmes associés.* — Le problème de déterminer toutes les expressions indépendantes absolument invariables, qu'on peut former avec les coefficients d'une forme différentielle quadratique irréductible à n variables, avec leurs dérivées et avec les dérivées d'une ou de plusieurs fonctions de ces variables jusqu'à un ordre donné, n'a jamais été abordé, et la méthode dont Jacobi a fait usage le premier et que M. Beltrami a si savamment généralisée pour démontrer l'invariabilité de l'expression $\Delta_2 U$ est indirecte et ne laisse pas apercevoir comment elle pourrait être appliquée à la résolution du problème général, que je viens d'énoncer. L'algorithme que j'ai introduit dans le numéro précédent est, au contraire, évidemment propre à la résolution d'un problème même plus général, c'est-à-dire du problème suivant : *Déterminer toutes les expressions indépendantes, absolument invariables, que l'on peut former avec les coefficients d'une forme différentielle quadratique irréductible* φ *à* n *variables, avec les éléments d'un ou de plusieurs systèmes variables donnés, fonctions de ces mêmes variables et avec les dérivées de toutes ces fonctions jusqu'à un ordre donné* m. En effet, nous allons voir qu'à l'aide de la dérivation covariante selon la forme fondamentale φ ce pro-

blème est réduit au problème purement algébrique de la détermination de tous les invariants absolus d'un système de formes covariantes.

D'après une remarque que nous avons faite dans le n° 2, nous pouvons nous borner à considérer des systèmes covariants. Si, lorsqu'on considère comme indépendantes des variables x, ces systèmes sont $A_{rs\ldots}$, $B_{rs\ldots}$ et que l'on remplace les x par des nouvelles variables indépendantes y, et que I est une des expressions invariables cherchées ou, comme nous dirons, *un invariant absolu des systèmes donnés associés à la forme* φ, l'équation

$$(I) = I,$$

qui doit devenir identique par l'élimination des variables x ou y, résultera de l'élimination des dérivées des différents ordres des x par rapport aux y entre les équations, qui expriment les fonctions (a_{rs}), $(A_{rs\ldots})$, $(B_{rs\ldots})$, ..., et leurs dérivées par rapport aux variables y jusqu'à l'ordre m en fonction des a_{rs}, $A_{rs\ldots}$, $B_{rs\ldots}$ et de leurs dérivées des mêmes ordres par rapport aux x. Réciproquement toute équation, qui est une conséquence de ces dernières, et qui ne contient pas les dérivées des différents ordres des variables x par rapport aux y pourra être réduite à la forme $(I) = I$ et nous fera connaître un des invariants cherchés. Remarquons encore que, ainsi qu'il résulte des formules (α), les dérivées des éléments d'un système invariant peuvent être exprimées par les éléments mêmes, par les éléments du système dérivé selon φ, par les coefficients de φ, et par les dérivées du premier ordre de ces coefficients. En général, les dérivées d'un ordre quelconque p des éléments d'un système $A_{rs\ldots}$ peuvent être exprimées par les éléments du système même, par ceux des p systèmes qu'on peut en tirer par p dérivations covariantes successives selon φ, par les coefficients de φ et par les dérivées de ces derniers jusqu'à l'ordre p. Nous pouvons donc regarder toute équation $(I) = I$ comme résultante de l'élimination des dérivées des ordres $1, 2, \ldots, m, m+1$ des x par rapport aux y entre les équations qui expriment les coefficients (a_{rs}) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m par rapport aux y par les a_{rs} et leurs dérivées des mêmes ordres par rapport aux x, en y joignant les équations qui expriment les éléments des systèmes $(A_{rs\ldots})$, $(B_{rs\ldots})$ et des systèmes qu'on en tire par m

dérivations covariantes successives selon φ en fonction des éléments des mêmes systèmes rapportés aux variables x. Et puisque ces dernières équations contiennent seulement les dérivées du premier ordre des x par rapport aux y, l'élimination des dérivées des ordres supérieurs aura lieu seulement entre les premières. En outre, puisqu'on a

$$\frac{da_{rs}}{dx_t} = a_{rt.s} + a_{st.r},$$

nous pouvons concevoir de substituer partout en I aux dérivées du premier ordre des a_{rs} les $a_{rt,s}$, et il résultera alors du système d'équations (1) du n° 2, ou du système équivalent (1'), qui est résolu par rapport aux $x_r^{(pq)}$, l'impossibilité d'éliminer ces dernières fonctions sans joindre au système même ceux qui donnent les dérivées des ordres supérieurs des (a_{pq}) par rapport aux variables y en fonction des a_{rs} et de leurs dérivées par rapport aux x. On peut subsistuer aux dérivées du deuxième ordre des (a_{pq}) celles du premier ordre des $(a_{pq,m})$ et nous aurons alors à considérer le système (2) du n° 2. Ce dernier système d'équations peut être regardé comme résultant de deux systèmes, c'est-à-dire d'un système résolu par rapport aux $x_r^{(pql)}$ et du système (2'), dont les $x_r^{(pql)}$ sont éliminées. Les nouvelles dérivations du premier système nous donneraient seulement les dérivées des ordres successifs des x par rapport aux y, et, par suite, nous aurons à considérer seulement le système (2') et ceux qu'on peut en tirer par la dérivation et dont il faudra éliminer chaque fois les $x_r^{(pq)}$ à l'aide des (1').

L'analyse que nous avons instituée nous a donc tout simplement conduit à joindre à la forme φ et aux formes covariantes ayant pour coefficients les éléments des systèmes donnés, des autres formes covariantes ayant pour coefficients les éléments des systèmes dérivés par m dérivations covariantes successives selon φ, et, en outre, si m est > 2 et si la forme φ n'est pas de classe 0, les formes ayant pour coefficients les éléments du système $a_{rs,tu}$ définis par les équations (3) du n° 2 et les éléments des systèmes dérivés de ce dernier par $m-2$ dérivations covariantes successives selon φ.

S'il s'agit de déterminer les invariants absolus des systèmes à

deux variables associés à une forme différentielle quadratique binaire φ, nous pouvons substituer au système quadruple covariant $a_{rs,tu}$ l'invariant de Gauss

$$G = \frac{a_{12,12}}{a}.$$

De même pour les systèmes à trois variables associés à une forme ternaire φ, on pourra considérer au lieu du système $a_{rs,tu}$ le système double contrevariant défini par les équations (4) du n° 2 ou son système réciproque par rapport à φ.

Si la forme fondamentale φ est de classe o, nous n'aurons pas à considérer le système $a_{rs,tu}$ et pour obtenir tous les invariants absolus indépendants d'ordre m, qu'on peut former en associant à φ certains systèmes covariants, il suffira de déterminer tous les invariants absolus communs à φ et aux formes covariantes ayant pour coefficients les éléments des systèmes donnés et de ceux qu'on peut en tirer par m dérivations covariantes successives selon φ.

On peut appeler *invariants absolus* d'ordre m d'une forme différentielle quadratique irréductible φ les invariants absolus d'ordre m qui contiennent seulement les coefficients de φ et leurs dérivées. A propos de ces expressions, qui se rattachent à des propriétés absolues des variétés, dont l'élément linéaire peut être représenté par $\sqrt{\varphi}$, nous venons d'établir les propositions suivantes en partie déjà connues :

1° Les formes de classe o n'ont pas d'invariants absolus.

2° En tout cas il n'y a pas d'invariants absolus de premier ordre, et l'on obtient tous les invariants absolus d'ordre m, m étant > 1, en déterminant tous les invariants algébriques absolus communs à la forme φ et à celles qui ont pour coefficients les éléments du système $a_{rs,tu}$ et ceux des systèmes qu'on peut tirer de ceci par $m - 2$ dérivations covariantes successives selon φ.

En particulier, pour $n = 2$, ces expressions coïncideront avec les invariants absolus d'ordre $m - 2$ qu'on peut former en associant à φ l'invariant de Gauss et l'on parvient ainsi au même résultat, qui forme l'objet d'un beau Mémoire de M. Casorati [1].

---

[1] *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (*Annali di Matematica pura ed applicata* diretti da Barnaba Tortolini, tomi III e IV).

La solution du problème bien connu, de déterminer tous les invariants communs à deux formes algébriques covariantes, dont l'une est quadratique et l'autre est bilinéaire, nous donne en même temps, d'après les résultats précédents, la solution du problème de déterminer tous les invariants absolus du premier ordre, qu'on peut obtenir en associant à une forme différentielle quadratique φ irréductible à n variables un système simple covariant X_r de ces variables, ou tous les invariants absolus du second ordre, qu'on peut obtenir en associant à la même forme une fonction des variables indépendantes. Dans le premier cas, si l'on pose

$$D_\varphi(X_r) = X_{rs},$$

on a en particulier l'invariant du premier ordre

$$I = \sum_{rs} a^{rs} X_{rs},$$

dont l'expression peut être aisément réduite à la forme

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{d(\sqrt{a}\, X^{(i)})}{dx_i}.$$

En supposant que le système X_r résulte des dérivées d'une fonction U par rapport aux x_r, nous avons dans cette dernière formule une expression bien connue, due à M. Beltrami, du paramètre différentiel $\Delta_2 U$. Dans cette hypothèse, la première expression que nous venons de donner pour I est donc une nouvelle expression de ce même paramètre, qui se présente ainsi comme faisant partie d'un groupe, du reste inconnu jusqu'ici, de paramètres du deuxième ordre.

Supposons à présent le système X_r quelconque, $n = 3$ et que $\sqrt{\varphi}$ soit une expression propre de l'élément linéaire de l'espace euclidien. Si nous désignons par x, y, z les coordonnées cartésiennes orthogonales de cet espace, par X, Y, Z les éléments correspondants du système simple donné, on a

$$I = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}.$$

Les expressions générales de I données plus haut sont donc des expressions en coordonnées curvilignes quelconques de ce tri-

nôme, qui joue un rôle si important dans un grand nombre de questions géométriques physiques et mécaniques.

4. *Quelques applications des méthodes exposées.* — A mon avis, les méthodes de dérivation covariante et contrevariante selon une forme fondamentale φ nous donnent les éléments d'un calcul différentiel *invariantif;* c'est-à-dire d'une partie nouvelle du Calcul différentiel, qui est particulièrement propre à traduire en formules, de la manière la plus simple, toutes les propriétés et les recherches qui sont, par leur nature, indépendantes du choix des coordonnées dans la variété, dont l'élément linéaire peut être représenté par $\sqrt{\varphi}$; quelquefois même de la nature de cette variété. Par des mots que j'emprunte à M. Lamé ([1]), on peut dire que les formules auxquelles on parvient par ces méthodes sont *plus essentielles, plus simples et en même temps plus complètes* que celles auxquelles on parvient par le Calcul différentiel ordinaire. Je vais donner quelques exemples et quelques applications à l'appui de ce que je viens d'affirmer.

Dans mon Mémoire déjà cité et ayant pour titre *Principi di una teoria delle forme differentiali quadratiche,* j'ai proposé une classification des formes différentielles quadratiques irréductibles, d'après laquelle une forme φ à n variables est dite être *de première classe*, lorsque la variété, dont $\sqrt{\varphi}$ représente l'élément linéaire, est contenue dans une variété euclidienne à $n+1$ dimensions, et j'ai démontré que, pour qu'une forme donnée φ soit de première classe, il faut et il suffit qu'il soit possible de déterminer un système double et symétrique dont les éléments b_{rs} satisfassent :

1° Au système d'équations algébriques

$$b_{rt}b_{su} - b_{ru}b_{st} = a_{rs,tu}, \tag{I}$$

les fonctions $a_{rs,tu}$ étant définies par les équations (3) du n° 2.

2° A un système d'équations différentielles du premier ordre, qui, dans le Mémoire cité, est marqué par le n° (II). En posant

$$D_{\varphi}(b_{rs}) = b_{rst},$$

([1]) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XV.

ce dernier système prend la forme très simple

$$b_{rst} = b_{rts}, \tag{II}$$

et nous dit que le système b_{rst} doit être symétrique [1].

Si l'on a $n = 2$ ou $n = 3$, il est toujours possible de satisfaire aux équations (I); et, dans le cas de $n = 2$, il est aisé de reconnaître que les équations (II) ne sont que les formules de M. Codazzi.

Il résulte évidemment de leurs définitions qu'un invariant ou un système variable (covariant ou contrevariant) doit être identiquement nul quel que soit le système des variables indépendantes, s'il l'est pour un système particulier. Comme d'ailleurs les équations aux dérivées partielles, auxquelles on parvient dans les applications de l'Analyse à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique sont, par leur nature, indépendantes du choix des coordonnées, il est toujours possible de mettre en évidence cette propriété en donnant aux membres de ces équations une forme *invariantive*, c'est-à-dire telle qu'ils soient ou des invariants ou des éléments de systèmes variables de même nature et du même ordre. Pour s'assurer qu'un certain système d'équations (E) en coordonnées quelconques x est le transformé d'un système (e) donné et qui se rapporte à un système particulier de coordonnées y, il suffit de reconnaître sa nature invariantive et qu'il s'identifie avec le système (e) lorsque les variables x s'identifient avec les y. Cette remarque me permettra de me passer de toute démonstration des résultats, que je vais exposer et dans lesquels je supposerai que, φ étant la forme fondamentale du n° 2, $\sqrt{\varphi}$ soit l'expression de

---

(1) M. Killing dans le *Literaturnachweis*, qui suit son Livre *Die nichteuklidischen Raumformen*, a fait remarquer qu'un théorème, que j'ai énoncé dans le n° 3 de ce Mémoire, n'est pas juste. Il est parfaitement dans le vrai, et c'est sur une méprise bien singulière, et qu'il est très facile de relever, que se fonde la démonstration, que je croyais avoir donnée de ce théorème. D'après ce théorème, je n'avais pas à considérer des formes de première classe, pour lesquelles le déterminant B, qui a les éléments b_{rs}, serait nul, et, par suite, je ne pouvais pas m'apercevoir que la conclusion à laquelle je suis arrivé dans le même numéro, sur l'impossibilité de déformer sans altération des longueurs et des angles, une variété de n dimensions, n étant > 2, qui n'est pas euclidienne, mais qui est contenue dans une variété euclidienne avec une dimension de plus, présente l'exception indiquée par M. Killing dans son Livre (p. 238), car dans ce cas d'exception le déterminant B est précisément nul.

l'élément linéaire de l'espace plan à trois dimensions en coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3.

1° *Équations des lignes de courbure, des directions conjuguées et des lignes asymptotiques sur une surface.* — Soit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation d'une surface et posons

$$D_\varphi(f) = f_r, \qquad \sum_r f^r f_r = \frac{1}{H^2}, \qquad H f_r = \alpha_r, \qquad D_\varphi(\alpha_r) = \alpha_{rs}.$$

Puisque les différentielles des variables indépendantes sont les éléments d'un système contrevariant, en désignant par ρ le rayon de courbure principale, qui se rapporte à un système de lignes de courbure, les équations de ce système seront

$$\Sigma_s(a_{rs} + \rho\alpha_{rs})\, dx_s = 0.$$

Si l'on représente par dx_1, dx_2, dx_3; δx_1, δx_2, δx_3 deux déplacements selon deux directions conjuguées sur la surface, ils sont liés entre eux par l'équation

$$\Sigma_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, \delta x_s = 0.$$

En posant

$$D_\varphi(H) = H_r, \qquad D_{\varphi\varphi}(f) = f_{rs},$$

on a (n° 2)

$$\alpha_{rs} = H f_{rs} + H_s f_r.$$

On peut donc donner l'équation des directions conjuguées même sous la forme

$$\Sigma_{rs}\, f_{rs}\, dx_r\, \delta x_s = 0.$$

L'équation des lignes asymptotiques sera, par conséquent,

$$\Sigma_{rs}\, f_{rs}\, dx_r\, dx_s = 0.$$

2° *Équations générales de l'élasticité.* — En désignant par ρ la densité d'un corps élastique, par F_r et X_{rs} les éléments de deux systèmes covariants qui, dans le cas des coordonnées curvilignes orthogonales, s'identifient respectivement avec les systèmes des composantes de la force appliquée aux différents points du corps et des forces élastiques, et en posant

$$D_\varphi(X_{rs}) = X_{rsq}$$

les équations générales de l'élasticité en coordonnées curvilignes

quelconques sont

$$2F_q - \Sigma_{rs} a^{rs} X_{rsq} = 0.$$

3° *Équations du mouvement et de l'équilibre de la chaleur dans l'intérieur d'un corps.* — Désignons par $c^{(rs)}$ les éléments d'un système contrevariant, qui s'identifient avec les coefficients de conductibilité de la chaleur dans un corps quelconque, lorsque les variables x s'identifient avec des coordonnées rectilignes orthogonales. En désignant par T la température et en posant

$$F^{(r)} = \sum_s c^{(rs)} \frac{dT}{dx_s},$$

le système $F^{(r)}$ sera aussi contrevariant et s'identifiera avec les flux selon les axes coordonnés, lorsque les x seront des coordonnées rectilignes orthogonales. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r \frac{d(\sqrt{a} F^{(r)})}{dx_r} = K \frac{dT}{dt}, \qquad \sum_r \frac{d(\sqrt{a} F^{(r)})}{dx_r} = 0$$

seront respectivement les équations du mouvement et de l'équilibre de la chaleur en coordonnées tout à fait générales.

En revenant sur cet argument, j'espère pouvoir mettre en évidence les avantages que présentent les méthodes de dérivation covariante ou contrevariante selon une forme fondamentale comme méthodes de recherche. En attendant, je ne puis pas me passer de remarquer ici que, bien que les équations, auxquelles on parvient par ces méthodes en partant de celles que l'on établit directement pour l'espace euclidien en coordonnées rectilignes, doivent être considérées comme démontrées seulement pour cet espace, leur forme est tout à fait indépendante de la nature de l'espace, c'est-à-dire de la forme fondamentale. En outre, comme en laissant tout à fait arbitraires les coefficients a_{rs} de cette forme, sa nature entre en jeu seulement lorsqu'on a à considérer le système $a_{rs,tu}$, qui est du second ordre par rapport aux a_{rs}, et ses systèmes dérivés, s'il s'agit d'équations du premier ordre par rapport aux a_{rs}, elles semblent être le point de départ le plus naturel pour étendre aux espaces d'une nature quelconque à trois dimensions les recherches, dont elles sont la traduction analytique pour l'espace euclidien.

SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DU QUATRIÈME DEGRÉ DONT LES LIGNES GÉODÉSIQUES SONT ALGÉBRIQUES;

PAR M. JULES TANNERY.

Dans la Note XV du *Traité de Mécanique* de Despayrous, M. Darboux a donné une méthode pour obtenir les surfaces de révolution dont les lignes géodésiques sont fermées. En appliquant cette méthode, j'ai rencontré la surface dont l'équation est

$$16a^2(x^2+y^2) = z^2(2a^2 - z^2);$$

les lignes géodésiques de cette surface sont, non seulement fermées, mais encore *algébriques*.

Les calculs qui permettent de vérifier ce fait sont d'une nature trop élémentaire pour qu'il vaille la peine de les développer ici; je me contenterai d'indiquer les résultats.

La surface présente un point conique à l'origine et se compose de deux parties symétriques par rapport au plan des x, y; il suffira de considérer l'une d'elles, celle du bas, par exemple, qui a la forme d'une poire allongée dont la pointe serait tournée vers le haut. Le plan du parallèle maximum a pour équation $z = -a$. Si, en conservant l'axe des z, on prend pour plan des x, y ce plan du parallèle maximum, on reconnaît que les différents points de la surface s'obtiennent en faisant varier u de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et θ de 0 à 2π dans les formules

$$x = \frac{a}{4}\cos u \cos\theta,$$

$$y = \frac{a}{4}\cos u \sin\theta,$$

$$z = a\left(1 - \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right);$$

l'élément linéaire de la surface est alors

$$ds^2 = \frac{a^2}{16}\left[(2+\sin u)^2\, du^2 + \cos^2 u\, d\theta^2\right],$$

et l'équation différentielle des lignes géodésiques est

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\cos\alpha}{\cos u}\,\frac{2+\sin u}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2 u}}.$$

en désignant par α l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe le parallèle maximum.

L'intégration se fait sans peine au moyen de la substitution

$$\sin u = \sin\alpha \sin\varphi,$$

et la même substitution permet de rectifier la courbe.

On parvient ainsi aux équations suivantes dont l'une ou l'autre peut définir la ligne géodésique qui passe par le point où la partie positive du nouvel axe des x rencontre la surface : la constante d'intégration a, en effet, été déterminée de façon que θ et u puissent s'annuler en même temps

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2 u}}{\sin^2\alpha} \frac{2\sin u - \sin^2\alpha(1 + \sin u)}{\cos u(1 - \sin u)},$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \frac{\sin^2\alpha(1 + \sin u) - 2\sin^2 u}{\cos u(1 - \sin u)}.$$

Supposons que l'on parte de la valeur $u = 0$, que α soit compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et que le radical soit d'abord positif; quand u croît de 0 à α, θ croît de 0 à $\pi + \alpha$, z augmente continuellement et l'on obtient une première branche de courbe C_1 qui, en contournant la surface, s'élève au-dessus du parallèle maximum; lorsque u décroît de α à 0, on doit changer le signe du radical, pour que θ continue de croître; θ croît alors de $\pi + \alpha$ à $2\pi + 2\alpha$; la portion de courbe C_2 que l'on obtient ainsi est symétrique de C_1 par rapport au plan méridien de longitude $\pi + \alpha$; C_1 et C_2 se croisent en un point pour lequel on a

$$\theta = \alpha, \qquad \sin u = \frac{\sin^2\alpha}{2 - \sin^2\alpha}.$$

Lorsque u décroît de 0 à $-\alpha$, θ croît de $2\pi + 2\alpha$ à $3\pi + \alpha$; on obtient ainsi une portion de courbe C_3 qui descend au-dessous du plan des x, y jusqu'à ce que l'on soit dans le plan de symétrie; le point le plus bas de C_3 est sur la même parallèle à l'axe des z que le point le plus haut où se raccordent C_1 et C_2; enfin, quand u croît de $-\alpha$ à 0, il faut encore changer le signe du radical; θ croît de $3\pi + \alpha$ à 4π; et l'on obtient une portion de courbe symétrique de C_3; la courbe totale est fermée. Elle présente la forme d'un 8 gauche : on peut se figurer le point double du 8 sur la partie an-

térieure de la surface, chacune des boucles passant derrière la surface, l'une en haut, l'autre en bas. Il est très aisé d'imaginer un fil fermé affectant cette forme et tendu sur la surface; mais il y a plus : on vérifie sans peine que la longueur totale de la courbe est indépendante de α et qu'elle est, par conséquent, égale à deux fois la circonférence du parallèle maximum, ou encore à la longueur de la courbe méridienne; parallèle et méridienne sont en effet des courbes géodésiques limites, qui correspondent aux hypothèses $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En sorte que le *même* fil, en se déformant de manière à rester tendu sur la surface, permettra de représenter toutes les lignes géodésiques. La construction d'un modèle qui permettrait de constater expérimentalement ces résultats n'offrirait évidemment aucune difficulté.

Enfin, si l'on projette la ligne géodésique sur son plan de symétrie, on trouve, en conservant le même axe des z et en prenant pour axe des x l'intersection du plan de symétrie avec le plan du parallèle maximum, l'équation

$$x = \frac{1}{4}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\frac{[a^2+z(2a-z)]a^2\sin^2\alpha-2(a^2-z^2)^2}{a(a-z)^2};$$

la seule partie de cette courbe qu'il convienne de garder est celle qui est contenue à l'intérieur de la courbe méridienne; il est à peine utile de dire que les deux courbes sont tangentes au point qui correspond au point double de la ligne géodésique.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. KIRCHHOFF. — Vorlesungen ueber mathematische Physik. IIIer Band : *Electricität und Magnetismus.* In-8°, x-218 p. Leipzig, Teubner, 1891.

On est vraiment étonné de la variété des sujets examinés en ce volume si mince où M. Max Planck, professeur à l'Université de Berlin, a réuni les leçons dans lesquelles G. Kirchhoff traitait de l'Électricité et du Magnétisme. Jamais l'art avec lequel l'illustre géomètre savait condenser beaucoup d'idées en peu de paroles ne s'était mieux montré. Peut-être même la concision est-elle ici poussée à l'excès. Il est des questions qui sont exposées si brièvement que l'étudiant qui les ignorerait aurait quelque peine à s'en faire une idée par la seule lecture de ce livre.

Chose digne de remarque, ce sont souvent les problèmes dont G. Kirchhoff a, dans ses Mémoires, donné ou perfectionné la solution, qui sont, dans ses leçons, traités avec une rapidité exagérée. Telle est, par exemple, la substitution d'une fonction magnétisante, variable avec l'intensité d'aimantation, au coefficient d'aimantation constant considéré par Poisson. Telle est encore la théorie des pressions à l'intérieur des corps diélectriques. Sans doute, il craignait de paraître attacher trop d'importance aux recherches dont il était l'auteur.

Du reste, il ne faut pas se méprendre sur la nature du livre que nous avons sous les yeux ; ce n'est nullement un traité d'Électricité et de Magnétisme où les diverses théories qui constituent cette branche de la Physique soient exposées chacune dans la mesure qu'exige son importance : c'est un cours, où le professeur tantôt examine en détail un sujet qui intéresse particulièrement son auditoire, tantôt se borne à esquisser le plan d'une théorie qui, par sa nature, ses difficultés ou ses imperfections, serait moins utile à ses élèves.

Les parties que G. Kirchhoff étudie en détail sont toujours celles qui sont étroitement liées aux équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en Physique mathématique ; évidemment l'auteur s'adresse plutôt aux géomètres qu'aux physiciens.

A ce point de vue, nulle étude n'est, plus que l'Électrostatique, féconde en rapprochements aussi heureux pour l'Analyse que pour la Physique. Elle est largement traitée.

Après quelques définitions fondamentales, la première leçon traite de la fonction potentielle et de ses propriétés hors de masses agissantes; elle expose les caractères fondamentaux des surfaces de niveau et de leurs trajectoires orthogonales.

La deuxième leçon expose les propriétés de la fonction potentielle à l'intérieur des masses agissantes, l'équation de Poisson et les conditions fondamentales de l'équilibre électrique.

Dans la troisième leçon est indiquée la transformation de l'équation de Laplace en coordonnées orthogonales quelconques; cette transformation est appliquée aux coordonnées elliptiques et sert à résoudre le problème de la distribution de l'électricité sur un ellipsoïde soustrait à toute influence.

Au début de la quatrième leçon, G. Kirchhoff montre comment peut être abordé le problème de la distribution électrique sur un ellipsoïde soumis à une influence quelconque; mais il se contente d'amorcer ce problème général, et se restreint aussitôt au cas de la sphère; dans ce cas, la solution du problème est donnée par un développement procédant suivant les fonctions de Laplace, dont G. Kirchhoff étudie les principales propriétés. Lejeune-Dirichlet et M. Darboux ont démontré que le développement convergeait effectivement vers la fonction que l'on se propose de représenter; ce théorème est ici énoncé sans démonstration.

L'application au problème de la distribution électrique de la transformation par rayons vecteurs réciproques fait l'objet de la cinquième leçon. Une élégante application en est faite à l'équilibre électrique sur la calotte sphérique.

La sixième leçon traite du célèbre problème de Poisson : la recherche de la distribution qu'affecte l'électricité en équilibre sur deux sphères isolées ou contiguës. La théorie des fonctions sphériques ramène la détermination de la fonction potentielle dans tout l'espace à la détermination des valeurs que prend cette fonction aux divers points de l'axe des deux sphères. Ces valeurs sont elles-mêmes données par des développements en série que G. Kirchhoff a mis sous une forme nouvelle.

La septième leçon est consacrée à l'étude du travail et du po-

tentiel des forces électrostatiques; le calcul de ce potentiel est fait pour le cas de deux sphères isolées ou contiguës.

Dans la huitième leçon sont examinées des questions de distribution électrique qui se rapportent à la théorie de l'électromètre absolu de Sir W. Thomson. Ces questions se ramènent à l'étude de la représentation conforme d'une aire plane, problème que M. Schwartz a, le premier, traité en toute rigueur. G. Kirchhoff en donne une solution élégante qui diffère de celle de M. Schwartz.

Avec la neuvième leçon, commence l'étude des courants permanents, et en particulier des courants linéaires, pourvus ou non de dérivations.

La dixième leçon aborde les courants qui circulent dans des corps étendus en tous sens; la résistance de semblables conducteurs est définie avec précision et calculée dans quelques cas : en particulier, dans un cas, traité par M. H. von Helmholtz, qui fournit la valeur approchée de la correction relative à l'orifice d'un tuyau sonore ouvert.

Dans la onzième leçon sont exposées les lois fondamentales du mouvement de l'électricité dans les plaques et les lames courbes; cette dernière question conduit à l'étude de la représentation conforme d'une aire quelconque sur une aire plane.

Trois leçons seulement sont consacrées à l'étude des aimants et des corps diélectriques.

Dans la douzième leçon, sont données les définitions fondamentales relatives aux aimants; les propriétés principales de la fonction potentielle magnétique sont brièvement exposées, sans que d'ailleurs la non-existence de la force à l'intérieur d'un aimant soit démontrée.

La treizième leçon a pour objet l'étude de l'aimantation par influence. Les conditions d'équilibre magnétique sur une masse de fer doux sont établies par une méthode qui est donnée comme la méthode de Poisson, mais qui, en réalité, diffère profondément de cette dernière et n'est pas sujette aux mêmes objections analytiques. Le problème qui a pour but la détermination de la fonction potentielle du magnétisme induit est mis en équation comme Poisson a enseigné à le faire; l'uniformité de la solution est démontrée par la méthode due à Sir W. Thomson. La distribution magnétique dans une sphère pleine ou dans une couche limitée

par deux sphères concentriques est déterminée aisément au moyen de développements procédant suivant les fonctions de Laplace. La méthode qui permet de déterminer l'aimantation prise par une sphère de fer doux dans un champ uniforme s'étend aisément à un ellipsoïde quelconque. Enfin, sans aborder le difficile problème de l'aimantation d'un ellipsoïde quelconque dans un champ quelconque, Kirchhoff démontre le beau théorème de F.-E. Neumann, qui ramène à trois quadratures la détermination des trois composantes du moment magnétique de l'ellipsoïde. C'est en terminant cette leçon que G. Kirchhoff indique brièvement comment l'expérience oblige à remplacer le coefficient d'aimantation par une fonction de l'intensité d'aimantation.

La quatorzième leçon est une des plus riches du livre; l'auteur y a condensé les résultats qu'une foule de géomètres, et en particulier Helmholtz, ont groupé autour de l'étude de la fonction qu'ils ont nommée l'*énergie magnétique*. Kirchhoff forme d'abord cette fonction que l'équilibre magnétique rend minimum pour une position donnée des aimants, puis il indique comment elle peut servir de potentiel aux forces qui s'exercent entre des aimants invariables et des corps parfaitement doux mobiles.

Des considérations analogues s'appliquent aux diélectriques. En particulier, elles permettent de déterminer les perturbations que la présence d'un milieu diélectrique apporte aux actions mutuelles des corps conducteurs qui y sont plongés. Enfin elle sert de point de départ à la théorie des pressions à l'intérieur des diélectriques, que G. Kirchhoff expose brièvement sous la forme que lui a donnée Maxwell, sans indiquer les modifications qui y ont été apportées par Helmholtz et par lui-même.

Dans la quinzième leçon sont traitées l'action qu'un courant exerce sur un aimant et l'aimantation par les courants.

Pour découvrir la loi fondamentale de l'Électromagnétisme, G. Kirchhoff suit une méthode qui est, je crois, due à Riemann. Il admet que l'action d'un courant sur un pôle d'aimant admet une fonction potentielle qui est une fonction harmonique, mais non uniforme, des coordonnées du pôle. Cette hypothèse détermine la forme de cette fonction potentielle, mais laisse indéterminée la valeur du coefficient constant dont elle est affectée; cette valeur dépend de l'unité choisie pour mesurer la quantité d'électricité;

elle n'est pas la même dans le système électrostatique et dans le système électromagnétique.

La fonction potentielle une fois connue, il est aisé de calculer les composantes de la force qu'un courant exerce sur un pôle magnétique; ces composantes sont celles auxquelles on est conduit si l'on suppose que chaque élément de courant agit sur le pôle suivant la loi de Biot et Savart. La loi trouvée s'étend aisément au cas où les courants, au lieu de parcourir un fil fin, parcourent une masse métallique d'étendue finie dans tous les sens.

La théorie de l'aimantation par les courants est indiquée et appliquée à deux cas bien distincts. Dans le premier cas, les courants ne rencontrent pas l'aimant; celui-ci a la forme d'un tore et les courants parcourent une bobine annulaire dont ce tore est l'âme. Dans le second cas, les courants circulent à l'intérieur de l'aimant qui a la forme d'un cylindre circulaire indéfini.

La seizième leçon débute par l'étude de l'action qu'un pôle exerce sur un élément de courant. Kirchhoff admet d'emblée la loi qu'Ampère a démontrée. La force qu'un pôle exerce sur un élément de courant est une force appliquée en un point de l'élément de courant, égale et de sens contraire à celle que l'élément de courant exerce sur le pôle. D'après Biot, cette dernière est appliquée au pôle, en sorte qu'elle forme avec la première un *couple élémentaire*. D'après Ampère, elle est appliquée en un point coïncidant géométriquement avec l'élément de courant, en sorte qu'elle est directement opposée à la précédente. Comme Ampère l'a montré, ces deux hypothèses sont équivalentes lorsqu'il s'agit de calculer l'action d'un courant fermé sur un pôle. Les lois de Biot et d'Ampère expliquent les rotations électromagnétiques.

Pour traiter des actions mutuelles des courants, Kirchhoff admet en principe que deux courants fermés exercent les mêmes actions mutuelles que les deux feuillets magnétiques qui exerceraient, sur un pôle d'aimant quelconque, les mêmes actions que ces deux courants. De là, il déduit aisément les deux formes que F.-E. Neumann et que W. Weber ont données au potentiel électrodynamique. Il montre que, si l'on impose à l'action mutuelle de deux éléments de coïncider avec leur ligne de jonction, cette action est donnée par la loi d'Ampère.

La dix-septième et dernière leçon traite de l'Induction. La loi

donnée par F.-E. Neumann est reliée à la loi de l'électrodynamique par l'intermédiaire de la loi de Joule et du principe de la conservation de l'énergie.

Les lois de l'induction sont ensuite étendue aux conducteurs à trois dimensions traversés par des courants quelconques. Kirchhoff ne donne pas à ces lois la forme générale que leur a donnée M. Helmholtz. Il attribue la valeur 1 à la constante d'Helmholtz; en sorte qu'il leur donne la forme regardée par M. Helmholtz comme celle de Maxwell. Il démontre que cette forme entraîne la stabilité de l'équilibre électrique sur un conducteur immobile. On sait qu'il en est ainsi toutes les fois que la constante d'Helmholtz n'est pas négative.

Les lois de l'induction s'étendent aux courants de déplacement au sein des diélectriques et fournissent les bases de la théorie électromagnétique de la lumière. G. Kirchhoff termine ces leçons en donnant un court aperçu de cette théorie

Il nous semble que la lecture de ces leçons est de nature à suggérer à ceux qui enseignent la Physique d'utiles réflexions; il en est une sur laquelle nous demanderons au lecteur la permission d'insister.

La nature des sciences qui ont pour objet non pas la contemplation abstraite de nos conceptions, mais l'étude des réalités extérieures, est de recommencer sans cesse; chaque nouvelle découverte nous oblige à modifier, à corriger, à compléter les principes mêmes des théories par lesquelles nous cherchons à représenter les phénomènes. L'enseignement, au contraire, du moins celui qui s'adresse au commençant, a besoin de fixité, de stabilité; s'il change chaque jour, s'il est sans cesse en évolution, il ne saurait avoir la clarté, la précision, la concision, qu'exige l'esprit encore novice de l'étudiant. Il en résulte que l'enseignement, du moins, je le répète, celui qui ne s'adresse pas au chercheur déjà rompu avec la Science et en quête de nouvelles découvertes, l'enseignement, dis-je, ne peut pas et ne doit pas être un miroir où se reflète l'état actuel de la Science; il doit se résigner à être en retard sur les vues nouvelles, sur les idées en voie de transformation. Pour apprendre à marcher à un enfant, on doit choisir une route plane et unie, quitte à demeurer fort en arrière de ceux qui font sauter la roche pour pousser la voie plus avant.

Le professeur doit donc chercher à reconnaître ces voies unies et battues où les débutants marcheront à l'aise; à les distinguer des terrains encore encombrés, des roches abruptes où le sentier est à peine frayé. C'est dans les premières qu'il doit maintenir ses élèves; tout au plus peut-il, parfois, leur montrer de loin le pays où, plus tard, ils seront de force à s'aventurer, mais où il doit bien se garder de les engager à la légère.

Sa tâche, ainsi comprise, est ardue; elle exige un grand sens critique, car il est souvent malaisé de délimiter ce qui, à un moment donné du développement de la science que l'on enseigne et des esprits à qui on l'enseigne, est déjà classique et ce qui ne le sera que plus tard; elle exige aussi une grande modestie, car un marcheur habile à gravir les roches les plus escarpées n'a guère occasion de tirer vanité de son agilité lorsqu'il promène un enfant, par la main, sur une grande route.

Le livre de Kirchhoff peut servir de modèle à ceux qui craindraient de faiblir dans cette tâche. La tentation devait être forte, pour l'illustre professeur de l'Université de Berlin, de consacrer son enseignement aux sujets les plus nouveaux de la Science électrique, à ceux surtout que ses travaux créaient ou développaient. Il a su résister à cette tentation, se limiter aux questions devenues classiques, plaçant seulement çà et là une amorce à laquelle ceux de ses élèves qui pousseront plus loin l'étude de la Physique pourront aisément rattacher leurs nouvelles conquêtes.

P. Duhem.

H. MENZEL. — Ueber die Bewegung einer starren Geraden, welche mit mehreren Punkten in festen Ebenen oder auf festen Geraden gleitet. Inaugural-Dissertation. In-8°, 66 pages. Münster, 1891.

La Dissertation inaugurale, présentée par M. Menzel à la Faculté de Münster, est un exposé très clair des divers problèmes qui se présentent dans l'étude du mouvement d'une droite rigide dont plusieurs points décrivent des plans ou des droites fixes.

Considérons une droite g et n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, sur cette droite, qui décrivent respectivement n plans fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. L'auteur remarque, immédiatement, qu'on passera, aisément, du

cas où les points décrivent des plans aux cas où ils décrivent des droites, en supposant que deux des points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ viennent se confondre. Il suffit donc d'étudier le cas général où $P_1, \ldots, P_n$ décrivent des plans et le cas des droites ne sera qu'un cas particulier du cas général.

Le nombre n ne peut prendre que les cinq valeurs 1, 2, 3, 4 et 5.

1° $n = 1$, *un point* P_1 *de* g *décrit un plan* A. Par tout point M de l'espace il passe une *gerbe* de droites. g prend ∞^4 positions dans l'espace.

2° $n = 2$, *deux points* P_1, P_2 *de* g *décrivent respectivement deux plans* A_1, A_2. Les droites g forment un *complexe*.

3° $n = 3$, les droites g forment une *congruence*.

4° $n = 4$, les droites g engendrent une *surface réglée*.

5° $n = 5$, il n'y a qu'un nombre *limité* de droites g.

Ces cinq cas donnent lieu aux deux problèmes généraux suivants, que l'auteur traite successivement :

I. *De combien de manières peut-on faire coïncider un point* P *de la droite* g *avec un point arbitraire de l'espace, lorsque* g *peut prendre* ∞^3 *positions* (2°); *quelle est la surface ou quelle est la courbe décrite par* P *quand* g *peut prendre* ∞^2 (3°) *ou* ∞^1 (4°) *positions?*

II. *Étudier le complexe du cas* (2°), *la congruence* (3°) *et la surface réglée* (4°).

Pour faire l'étude du problème I, M. Menzel emploie deux méthodes. La première méthode est une méthode de substitutions successives : il traite d'abord le problème simple d'une droite g, dont deux points P_1, P_2 décrivent deux droites situées dans un même plan; de là il passe au cas où les deux droites sont quelconques, puis, au cas où P_1 décrit une droite a_1 et P_2 un plan A_2 et ainsi de suite, de proche en proche. La seconde méthode, plus élégante, rentre d'ailleurs mieux dans l'esprit général de l'exposition, car elle permet à l'auteur de traiter immédiatement les cas généraux pour ne considérer les cas des droites que comme des cas particuliers. Voici, brièvement, en quoi elle consiste :

Soit g une droite dont trois points P_1, P_2, P_3 décrivent respectivement les trois plans A_1, A_2, A_3. Soient O le point d'intersection des trois plans A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 trois plans passant par P et respectivement parallèles aux plans A_1, A_2, A_3. Menons par O la parallèle g' à g, elle coupe les plans A'_1, A'_2, A'_3 en trois points Q_1, Q_2, Q_3, tels que $OQ_i = P_iP\ (i = 1, 2, 3)$. Les points Q_1, Q_2, Q_3 décrivent trois sphères K_1, K_2, K_3 de centre O. D'autre part, remarquons que

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{OQ_1}{OQ_2} = \dfrac{P_1P}{P_2P} = \text{const.} = c. \\[2ex] \dfrac{OQ_1}{OQ_3} = \dfrac{P_1P}{P_3P} = \text{const.} = k. \end{cases}$$

Donc, étant donné un point Q_1 arbitraire, dans l'espace, les points Q_2 et Q_3 de la droite OQ_1 seront parfaitement déterminés par les relations $\dfrac{OQ_1}{OQ_2} = c$, $\dfrac{OQ_1}{OQ_3} = k$, et, si par Q_1, Q_2, Q_3 on mène respectivement des plans A'_1, A'_2, A'_3 parallèles à A_1, A_2, A_3, ces trois plans se couperont en un point P bien déterminé, vérifiant les relations (1). On voit ainsi qu'à tout point Q_1 de l'espace correspond un point P. Il est aisé de se rendre compte qu'à tout point P correspond un seul point Q_1. On en conclut que P et Q_1 sont liés par une collinéation et, par suite, immédiatement que, Q_1 décrivant une sphère K_1, P décrit une surface du second ordre K. De plus, comme, dans cette collinéation, le plan de l'infini se correspond à lui-même, K est un *ellipsoïde*. L'étude plus approfondie de cette collinéation conduit alors l'auteur aux conclusions suivantes du problème I :

1° *Lorsque g peut prendre ∞^3 positions* ($n = 2$), *tout point* P *de la droite g peut, de deux façons différentes, prendre une position donnée dans l'espace*. Les points P de l'espace, par lesquels passent deux droites g réelles, sont séparés des points par lesquels passent deux droites g imaginaires par un cylindre elliptique.

2° *Lorsque g peut prendre ∞^2 positions* ($n = 3$), P *décrit un ellipsoïde*. Tous ces ellipsoïdes sont concentriques. La congruence formée par les droites g appartient à un complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental a pour faces les plans A_1, A_2, A_3, A_∞.

3° *Lorsque g peut prendre ∞^1 positions* ($n = 4$), P *décrit une*

ellipse. Le lieu des centres de ces ellipses est la droite D, qui est partagée par les plans A_1, A_2, A_3, A_4 dans le même rapport que les droites g, et de telle façon que les segments interceptés soient minima. Toutes ces droites g sont également inclinées sur D. Ces propositions sont connues, comme on sait.

4° *Quand g ne peut prendre qu'un nombre fini de positions* ($n = 5$), *le nombre est égal à* 2.

Pour étudier maintenant le complexe du cas (2°), on cherche d'abord son ordre, c'est-à-dire l'ordre du cône engendré par toutes les droites g qui passent par un point M de l'espace. A cet effet, soit p une droite quelconque passant par M qui coupe les plans A_1, A_2 en deux points P_1 et P_2. Pour que la droite p soit une droite g il faudra que la longueur $P_1 P_2$ soit égale à une longueur donnée c. Portons alors sur p, à partir du point M, une longueur

$$MQ = P_1 P_2.$$

Pour que p soit une droite g, il faudra que Q se trouve sur la sphère K de centre M et de rayon c. Or, le lieu du point Q est un cylindre hyperbolique dont les génératrices sont parallèles à la droite d'intersection de A_1 et A_2 : donc Q devra se trouver à l'intersection de la sphère K et du cylindre H. On en conclut que le cône du complexe qui a pour sommet M et pour base la courbe (K, H) est un cône K^4 du quatrième ordre et, par suite, que la courbe du complexe est de quatrième classe.

Une étude directe du complexe (2°), de la congruence (3°) et de la surface réglée (4°), conduit finalement M. Menzel à énoncer les résultats généraux dont voici un résumé :

Pour le complexe : Le cône K^4 du complexe est du quatrième ordre et de la huitième classe, la génératrice de K^4 qui est parallèle à l'intersection de A_1 et A_2 est telle qu'il passe deux nappes du cône par cette génératrice, tangentes entre elles. Les gerbes, issues des points cycliques de A_1, A_2 et du point à l'infini sur la droite (A_1, A_2), appartiennent au complexe. Toutes les droites des trois plans A_1, A_2, A_∞ appartiennent au complexe. La courbe du complexe A^{IV} est de quatrième classe et du sixième ordre.

Pour les congruences : Soit H_1 la congruence des droites g,

telles que P_1, P_2, P_3 décrivent respectivement les plans A_1, A_2, A_3. Π_1 est du sixième ordre, de la seconde classe et du quatrième rang. Les six droites g qui passent en un même point sont sur un cône du second ordre. Dans chacun des plans A_1, A_2, A_3, A_∞, il y a une infinité de droites g qui enveloppent une courbe de quatrième classe. Les six côtés du tétraèdre T, formé par les quatre plans A_1, A_2, A_3, A_∞, sont des droites doubles de la congruence.

La surface focale de la congruence Π_1 est du douzième ordre et de la quatrième classe.

En supposant que les deux points P_2 et P_3 se confondent, on obtient la congruence Π_2 des droites g, dont un point P_1 décrit un plan A_1 et un autre point P_2, une droite a_2. Π_2 est du quatrième ordre, de la seconde classe, du second rang. Sa surface focale est du huitième ordre et de la quatrième classe.

Enfin, *pour les surfaces réglées :* Lorsque g peut prendre ∞^1 positions, elle engendre une surface réglée que nous désignerons par R_1^4, R_2^4 ou R_3^4 suivant que g a quatre points dans quatre plans, deux points dans deux plans et un point sur une droite a_3, ou deux points sur deux droites a_1, a_2. Ces surfaces sont du quatrième ordre, chacune d'elles possède une courbe double du troisième ordre qui, pour R_2^4, se décompose en a_3 et une conique, pour R_3^4, se décompose en a_1, a_2, et en la droite a_∞, rejetée à l'infini, qui rencontre a_1 et a_2. Sur chacune de ces surfaces, il existe une simple infinité d'ellipses dont les plans enveloppent une surface développable de troisième classe qui, pour R_2^4, se décompose en le faisceau de plans passant par a_3, et un cylindre parabolique, et, pour R_3^4, se décompose en les trois faisceaux de plans ayant pour axes a_1, a_2 et la droite a_∞ qui rencontre a_1 et a_2. C. Bourlet.

O. TUMLIRZ. — Théorie électromagnétique de la lumière. Ouvrage traduit de l'allemand par *G. van der Mensbrugghe*. In-8°, XVI-157 p. Paris, Hermann, 1892.

La théorie, imaginée par Maxwell, d'après laquelle la lumière serait due non pas aux vibrations périodiques d'un éther élastique, mais aux courants périodiques produits dans l'intérieur d'un éther

diélectrique, attire, depuis plusieurs années, l'attention des physiciens. Les récentes expériences de M. Hertz ont accru encore le crédit qu'avaient rencontré les théories de l'illustre continuateur de Faraday.

Ces théories, quoique fort en vogue, sont peu connues en France et la raison en est simple. Les vues que Maxwell a émises sont condensées, plutôt qu'exposées, dans un style concis, obscur, qui exige à chaque instant du lecteur un véritable travail d'invention. D'ailleurs, ces vues représentent seulement l'ébauche de la théorie électromagnétique de la lumière et non cette théorie elle-même, avec tous les développements qui la constituent aujourd'hui. Les travaux qui l'ont développée sont dus à M. Helmholtz, à M. Boltzmann, à M. Gibbs, à une foule de théoriciens; ils sont dispersés dans les journaux scientifiques, dans les publications académiques de l'Allemagne, de l'Angleterre, des États-Unis. Pour beaucoup de physiciens, il est difficile de se procurer tous ces Mémoires, encore plus difficile de les pénétrer au point d'en apercevoir l'enchaînement logique, de les réunir en un tout.

Il y a peu de temps, M. H. Poincaré a entrepris d'exposer les idées directrices qui dominent ces travaux dont nous venons de parler. Tout le monde a lu le Livre qu'il a consacré à la critique des théories de Maxwell et d'Helmholtz. Tout, en effet, dans ce Livre, contribue à retenir l'attention : la largeur avec laquelle les diverses doctrines sont esquissées; la vigueur de la lumière qui fait saillir les idées maîtresses, les hypothèses fondamentales, comme aussi les difficultés et les objections; tout, jusqu'au septicisme bien dangereux peut-être, mais à coup sûr bien captivant, qui nous séduit en même temps qu'il nous trouble par l'éclat miroitant des paradoxes.

Mais ce Livre entraînant qu'on ne peut quitter, lorsqu'on l'a ouvert, qu'on lit avec impatience comme un drame, où l'on assiste à la lutte des idées, où l'on attend fiévreusement le dénouement, la victoire ou la défaite des doctrines de Maxwell; où l'on ressent, lorsque l'auteur remet ce dénouement à plus tard, la déception que font éprouver certains romans qui ne finissent pas; ce Livre, dis-je, n'est pas une œuvre didactique. On imagine mal l'impression qu'il produirait sur l'esprit d'un étudiant encore ignorant des travaux d'Helmholtz et de Maxwell, et l'on peut même affirmer que,

perçue par une intelligence mal préparée, cette impression y pourrait engendrer de funestes tendances : la persuasion que la Physique n'est pas, comme les Mathématiques, soumise aux règles d'une inflexible logique; qu'un ensemble de théories y peut être accepté alors même que ses différentes parties se contredisent.

Aussi, tandis qu'aucun physicien ne pourrait prétendre a quelque compétence sur la théorie électromagnétique de la lumière, s'il n'a lu et médité l'ouvrage de M. Poincaré, cet ouvrage ne satisfait pas aux exigences du professeur ou de l'étudiant; ceux-ci réclament un traité où cette théorie soit exposée d'une manière didactique.

Ce Traité indispensable a été écrit en 1883 par M. O. Tumlirz, professeur à l'Université allemande de Prague. C'est ce traité que M. van der Mensbrugghe, professeur à l'Université de Gand, a traduit en français; par là, il a rendu grand service aux physiciens français, qui, bientôt, auront tous ce petit livre entre les mains.

M. O. Tumlirz a adopté, pour exposer la théorie électromagnétique de la lumière, un ordre qui, à coup sûr, s'impose comme le seul logique; il prend pour point de départ la théorie de l'Électrodynamique tel que M. H. von Helmholtz l'a développée dans d'impérissables Mémoires. C'est par là seulement que l'œuvre de Maxwell peut être établie d'une manière claire et solide.

Le livre est construit sur un plan très simple : il se divise en deux sections, l'une consacrée à l'établissement des lois fondamentales de l'Électrodynamique, l'autre à l'exposé de la théorie électromagnétique de la lumière.

L'auteur examine d'abord les propriétés essentielles des diélectriques; il définit les *courants de déplacement*; puis il rappelle brièvement les lois classiques de l'Électrodynamique, de l'Électromagnétisme et de l'Induction; généralisant alors ces dernières, il développe, dans sa majestueuse ampleur, la théorie, donnée par M. H. von Helmholtz, du mouvement de l'électricité dans les conducteurs à trois dimensions : tel est le sommaire de la première Section.

Dans la seconde Section, M. O. Tumlirz applique les lois trouvées à l'étude de la lumière, assimilée aux courants fermés et périodiques qui peuvent prendre naissance au sein d'un diélectrique; il étudie avec de grands détails les lois de la réflexion et

de la réfraction de la lumière à la surface des corps soit isotropes, soit cristallisés.

Le livre de M. Tumlirz, écrit longtemps avant les recherches théoriques et expérimentales de M. Hertz, ne dit naturellement rien de ces dernières; c'est une lacune; il est regrettable que l'auteur n'ait pas ajouté à la traduction française quelques pages pour la combler. Cette lacune, toutefois, ne saurait empêcher ce livre de rendre les plus grands services; nous en conseillons vivement la lecture à ceux qui veulent se faire une idée nette et précise des récentes doctrines au sujet de l'Électrodynamique.

P. Duhem.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

Par M. LIPSCHITZ.

Désignons la situation d'un point sur la surface donnée par les deux variables indépendantes P, Q, et supposons que le carré de l'élément linéaire correspondant ait la forme

$$E\,dP^2 + 2F\,dP\,dQ + G\,dQ^2,$$

alors il s'agit de trouver un système de deux variables F, U construit ainsi qu'à l'aide d'une quantité finie et positive N vaille l'équation

$$(1)\qquad E\,dP^2 + 2F\,dP\,dQ + G\,dQ^2 = N(dF^2 + dU^2).$$

Maintenant la décomposition des expressions quadratiques par rapport aux différentielles, à gauche et à droite, en facteurs linéaires, qui entraîne l'emploi de l'unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$, fait voir que l'expression à gauche est la norme de la fonction linéaire $\sqrt{E}\,dP + \frac{F + i\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\,dQ$, où $\Delta = EG - F^2$, tandis que $dF^2 + dU^2$

est la norme de $dF + i\,dU$. Or comme l'équation (1) exige que la fonction linéaire de la gauche soit divisible ou par $dF + i\,dU$ ou par $dF - i\,dU$, admettons, ce qui suffira, la première supposition.

Or, si l'on donne au quotient en question la forme exponentielle $e^{\alpha+i\beta}$, on aura au lieu de (1) l'équation

$$(2)\qquad \sqrt{E}\,dP + \frac{F + i\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\,dQ = e^{\alpha+i\beta}(dF + i\,dU),$$

d'où suit que N doit être la norme du facteur $e^{\alpha+i\beta}$, ou $N = e^{2\alpha}$. En jetant le facteur $e^{\alpha+i\beta}$ à la gauche, il paraît que

$$(3)\qquad dF + i\,dU = e^{-\alpha-i\beta}\left(\sqrt{E}\,dP + \frac{F + i\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\,dQ\right)$$

doit être une différentielle exacte. On a donc la condition nécessaire et suffisante

$$(4)\qquad \frac{\partial\left(e^{-\alpha-i\beta}\sqrt{\varepsilon}\right)}{\partial Q} - \frac{\partial\left(e^{-\alpha-i\beta}\,\dfrac{F + i\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\right)}{\partial P} = 0,$$

où la séparation entre les quantités réelles et imaginaires entraîne les deux équations différentielles partielles

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial P}\dfrac{F}{\sqrt{E}} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial Q}\sqrt{\varepsilon} - \dfrac{\partial\beta}{\partial P}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}} \qquad + \dfrac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial Q} - \dfrac{\partial\dfrac{F}{\sqrt{E}}}{\partial P} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\alpha}{\partial P}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}} \qquad + \dfrac{\partial\beta}{\partial P}\dfrac{F}{\sqrt{E}} - \dfrac{\partial\beta}{\partial Q}\sqrt{\varepsilon} - \dfrac{\partial\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}}{\partial P} \qquad = 0. \end{cases}$$

En résolvant par rapport aux quantités $\dfrac{\partial\beta}{\partial P}$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial Q}$, on acquiert

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta}{\partial P} = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[F\dfrac{\partial\alpha}{\partial P} - E\dfrac{\partial\alpha}{\partial Q} - \sqrt{E}\,\dfrac{\partial\left(\dfrac{F}{\sqrt{E}}\right)}{\partial P} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial Q}\right], \\[2ex] \dfrac{\partial\beta}{\partial Q} = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(G\dfrac{\partial\alpha}{\partial P} - F\dfrac{\partial\alpha}{\partial Q} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial P} + \dfrac{F}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial Q}\right), \end{cases}$$

d'où suit pour α l'équation différentielle partielle du deuxième ordre présente, après avoir ajouté aux deux nombres le fac-

teur $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$,

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(G\frac{\partial\alpha}{\partial P}-F\frac{\partial\alpha}{\partial Q}\right)\right]}{\partial P}+\frac{\partial\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(-\frac{F\,\partial\alpha}{\partial P}+\frac{E\,\partial\alpha}{\partial Q}\right)\right]}{\partial Q}\right\}\\
&=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\partial\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial P}+\frac{F}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial Q}\right)\right]}{\partial P}+\frac{\partial\left\{\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial Q}+\sqrt{E}\frac{\partial\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)}{\partial P}\right]\right\}}{\partial Q}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Ici le membre gauche est le paramètre second différentiel, formé pour α, par rapport au carré de l'élément linéaire de la surface; le membre droit est l'expression de la mesure de courbure dans le point (P, Q) de la surface, prise négativement, que l'on doit à Liouville. Au moment où α est déterminé, les équations (6) fournissent β en intégrant la différentielle exacte

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\beta=\int\Bigg\{&\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[F\frac{\partial\alpha}{\partial P}-E\frac{\partial\alpha}{\partial Q}-\sqrt{E}\frac{\partial\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)}{\partial P}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial Q}\right]dP\\
&+\left(G\frac{\partial\alpha}{\partial P}-F\frac{\partial\alpha}{\partial Q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial P}+\frac{F}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial Q}\right)dQ\Bigg\},
\end{aligned}\right.
$$

et après cela (3) conduit à l'expression de la combinaison $F+iU$

$$
(9)\qquad F+iU=\int e^{-\alpha-i\beta}\left(\sqrt{E}\,dP+\frac{F+i\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}}\,dQ\right).
$$

Dans la supposition spéciale que la mesure de courbure k est nulle partout, l'équation (7) est remplie par $\alpha=0$. Donc on a le facteur réel $N=1$, et les expressions de β et de $F+iU$ rentrent en celles que j'ai développées dans le *Sitzungsbericht de l'Académie de Berlin* du 10 mai de l'année 1883.

1re Part

CANTOR (MORITZ). — VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Zweiter Band, von 1200-1668. Erster Theil. — Leipzig, Teubner; 1892. 500 pages in-8°.

Il y a douze ans que le premier Volume des *Vorlesungen* est paru et que tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques attendent avec impatience la continuation de l'œuvre entreprise par l'illustre professeur d'Heidelberg. Ce long délai pouvait les rendre plus exigeants, mais M. Cantor sait tenir au delà de ce qu'on espère de lui.

Nous n'avons encore que la première Partie du second Volume, et elle paraît sans préface particulière comme sans index (¹). L'auteur, sans s'astreindre rigoureusement à l'ordre chronologique, y a adopté une division, d'abord par siècles, puis, à partir de 1400, par demi-siècles, avec une subdivision d'ordinaire géographique :

XIIIe *siècle*. — Chap. 41. Léonard de Pise et son *Liber Abaci*. — 42. Autres écrits de Léonard de Pise. — 43. Jordanus Nemorarius. Son *Arithmetica* et l'*Algorithmus demonstratus*. — 44. Du même : *De numeris datis; De triangulis*. — 45. Johannes de Sacrobosco, Johannes Campanus et autres.

XIVe *siècle*. — 46. Mathématiciens anglais (Bradwardin). — 47. Français (Oresme). — 48. Allemands. — 49. Italiens.

XVe *siècle* (1re *moitié*). — 50. Maîtres de calcul allemands Johann von Gemunden. Georg von Peurbach. — 51. Nicolas de Cusa. — 52. Mathématiciens italiens.

XVe *siècle* (2e *moitié*). — 53. Calcul sur les lignes. Le Livre de calcul de Bamberg. — 54. Johannes Widmann et les commencements d'une Algèbre allemande. — 55. Universités allemandes. Regiomontanus. — 56. Edition d'Euclide de Ratdolt. Alberti. Léonard de Vinci. L'Arithmétique de Treviso. — 57. Luca Paciuolo. — 58. Autres Italiens. Les Français Chuquet et Lefèvre.

(¹) La seconde Partie vient de paraître en librairie; nous en rendrons compte prochainement.

XVIe *siècle* (1re *moitié*). — 59. Mathématiciens français, espagnols et portugais. — 60. Mathématiciens des Universités allemandes. — 61. Maîtres de calcul allemands et cossistes en dehors des Universités. — 62. Michel Stifel. — 63. Géomètres allemands. Mathématiciens anglais. — 64. Italiens. L'équation cubique. — 65. Premiers écrits de Cardan. — 66. Ouvrages de Tartaglia. Derniers écrits de Cardan.

La possibilité de consacrer aujourd'hui cinq cents pages à l'ensemble des Chapitres dont nous venons de donner les titres témoigne hautement en faveur des recherches dont l'histoire des Mathématiques pendant le moyen âge a été l'objet, depuis un quart de siècle surtout. Ainsi que le dit M. Cantor, cette histoire, dans Montucla, fait l'effet d'une carte d'Afrique telle qu'on aurait pu la dessiner à la même époque : quelques noms, de vagues tracés, d'immenses lacunes. Désormais les explorateurs ont rapporté assez de données pour que, s'il reste encore bien des découvertes à faire, le relief général commence à s'accuser et que le caractère de la contrée soit suffisamment précisé. En dépouillant avec soin et sagacité les documents de toute sorte publiés jusqu'à ce jour, en y ajoutant ses propres recherches, M. Cantor a pu nous présenter un tableau vivant de l'enseignement mathématique dans les Universités et dans les écoles de divers degrés, en même temps qu'il nous a exposé avec détail les rares travaux originaux grâce auxquels la Science a progressé.

Malheureusement, les diverses contrées de l'Occident latin n'ont pas également fourni des travailleurs pour la moisson à faire ; il s'ensuit que, dans l'Ouvrage de M. Cantor, l'Allemagne prend une importance singulière, grâce à la richesse des informations qui la concernent ; l'Italie est également très bien partagée ; mais, pour ne pas parler de l'Espagne et du Portugal, où il y aurait cependant tant de recherches à faire, il est clair que, pour l'Angleterre et pour la France, les études sur l'enseignement mathématique au moyen âge ont été singulièrement négligées. Le nouveau Volume des *Vorlesungen* n'en doit être que plus précieux pour nous, parce qu'il peut indiquer ce qu'il y a à faire aux chercheurs de bonne volonté ; la tâche en réclame un grand nombre ; mais, partout où il y a une bibliothèque de livres anciens ou de manuscrits, on peut trouver l'occasion d'une étude intéressante sur quelque

Ouvrage qui n'est pas connu ou qui ne l'est que de nom. Il s'agit, d'ailleurs, de recherches qui peuvent être entreprises comme délassement d'autres travaux et qui n'exigent pas une longue préparation préalable, comme l'étude des Mathématiques grecques. Puisse l'appel que je fais ici ne pas rester sans écho! Des découvertes aussi intéressantes que celle du *Triparty* de Nicolas Chuquet (¹) peuvent encore être espérées, et si notre patrie peut se glorifier d'un second Oresme, nous ne devrions pas, ce semble, laisser à des étrangers le soin de nous le révéler, comme Curtze a fait pour l'illustre évêque de Lisieux.

Je n'ai point l'intention d'analyser en détail le nouvel Ouvrage de M. Cantor; on n'y trouve pas, au reste, comme dans le premier Volume des *Vorlesungen*, de ces questions soulevées depuis longtemps, souvent débattues sans avoir été tranchées et sur lesquelles il est intéressant de connaître l'opinion d'un nouvel historien qui les a étudiées avec conscience et a su y apporter des éléments jusqu'alors négligés. Faut-il faire une exception pour l'histoire, déjà maintes fois exposée, de la résolution des équations cubiques? C'est un point sur lequel, en tout cas, les conclusions de M. Cantor ne me paraissent pas donner matière à critique.

Il est certain que depuis que l'on s'est mis à étudier les *Cartelli* (²) échangés entre Luigi Ferrari et Tartaglia, le vent a tourné contre ce dernier. Auparavant, on ne possédait, pour juger cette affaire, que les récits du Brescian, Cardan s'étant abstenu de toute polémique contre lui; désormais il faut tenir compte d'autres pièces du procès, et reconnaître que les accusations lancées par Ferrari reposent souvent sur des faits incontestables.

Cardan, en général, distingue avec soin, dans ses écrits, ce qui lui appartient et ce qu'il emprunte à d'autres; il ne cite pas seulement les noms des inventeurs qu'il connaît, il remarque des découvertes qu'il ne sait à qui attribuer (³). On peut, sur ces

(¹) Publié par Aristide Marre dans le *Bulletin* Boncompagni, t. XIII.

(²) Ils ont été reproduits dès 1846 par Gherardi (*Di alcuni materiali per la storia della Facoltà matematica di Bologna*). En 1876, Giordani en a donné à Milan une édition complète.

(³) Ainsi celle du mode de suspension qui porte son nom et qu'il décrit dans le XVIIᵉ Livre de son Ouvrage *De subtilitate* comme étant une invention très ancienne.

questions de priorité, le convaincre d'erreur, mais non de mensonge. Il n'en est pas de même de Tartaglia, qu'on prend souvent à déguiser la vérité. Il emprunte aux morts et aux vivants sans le dire et ne cite guère que dans un intérêt polémique; du moment où il change la forme de l'exposition, il prétend être en droit de revendiquer le tout comme sien. Qu'il ait pillé Cardan lui-même, en prenant sa *Travagliata invenzione* (1), de 1551, dans le Livre I *De subtilitate*, publié l'année précédente, c'était peut-être de bonne guerre; mais sa véracité devient grandement suspecte, quand on le voit affirmer, en 1543, avoir fait sur le grec sa traduction d'Archimède qu'il a certainement copiée de celle faite au XIIIe siècle par Guillaume de Moerbecke (2).

Cardan a eu, sans aucun doute, à son égard, le tort de violer la promesse solennelle de ne pas publier une solution dont Tartaglia lui avait confié le secret; mais il a pu se croire, en partie au moins, dégagé de son serment par une circonstance que Ferrari nous apprend dans son second cartel (1er avril 1547). En 1542, lui et Cardan avaient vu entre les mains d'Annibale della Nave, professeur à l'Université de Bologne et gendre de Scipione del Ferro, un manuscrit de ce dernier, contenant exactement les constructions indiquées par Tartaglia à Cardan. Celui-ci a dû, dès lors, se demander si ces constructions avaient seulement été communiquées à Antonio-Maria Fior, l'adversaire de Tartaglia dans la joûte mathématique du 12 février 1535; si Nicolo les avait réellement retrouvées de lui-même. En tout cas, le droit de ce dernier à priorité de publication était infirmé par l'existence du manuscrit de Scipione.

Dans son *Ars magna* de 1545, Cardan attribua la réinvention à Tartaglia; il écarta donc le soupçon qui avait pu lui venir. Mais le même doute peut être soulevé aujourd'hui et il est difficile de le dissiper entièrement.

Dans le neuvième Livre de ses *Quesiti* de 1546, Tartaglia affirme avoir connu depuis longtemps bien des choses que Cardan venait de donner comme de lui-même; il affirme aussi en savoir là-dessus bien d'autres; mais il ne donne aucune preuve à l'appui

(1) Pour remettre à flot des bateaux submergés.
(2) *Voir* Heiberg, *Neue Studien zu Archimedes.*

ni de la première assertion ni de la seconde. Dans son *General trattato* de 1556, il raconte à sa façon ses démêlés avec Ferrari, en 1547 et 1548, mais ne donne sur les équations rien qui ne fût déjà connu. Bien plus, il ne paraît avoir jamais bien compris les deux découvertes capitales de Cardan : le procédé pour faire disparaître le terme du second degré dans l'équation cubique complète, et la reconnaissance de l'existence de trois racines.

On sait que Tartaglia avait clairement expliqué à Cardan la construction de la racine réelle pour les formes

$$\text{(I)} \qquad x^3 + px = q,$$

$$\text{(II)} \qquad x^3 = px + q.$$

Quant à la troisième : $x^3 + q = px$, il s'était contenté de dire qu'elle se résolvait avec la seconde, qui lui était comme naturellement jointe. Il est probable qu'il entendait seulement par là que si p et q ont les mêmes valeurs dans ces deux formes, la solution positive pour (II) se change pour (III) en négative avec la même valeur absolue.

C'est en cherchant si les réticences de Tartaglia ne cachaient pas quelque autre mystère que Cardan, en premier lieu pour cette troisième forme, déduisit de la racine réelle les deux racines imaginaires (*radices minus,* comme il s'exprime), et qu'en essayant de déterminer sous quelles conditions ces racines pouvaient devenir réelles, il reconnut le cas irréductible. Dès lors, il avait dépassé Tartaglia, qui resta incapable de le suivre.

L'étude du *General trattato* a d'ailleurs conduit M. Cantor à cette conclusion que Tartaglia, dont il reconnaît pleinement la grande ingéniosité, était mieux doué, en réalité, pour la Géométrie que pour l'Algèbre ; mais il est certainement singulier que ce qu'il a de plus original dans cet Ouvrage consiste principalement dans des constructions avec une seule ouverture de compas, sujet dont nous savons que Scipione del Ferro s'était occupé sans rien publier, de même que pour l'équation cubique (¹).

(¹) J'ajouterai ici à propos de Tartaglia une remarque bibliographique. Je possède un volume portant la date de [illegible] et la firme de Curtio Trojano, l'éditeur vénitien, ami et exécuteur testamentaire de Tartaglia (mort en [illegible]). Ce volume, où Trojano semble avoir eu l'intention de réunir les écrits de Tartaglia sur les

La profonde originalité de Cardan est, au contraire, tout à fait incontestable dans le domaine de l'Algèbre; s'il a emprunté à autrui, comme il le déclare d'ailleurs lui-même, le point de départ essentiel, il y a ajouté, en dehors de l'invention propre de Ferrari pour l'équation du quatrième degré, des découvertes capitales, et il n'a cessé, pendant trente ans, de poursuivre ses recherches et de les généraliser.

Je viens de m'étendre assez longuement sur le sujet des derniers Chapitres du nouveau Volume de M. Cantor, précisément parce que ce sujet est à peu près le seul, pour la période dont il s'agit, qui ait acquis une certaine célébrité dans l'histoire des Mathématiques. Le reste du Volume (440 pages) paraîtra entièrement neuf à la très grande majorité des lecteurs, c'est-à-dire à tous ceux qui n'ont pas examiné par eux-mêmes les Traités originaux, ou qui ne se tiennent pas au courant des publications spéciales sur la matière.

Dans l'impossibilité, dès lors, de signaler ici tout ce qui mériterait de l'être, je me contenterai d'appeler l'attention sur une idée que M. Cantor a suivie avec patience et qui donne à son Livre une unité inattendue.

---

applications de la Science, a pour titre : *La nova scientia di Nicolo Tartaglia con una gionta al terzo libro* et comprend :

1° Les trois livres de la *Nova scientia* de 1537 (le titre annonce deux autres livres que Nicolo n'écrivit jamais, parce que la matière en passa dans ses *Quesiti*). C'est un essai de Balistique, pour lequel Tartaglia admet comme principe qu'au commencement de sa course un projectile suit une ligne droite (mouvement violent), à la fin une droite verticale (mouvement naturel), et que ces deux parties de la trajectoire sont reliées par un arc de cercle. Cette réimpression est datée de 1558. Puis viennent, comme addition au troisième Livre :

2° Les huit premiers Livres des *Quesiti* de 1546; le neuvième, c'est-à-dire précisément celui qui concerne l'équation cubique, se trouve exclu.

3° La *Travagliata invenzione* de 1551, en trois Livres et sous un autre titre : *Regola generale di solevare ogni fondata nave e navilii con ragione*.

4° Les *Ragionamenti* de 1551, en deux Livres, dont le premier est un commentaire sur Archimède *De insidentibus aquæ*, I.

Le point curieux de cette réimpression est que, tandis que la première édition du dernier Ouvrage le présente sous forme de dialogue entre Tartaglia et l'anglais Richard Wentworth, Trojano a substitué son propre nom à celui de l'étranger. Il n'attachait donc aucune importance historique à cette forme. C'est assez dire que les dialogues des *Quesiti* ne peuvent être considérés que comme purement fictifs et que leurs dates ne peuvent être invoquées en faveur de Tartaglia.

Cette idée est celle de l'opposition entre la tradition de Léonard de Pise et celle de Jordanus Nemorarius. Le premier, étranger aux Universités, un marchand entre mille, n'a eu sur l'enseignement qu'une influence très restreinte. Ses manuscrits sont restés confinés en Italie, et ce n'est que peu à peu que les innovations utiles qu'ils renfermaient se sont propagées dans les écoles.

Jordanus de Saxe, premier général des Dominicains après leur fondateur, chef d'un ordre qui dès l'origine se consacre à l'enseignement, avait composé des écrits mathématiques d'une valeur incontestable, qui furent adoptés dans les écoles et longtemps imités ou reproduits, même avec leurs défauts.

Il n'y eut pas, en réalité, rivalité entre deux traditions, mais lente pénétration de l'une, classique et universitaire, par l'autre, indépendante et laïque. M. Cantor relève avec soin les différences caractéristiques que présentent ces deux traditions dès l'origine. Ainsi, par exemple, Jordanus considère la duplication et la dimidiation comme des opérations de calcul particulières, que ne reconnaît pas Léonard. Celui-ci enseigne la preuve par 9, que l'autre ignore. Pour la seconde puissance, Léonard dit *census*, Jordanus dit *quadratus*. Celui-ci enseigne l'extraction de la racine cubique au même titre que celle de la racine carrée, en s'arrêtant d'ailleurs aux unités; Léonard, au contraire, donne des procédés d'approximation, et il se présente comme l'inventeur de la méthode d'extraction qu'il expose pour la racine cubique, comme si, d'ailleurs, on ne lui en avait jamais enseigné aucune.

Il n'est pas aisé de reconnaître toutes les sources auxquelles les deux grands mathématiciens du XIIIe siècle avaient puisé les éléments de leur science, mais, en particulier, pour les points qui viennent d'être indiqués, M. Cantor a fait une remarque très curieuse. Toutes les différences signalées entre Jordanus et Léonard se retrouvent entre deux auteurs arabes, Alnasavi et Alkarchi (ce dernier, par exemple, à la différence de l'autre, enseignant à pousser plus loin que l'unité l'extraction d'une racine carrée, mais non à extraire une racine cubique, en sorte que Léonard a dû effectivement inventer un procédé pour cette opération).

Ces deux auteurs arabes, à peu près contemporains et tous deux en relations avec les souverains de Bagdad, appartenaient à deux écoles qui, séparées par des querelles religieuses et politiques, ne

voulaient rien savoir l'une de l'autre; l'une de ces écoles, celle d'Alnasavi, représentait, d'ailleurs, de préférence en Mathématiques la tradition hindoue, celle d'Alkarchi la tradition grecque. Mais leurs divergences réelles ont un caractère d'opposition systématique qui ne peut s'expliquer par des motifs purement scientifiques ou pédagogiques. Il est certainement singulier que cette rivalité passagère, par suite évidemment d'un simple hasard, ait eu son contre-coup dans l'occident latin et y ait amené des divergences de tradition qui ne s'évanouirent qu'après trois siècles et plus.

II. J'ajouterai, aux remarques qui précèdent, diverses observations de détail qui se sont présentées à mon esprit pendant la lecture du nouveau Volume des *Vorlesungen*. Je le fais d'ailleurs bien moins dans le but d'adresser des critiques à M. Cantor que dans celui de mieux appeler l'attention sur la très grande richesse documentaire de son Ouvrage.

Page 10, *ligne* 8 *et suivantes :* « Les nombres premiers, que Léonard (de Pise) appelle *numeros sine regulis,* se seraient, d'après lui, nommés *coris canon* chez les Grecs, *hasam* chez les Arabes. Cette double remarque linguistique n'est pas tout à fait exacte. »

Il me paraît que, s'il y a eu inexactitude de la part de Léonard, elle se trouve surtout dans la traduction latine qu'il a donnée des termes grecs. A la vérité, comme le constate M. Cantor, on ne retrouve ces derniers termes dans aucun Ouvrage grec, et chez les auteurs arabes, le mot *hasam* est employé avec des significations techniques différentes ([1]). Mais, quoique Léonard ait incontestablement étudié à fond divers Traités mathématiques, il doit représenter beaucoup plutôt, pour nous, la tradition de l'enseignement oral que celle de la Science livresque. Or, si l'on réfléchit

([1]) *Hasam*, proprement *qui ne s'énonce pas,* a été traduit au moyen âge par *surdus* (sourd), et a ordinairement la signification technique d'*irrationnel*. Alkarchi et Behaeddin ont également employé ce terme pour désigner un nombre non carré et non divisible par l'un des neuf premiers nombres. On voit que cette signification se rapproche de celle du nombre premier.

aux divergences, parfois assez singulières, que l'on peut constater de nos jours entre la terminologie mathématique du professeur et celle de l'auteur, on ne trouvera rien d'extraordinaire à ce que Léonard nous ait conservé quelques expressions réellement employées par ses maîtres arabes ou grecs, mais n'ayant jamais été consacrées ailleurs que dans ses propres écrits.

Que Fibonacci ait parlé le grec au moins autant que l'arabe, c'est d'ailleurs ce dont on ne peut douter à ses transcriptions; ce sont des mots qu'il a entendu prononcer, que peut-être il n'a jamais lus. Mais dans le cas dont il s'agit, a-t-il vraiment, comme je l'ai dit, donné une traduction inexacte?

Canon, au propre en grec (κανών), signifie *règle*. Il est donc vrai que *sine regulis* est bien une traduction et que d'ailleurs il faut lire *coris canonon* (χωρὶς κανόνων).

Mais comment cette expression a-t-elle été employée pour désigner les nombres premiers? comment peut-on dire qu'ils soient *sans règles?*

Le mot κανών a, dans le langage mathématique grec, un sens technique tout spécial. C'est, en effet, ce mot que Ptolémée et tous les auteurs emploient pour désigner les *Tables* servant aux calculs astronomiques. Or les marchands que pratiquait Léonard de Pise se servaient évidemment aussi, pour leurs calculs, de *Tables* comme on en rencontre, au reste, plusieurs dans les Ouvrages du moyen âge cités par M. Cantor. Ces Tables ou barèmes, particulièrement indispensables pour la conversion des monnaies, par exemple, devaient nécessairement être appelées κανόνες par les Grecs.

L'expression χωρὶς κανόνων, d'après le sens propre de χωρίς, signifie donc « hors des Tables ».

Or, si une Table en particulier donne des nombres a d'après des arguments b, l'expression « hors de Table » ne peut évidemment s'appliquer aux nombres b; elle se dira des nombres a qui ne figurent pas dans la Table, et pour lesquels, dès lors, si l'on veut retrouver l'argument b correspondant, il faut faire une interpolation ou un calcul direct.

Grâce à ces remarques, il me semble que la désignation χωρὶς κανόνων pour les nombres premiers devient très claire. Elle se rapporte à cette propriété évidente de ces nombres, de ne pouvoir être fournis par un barème. Elle est d'ailleurs historiquement in-

téressante, en ce qu'elle témoigne de l'importance pratique des Tables dans les opérations de calcul au moyen âge.

Page 43, *ligne* 22 : En rapportant la solution numérique donnée dans le *Flos* de Léonard de Pise de l'équation du troisième degré

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

M. Cantor remarque que l'emploi des fractions sexagésimales (allant jusqu'à la sixte) paraît poussé plus loin que partout ailleurs. Le fait n'est pas douteux pour les calculs ordinaires, mais, en Astronomie, l'usage de la sixte comme limite extrême de l'approximation était classique depuis Ptolémée. Comme de fait les astrologues de Frédéric II étaient les seuls juges compétents des travaux de Léonard, il est naturel qu'il ait voulu pousser son calcul jusqu'à la fraction consacrée.

Quant à la méthode que Léonard a pu employer pour obtenir une approximation aussi exacte, il ne me semble pas qu'elle ait été particulièrement élégante, sans quoi il l'aurait probablement exposée.

L'homme qui, n'ayant appris aucun procédé pour extraire une racine cubique, avait su s'en forger un, ne devait pas se trouver embarrassé pour résoudre numériquement une équation du troisième degré ; la longueur des calculs, avec les fractions sexagésimales, a pu d'ailleurs être singulièrement réduite, quel que fût son procédé, grâce à l'emploi de Tables de multiplication pour ces fractions, Tables qu'on devait nécessairement posséder pour les calculs astronomiques.

Page 83 *et suivantes :* M. Cantor parle avec quelques détails des *Deux plus anciens Traités français d'Algorisme et de Géométrie,* publiés par M. Ch. Henry dans le *Bulletin Boncompagni*, t. XV.

Il est très regrettable que ces fragments du XIIIe siècle, car on ne peut guère leur donner un autre nom, ne nous aient été conservés que par un manuscrit non seulement très incorrect, mais dans un désordre complet et avec des lacunes énormes ; il est regrettable que l'éditeur ne se soit pas donné la peine de remédier, dans la mesure du possible, aux vices de l'original et qu'il ne nous

ait donné qu'un texte à peu près inutilisable. Je dois me borner à indiquer quelques corrections sur les citations faites par M. Cantor.

D'après le texte édité, la première partie de la Géométrie consiste à trouver la « mesure des planètes »; il faut lire *planeces*. Ce mot (pour aire plane) s'écrirait aujourd'hui *planesse;* il est régulièrement formé (de *planitia*) et l'on peut regretter qu'il ne soit pas resté en usage.

La hauteur d'un triangle est appelée *linel* ou *lunax :* lisez *livel* ou *liviax* (c'est-à-dire *liveau*) ([1]). C'est le mot que nous employons corrompu sous la forme *niveau*, et qui désigne originairement le fil-à-plomb.

L'orneure du cercle, pour désigner la superficie de la sphère, est une leçon douteuse, qui correspond probablement à notre mot *ornière.*

M. Cantor aurait pu trouver, dans le même texte, la plus ancienne mention écrite du calcul avec les jetons-unités tel qu'il fut usité au moyen âge ([2]).

« Or commencerons de l'art d'arismetike : si commence en tel forme : car tous li nombre, de I dus qu'à X, sont appelé *de-gipte*, parche ke li uns *se gete* sor l'autre. »

Il y a là une explication tout à fait fantaisiste, bien entendu, du terme *digit* ([3]) appliqué aux neuf premiers nombres. Mais cette explication suffit à prouver combien l'usage des jetons de calcul était répandu.

Jeter sur signifie d'ailleurs *multiplier par :* nous trouvons, en effet, plus loin, par exemple : « toutes disaines getées par deseur cent valent mil ».

Le calcul se faisait sur des lignes parallèles affectées aux unités de différents ordres; un jeton sur la ligne valait une unité de cet ordre; entre deux lignes, cinq unités de l'ordre inférieur. En grou-

([1]) De même le texte dont il s'agit porte indifféremment *tonel* ou *toniax* pour notre mot tonneau.

([2]) Les Traités qui enseignent ce calcul n'apparaissent que vers la deuxième moitié du XVe siècle, avec l'imprimerie.

([3]) *Digitus*, doigt, par opposition à *articulus*, nombre entier de dizaines. Ces termes étaient devenus classiques depuis la *Geometria* du Ps.-Boèce.

pant les jetons dont on possédait un nombre suffisant, on pouvait figurer sur les lignes plusieurs nombres distincts.

Ce procédé (sauf quelques variantes de détail) a été connu des Grecs comme des Romains, comme il l'avait été avant eux des Égyptiens et probablement des Babyloniens; c'est de là que nous est venu le terme de *calcul* (*calculus*, caillou, jeton; en grec ψῆφος, avec la même signification). Mais s'il est attesté par des monuments figurés de la plus haute antiquité, on ne trouve nulle part de description ancienne des opérations.

Les premiers Traités qui parlent de l'*abacus*, au xe siècle de notre ère, enseignent un système tout différent, puisque, au lieu de jetons-unités, on emploie des jetons marqués de 1 à 9; il faut attendre l'apparition de l'imprimerie pour trouver des livres enseignant le calcul sur les lignes avec des jetons-unités.

Il n'y a pas à supposer cependant, malgré l'apparence, que le dernier calcul ait été, à un certain moment, supplanté par l'emploi de l'abacus de Gerbert, puis qu'il ait repris le dessus et qu'il se soit même développé précisément au moment où triomphaient définitivement les chiffres modernes.

La vérité est que le calcul avec les jetons a toujours été l'apanage des illettrés; il s'est en conséquence transmis par simple tradition orale, jusqu'au moment où l'imprimerie a permis de faire des livres assez bon marché pour faciliter l'enseignement. L'invention de l'imprimerie a d'ailleurs amené, avant les derniers progrès de l'instruction, l'existence d'une classe nombreuse de gens sachant lire, mais ne sachant pas écrire ou écrivant mal. Ceux-là apprenaient à calculer avec des jetons, ce qui de fait est plus aisé que d'apprendre seulement à tenir une plume. L'usage en était encore très répandu en France au xviiie siècle.

L'abacus de Gerbert et du Ps.-Boèce n'a jamais fait en réalité concurrence à l'abaque populaire; c'était une invention savante pour l'époque (elle exige que l'on connaisse les Tables d'addition et de multiplication), calquée sur les procédés du calcul écrit (des Arabes), répondant d'ailleurs aux besoins d'une époque où les lettrés eux-mêmes n'écrivaient guère (1), où il leur était, par

(1) Le parchemin était trop coûteux; c'était d'ailleurs alors une spécialité que l'écrire.

suite, plus commode d'avoir un procédé de calcul manuel relativement perfectionné que de recourir à l'encre. La lutte des *abacistes* et des *algorithmistes* (calculateurs employant les chiffres modernes), aux XIe et XIIe siècles, n'a donc été que la lutte, pour la classe lettrée, entre l'écriture et le procédé manuel qui la remplaçait pour le calcul; la couche inférieure des illettrés n'a été atteinte que trois siècles après.

P. 119. — M. Cantor s'étend longuement, à très juste titre, sur le *Tractatus de latitudinibus formarum* de Nicole Oresme, où l'on trouve le principe de la représentation d'une quantité variable (*forma*) au moyen d'une ordonnée (*latitudo*), rapportée à une abscisse (*longitudo*), figurant le temps, par exemple. Mais la remarque d'Oresme que, si la *figura* comporte un arc de cercle, il doit être plus petit qu'une demi-circonférence, me paraît devoir se justifier par l'impossibilité de considérer, dans de telles représentations, deux ordonnées pour une même abscisse plutôt que par celle de considérer des abscisses négatives.

P. 182. — Peut-être le savant auteur des *Vorlesungen* a-t-il été trop indulgent pour les malheureuses tentatives de Nicolas Cusanus, sur la quadrature du cercle. Je n'y peux guère voir qu'un singulier exemple de *nescience* mathématique. Ainsi pour la quadrature que Cusanus appelle *per lunulas*, M. Cantor nous dit :

« Il décrit un cercle de rayon 7 avec le carré inscrit et le circonscrit. Le premier de ces carrés a une surface de 98, le second une de 196. Maintenant Cusanus choisit — il n'est pas aisé de voir pourquoi — un carré ayant 121 de surface, il forme $121 - 98 = 23$, dont il retranche le double 46 de 196; le reste 150 doit être la surface du cercle, avec cette remarque toutefois que fait Cusanus, que ce nombre est un peu trop petit : il aurait fallu, au lieu de 121, prendre un carré un peu moins fort, pour avoir un résultat absolument exact. »

Il ne me paraît pas très difficile de retrouver la suite des idées de Cusanus. S'il est parti du cercle de rayon 7, c'est évidemment qu'il connaissait l'approximation d'Archimède, $\pi = \frac{22}{7}$; il savait donc que la surface de son cercle était d'environ 154. Il voyait d'ailleurs qu'il aurait eu cette valeur exacte, s'il en avait connu

la différence au carré circonscrit, c'est-à-dire la surface des quatre *coins* laissés entre le carré et le cercle et qu'il semble avoir désignée sous le terme de *lunules*. Mais cette surface, il savait seulement qu'elle devait être supérieure à 196 — 154 = 42, tandis que la différence entre le cercle et le carré inscrit doit être inférieure à 154 — 98 = 56. Dans ces conditions, il cherche, entre les divers nombres qu'il a posés, une relation numérique qui le satisfasse et comme, sans doute après des tâtonnements au hasard, il remarque qu'en ajoutant à 98 la moitié de 42 on a 119, qui est voisin du carré parfait 121 (et probablement qu'en ajoutant à ce carré les $\frac{3}{4}$ de 42 on retrouve à peu près la surface du cercle), il s'imagine avoir trouvé la relation qui doit conduire à la quadrature. C'est sans doute un exemple historique de la façon dont il ne faut pas raisonner en Géométrie, mais il n'y a rien de plus.

P. 237. — Le manuscrit de Diophante vu à Venise par Regiomontanus vers 1464 est très certainement le *Marcianus* 308 qui a appartenu au Cardinal Bessarion, protecteur du savant allemand. Le Cardinal, alors en Grèce, venait-il d'envoyer ce manuscrit à Venise? En tous cas, Regiomontanus, malgré quelques velléités de le traduire, après en avoir reconnu l'importance, ne paraît point l'avoir sérieusement étudié.

P. 238. — A la liste des publications mathématiques de Lefèvre d'Etaples, aurait dû être ajoutée son *Epitome et introductio in libros arithmeticos Severini Boetii*, qu'il joignit à son édition des *Elementa arithmetica cum demonstrationibus* de Jordanus Nemorarius (1496, in-f°) et qu'il reproduisit en 1503, 1510, 1514, 1522, sans compter les réimpressions postérieures.

P. 345. — La première édition de la *Protomathesis* d'Oronce Fine paraît datée de 1530 et non de 1532. Au reste, toute la bibliographie mathématique du XVIe siècle serait à refaire pour la plupart des auteurs; l'habitude des éditeurs de cette époque, de mettre en vente la même composition sous des feuilles de titre différentes, occasionne de nombreuses confusions et entraîne fréquemment des incertitudes.

P. 355. — De l'édition de 1495 du *Tractatus Arithmeticae*

practicae de Sanchez Cirvelo, indiquée comme douteuse par M. Cantor, il y a deux exemplaires à Paris, l'un à la Mazarine, l'autre à Ste-Geneviève.

P. 386. — Une traduction française du Traité espagnol d'Arithmétique et de Géométrie de Juan Ortega a paru dès 1515 à Lyon, (Baland) sous son nom francisé : *Jean de Lortie*.

P. 384. — Si l'algorithme de Theodorich Tswivel (1507) est enseigné *per figurarum* (*more Alemannorum*) *deletionem*, on doit opposer à ce titre celui de l'*Enchiridion* de Huswirt (1501), (*Italorum more*) *sine figurarum deletione percommode tractum*. Il y a donc à cette date en Allemagne lutte de deux procédés de calcul, l'un dans lequel on doit effacer et remplacer par d'autres les chiffres déjà obtenus, ce qui est la méthode ancienne, qualifiée d'allemande, l'autre qui est notre procédé moderne, appelé italien.

P. 420. — Il n'y a pas à s'étonner que, dans son *Commentarius in* 11 *modos conficiendæ cubi duplicationis* de 1522, Werner ait attribué à *Phyloponus* la même solution qu'à Philon de Byzance, d'après Eutocius. Le commentaire de Jean Philoponus sur les analytiques postérieurs d'Aristote, commentaire où se trouve cette solution tout au long, était de fait imprimé depuis 1504 (Venise, in-f°). Elle y est d'ailleurs attribuée à Apollonius de Perge.

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

RECHERCHE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE DÉPOLIE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Au début d'une Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 15 février 1892, M. Appell donne d'élégantes formules pour déterminer le mouvement d'un point sur une surface dépolie, rapportée à trois axes coordonnés

rectangulaires. Je vais montrer que, pour le cas où l'on emploie des coordonnées curvilignes orthogonales, on a des formules analogues qui se déduisent immédiatement des équations de Lagrange et je les appliquerai à un problème, relativement très simple, dont la solution se ramène à des quadratures. Soient

$$q_1 = F_1(x, y, z), \qquad q_2 = F_2(x, y, z), \qquad q_3 = F_3(x, y, z)$$

les équations de trois familles de surfaces triplement orthogonales et

$$ds_1 = \sqrt{E_1}\, dq_1, \qquad ds_2 = \sqrt{E_2}\, dq_2, \qquad ds_3 = \sqrt{E_3}\, dq_3$$

les arêtes du parallélépipède élémentaire compris entre trois surfaces q_1, q_2, q_3 et trois surfaces infiniment voisines. Considérons un point M, de masse égale à l'unité, assujetti à rester sur la surface S définie par l'équation

$$(1) \qquad \varphi(q_1, q_2, q_3) = 0,$$

et sollicité par une force P, dont les composantes suivant les directions ds_1, ds_2, ds_3 sont P_1, P_2, P_3 : il s'agit de déterminer son mouvement en supposant que S donne naissance à une force de frottement fN, N étant la pression normale qu'elle supporte. M se mouvra comme un point libre sollicité par la force P, par une force N représentant la réaction normale de S et par une force fN dirigée en sens contraire de la vitesse V. Les angles de la normale à S avec ds_1, ds_2, ds_3 ont pour cosinus

$$\frac{1}{\rho\sqrt{E_1}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \quad \frac{1}{\rho\sqrt{E_2}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \quad \frac{1}{\rho\sqrt{E_3}}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)^2 + \ldots};$$

nous supposerons le signe de ρ choisi de manière que la direction définie par ces cosinus soit celle de la réaction N elle-même, dont les projections sur ds_1, ds_2, ds_3 s'expriment immédiatement : quant à celles de la force de frottement, elles sont

$$-f\mathrm{N}\frac{q_1'\sqrt{E_1}}{V}, \quad -f\mathrm{N}\frac{q_2'\sqrt{E_2}}{V}, \quad -f\mathrm{N}\frac{q_3'\sqrt{E_3}}{V}.$$

Cela posé, les lois du mouvement et la valeur de N seront déterminées par l'équation (1) et par les trois équations de La-

grange :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&E_1 \frac{dq'_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial q_1} q'^2_1 + \frac{\partial E_1}{\partial q_2} q'_1 q'_2 + \frac{\partial E_1}{\partial q_3} q'_1 q'_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial E_2}{\partial q_1} q'^2_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial E_3}{\partial q_1} q'^2_3 \\
&\qquad = \sqrt{E_1}\left(P_1 + \frac{N}{2\sqrt{E_1}}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - fN\frac{q'_1\sqrt{E_1}}{V}\right), \\
&E_2 \frac{dq'_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_2}{\partial q_2} q'^2_2 + \ldots = \sqrt{E_2}(P_2 + \ldots), \\
&E_3 \frac{dq'_3}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_3}{\partial q_3} q'^2_3 + \ldots = \sqrt{E_3}(P_3 + \ldots).
\end{aligned}\right.$$

Des équations (2), nous déduirons une première relation indépendante de N en éliminant entre elles $\frac{N}{2}$ et $\frac{fN}{V}$ qui y entrent linéairement ; le résultant peut se mettre sous forme de déterminant :

$$(3)\quad \begin{vmatrix}
E_1 \frac{dq'_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial q_1} q'^2_1 + \ldots - \frac{1}{2}\frac{\partial E_3}{\partial q_1} q'^2_3 - P_1\sqrt{E_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & E_1 q'_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
E_3 \frac{dq'_3}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_3}{\partial q_3} q'^2_3 + \ldots - \frac{1}{2}\frac{\partial E_2}{\partial q_3} q'^2_2 - P_3\sqrt{E_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} & E_3 q'_3
\end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on ne regarde plus t comme la variable indépendante, on devra remplacer les $\frac{dq'_i}{dt}$ par $\frac{dt\,d^2q_i - dq_i\,d^2t}{dt^3}$. Aux éléments de la première colonne ajoutons ceux de la troisième multipliés par $\frac{d^2t}{dt^2}$: au lieu des termes $E_i\frac{dq'_i}{dt}$, nous aurons $\frac{E_i}{dt^2}d^2q_i$, ou $V^2E_i\frac{d^2q_i}{ds^2}$, en prenant s pour variable indépendante. Si nous remplaçons encore les q'_i par $V\frac{dq_i}{ds}$, nous reconnaîtrons que l'équation (3) exprime l'égalité entre la projection de P sur la normale géodésique à la trajectoire et le produit de V^2 par la courbure géodésique. Cette équation ne contient d'ailleurs aucune trace de la force de frottement.

Pour déduire des équations (2) une seconde combinaison indépendante de N, ajoutons-les, membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par

$$\frac{f}{2E_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{q'_1}{V}, \quad \frac{f}{2E_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{q'_2}{V}, \quad \frac{f}{2E_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3} + \frac{q'_3}{V};$$

dans l'équation résultante, le coefficient de N se réduit à

$$\frac{1-f^2}{V\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q'_2+\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}q'_3\right)$$

et s'annule en vertu de l'équation (1); la somme des termes indépendants de f, dans le premier membre, se réduit, d'après un calcul bien connu, à

$$\frac{1}{V}\frac{d\frac{1}{2}V^2}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

il n'y a pas lieu d'indiquer d'autres réductions dans le cas général, mais il sera facile de s'assurer que l'équation obtenue exprime l'égalité entre $\frac{dV}{dt}$ et $P'-fN$, P' désignant la projection de P sur la tangente à la trajectoire. L'équation (1) et les deux équations indépendantes de N que nous avons formées permettront de calculer q_1, q_2, q_3 en fonction de t. L'une des équations (2) fera connaître ensuite la valeur de N et l'on s'assurera qu'elle reste positive : si elle était négative, il faudrait reprendre les calculs en changeant le signe de ρ.

Appliquons ces résultats généraux à la recherche du mouvement d'un point pesant sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical et dont la surface est dépolie. Pour les coordonnées q_1, q_2, q_3 d'un point quelconque M de l'espace, nous prendrons la longueur u de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe OZ du cylindre, l'angle ψ du plan ZOM avec un plan fixe ZOX, enfin l'ordonnée z par rapport à un plan horizontal OXY, le sens des z positifs étant celui de la pesanteur. Nous aurons

$$ds_1=du,\qquad ds_2=u\,d\psi,\qquad ds_3=dz;$$

l'équation de la surface S se réduit à la forme

$$(4)\qquad \varphi=u-a=0$$

P_1, P_2 sont nuls, P_3 est égal à g, ρ à ± 1. Mais le mobile tendra évidemment à sortir du cylindre; la réaction N devra être dirigée à l'intérieur et nous prendrons $\rho=-1$. Nous sommes en mesure d'écrire les équations (2), qui prennent une forme très simple : mais je les simplifie encore en tenant compte de l'équation (4) et j'ai le système

$$(5)\qquad -a\psi'^2=-N,\qquad a\frac{d\psi'}{dt}=-fN\frac{a\psi'}{V},\qquad \frac{dz'}{dt}=g-fN\frac{z'}{V}.$$

L'élimination de fN entre les deux dernières équations nous donne l'équation correspondante à l'équation (3) :

$$(6)\qquad \psi'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{d\psi'}{dt} = g\psi'.$$

Ajoutons maintenant membre à membre les équations (5) après les avoir multipliées respectivement par $-f$, $\frac{a\psi'}{V}$, $\frac{z'}{V}$: nous aurons

$$af\psi'^2 + \frac{1}{V}\left(a^2\psi'\frac{d\psi'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right) = \frac{gz'}{V};$$

conformément à une remarque que j'ai faite dans le cas général, les termes indépendants de f dans le premier membre ont pour somme $\frac{dV}{dt}$ et l'équation devient

$$(7)\qquad \frac{dV}{dt} + af\psi'^2 = \frac{gz'}{V}.$$

Il s'agit de déterminer z et ψ à l'aide des équations (6) et (7). A cet effet, j'envisage l'angle ω que la vitesse en un point quelconque fait avec la tangente à la section droite du cylindre : on a

$$a\psi' = V\cos\omega, \qquad z' = V\sin\omega,$$

et les équations (6) et (7) deviennent

$$(8)\qquad V\frac{d\omega}{dt} = g\cos\omega,$$

$$(9)\qquad \frac{dV}{dt} + f\frac{V^2\cos^2\omega}{a} = g\sin\omega.$$

Différentions l'équation (8) par rapport au temps, puis, dans le résultat, remplaçons V et $\frac{dV}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (8), (9) et posons

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega', \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\omega'^2}{d\omega};$$

nous aurons, entre ω et ω'^2, l'équation

$$\frac{d\omega'^2}{d\omega} + 4\omega'^2\operatorname{tang}\omega = \frac{2fg}{a}\cos^3\omega,$$

dont l'intégrale est de la forme

$$\omega'^2 = \cos^4\omega \left[A + \frac{2fg}{a} \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)\right].$$

On en déduit immédiatement la valeur de dt en fonction de ω et de $d\omega$; mais, pour faciliter la discussion du problème, je poserai

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = e^{\lambda},$$

d'où

$$\sin\omega = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}, \qquad \cos\omega = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}, \qquad d\omega = \frac{2\,d\lambda}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}.$$

Nous aurons alors

$$(10) \qquad dt = \pm \frac{1}{2} \frac{(e^{\lambda} + e^{-\lambda})\,d\lambda}{\sqrt{A + \frac{2fg}{a}\lambda}};$$

en supposant ω d'abord compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, l'équation (8) montre, et il est évident, *a priori*, que l'angle ω doit d'abord aller en croissant; il en sera de même pour λ, et l'équation (10) montre que, t croissant indéfiniment, λ croît jusqu'à l'infini et ω jusqu'à $\frac{\pi}{2}$: la trajectoire coupe les génératrices suivant des angles de plus en plus aigus. Les équations (8) et (10) donnent

$$V = \frac{g\cos\omega\,dt}{d\omega} = \frac{1}{2} g \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{\sqrt{A + \frac{2fg}{a}\lambda}};$$

la vitesse finit par augmenter indéfiniment. Nous avons enfin

$$d\psi = \frac{V\cos\omega\,dt}{a} = \frac{g}{2a} \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{A + \frac{2fg}{a}\lambda} d\lambda,$$

$$dz = V\sin\omega\,dt = \frac{g}{4} \frac{e^{2\lambda} - e^{-2\lambda}}{A + \frac{2fg}{a}\lambda} d\lambda:$$

ψ et z augmentent indéfiniment, mais z devient infiniment plus grand que ψ.

Quant à la réaction du cylindre, elle est donnée par une formule

bien connue et aussi par la première des équations (5) :

$$N = a\psi'^2 = \frac{V^2 \cos^2\omega}{a} = \frac{g^2}{\sqrt{a - 2fgt}};$$

elle diminue de plus en plus avec le temps.

SUR DES LETTRES INÉDITES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE DE L'INSTITUT;

Par M. Paul TANNERY.

M. Ludovic Lalanne vient d'avoir l'extrême obligeance de m'informer de la récente rentrée, à la Bibliothèque de l'Institut, de six pièces de la collection des lettres de Descartes, pillée par Libri. Ces six pièces comprennent trois lettres inédites.

La plus ancienne n'est pas datée, mais en la rapprochant de celle du 20 octobre 1642 (*Clerselier*, II, 107), on reconnaît qu'elle a été écrite le 13 octobre précédent. Cette pièce n'a pas été comprise dans le classement dom Poirier-Arbogast, probablement parce que la date en semblait douteuse. Elle porte au bas, à gauche, la cote 2, et doit donc représenter le n° 82 (= 84 − 2) de Lahire. Si, pour ce numéro, les annotations de l'exemplaire des *Lettres de M. Descartes* de l'Institut (III, 15) renvoient à la lettre latine de Descartes au P. Bourdin (1), il se trouve que, précisément, la lettre française à Mersenne est suivie d'une copie (autographe de Descartes) de la lettre latine au jésuite, auteur des *Septièmes objections* contre les *Méditations*. L'ensemble de ces circonstances explique comment, lorsque j'ai cherché à déterminer les lettres inédites encore perdues de la collection, je n'ai pas soupçonné que cette pièce 82 en contenait une.

Les deux autres lettres figurent, au contraire, dans la liste que j'ai donnée :

L'une, 43e d'Arbogast, datée du 4 janvier 1643, est cotée 35 C. C'était donc la 49e de Lahire.

(1) Cette lettre doit être datée du 7 septembre 1642 et non pas 1640, comme a fait Cousin.

La dernière, 64e d'Arbogast, datée du 4 avril 1648, est cotée 10, et représente la 74e de Lahire.

J'extrais ci-après de la première et de la troisième les passages intéressants pour l'histoire des Mathématiques (1). La dernière est particulièrement curieuse, comme jugement de Descartes sur sa Géométrie. J'ajoute que la seconde lettre mérite d'appeler l'attention des physiciens comme contenant une discussion des précautions à prendre pour déterminer la densité de l'air en le raréfiant par la chaleur (2), tandis que la troisième lettre nous montre Descartes observant assidûment les variations du baromètre (3).

On trouverait peut-être difficilement, dans son immense correspondance, des passages plus décisifs pour attester qu'il possédait toutes les qualités de l'expérimentateur. La limitation de ses ressources pécuniaires et l'extension démesurée de ses recherches doivent sans doute être considérées comme les véritables causes qui ne lui permirent pas d'arriver en Physique à des résultats saillants et définitifs, comme Pascal, par exemple, devait le faire.

Lettre du 13 octobre 1642.

Extrait.

... Le secret pour savoir le point de conjonction de la Lune ne mérite pas qu'on y pense, car il est sans apparence.

Ceux qui reprennent les figures de ma Dioptrique et Géométrie sont aussi ridicules et ne font paroître qu'une ignorance ou malignité puérile. Car, pour la figure de l'œil, elle vaut beaucoup mieux comme elle est, que si elle représentoit un œil d'homme tel qu'il se peut voir au naturel, à cause qu'elle en distingue mieux les parties. Et en la figure de la page 19, si l'angle est plus grand qu'il ne doit, c'est aussi afin qu'on le voie mieux. Et en la page 17 j'ai parlé de la proportion double à cause qu'étant plus simple que les autres, elle est plus facile à concevoir, au lieu que la figure en exprime une autre qui approche plus de ce qui se

(1) Les trois lettres seront publiées *in extenso* dans l'*Archiv für Geschichte der Philosophie* (Berlin, Reimer) de cette année 1892.

(2) La machine pneumatique n'était pas encore connue.

(3) La célèbre expérience du Puy de Dôme ne fut faite que l'année suivante.

voit par expérience, afin de montrer que ce même discours se doit entendre de toute sorte de proportions.

Et de vouloir p. 331 (1) qu'on marquât tous les points où la ligne droite coupe l'hyperbole, c'est vouloir une chose impertinente, à cause que ces intersections ne servent de rien au sujet et, l'hyperbole étant une figure sans fin, on ne la peut jamais tracer tout entière. Le discours de la page 342 (2) ne se rapporte pas seulement à la figure qui y est, mais aussi aux deux suivantes, dans lesquelles est la ligne AB que vous cherchiez, et il n'y a rien en tout cela qui n'ait été fait avec dessein, ni que je voulusse changer en faisant r'imprimer le livre . . .

Lettre du 4 avril 1648.

Extrait.

. . . Au reste, je n'ai pu lire sans quelque indignation ce que vous me mandez avoir écrit au Sr Schooten (3) touchant ma *Géométrie*, et vous m'en excuserez, s'il vous plaît. J'admire votre crédulité : vous avez vu plusieurs fois très clairement, par expérience, que ce que le Roberval disoit contre mes écrits étoit faux et impertinent, et toutefois vous supposez que j'y dois changer quelque chose en ma solution du lieu *ad 3 et 4 lineas* (4), comme si les visions d'un tel homme devoient être considérables. Ma *Géométrie* est comme elle doit être pour empêcher que le Rob. et ses sem-

(1) *Géométrie de Descartes*, éd. Hermann (Paris, 1886), p. 26. Sur cette figure, la droite TGH devrait être coupée en G par la branche d'hyperbole dessinée.

(2) Éd. Hermann, p. 33. Dans l'édition originale, les droites AB, BC ne sont pas tracées.

(3) Schooten, professeur de Mathématiques à Leyde, préparait de la *Geometrie* de Descartes, la traduction latine avec commentaires dont la première édition parut en 1649.

(4) Évidemment Mersenne avait écrit à Schooten sous l'impression de la solution donnée de ce problème par Blaise Pascal, solution qu'il signalait en même temps à Constantin Huygens (*Correspondance Huygens*, n° 46). Descartes devait donc avoir été informé de cette solution, sinon directement par Mersenne, au moins par Schooten. Mais, à son point de vue, il n'y attache pas d'importance, sachant très bien que Roberval avait dès longtemps reconnu le point capital que lui même (volontairement ou non) n'avait pas mis en évidence dans sa *Géométrie*, à savoir que le lieu est formé par l'ensemble de deux coniques et non par une seule. Il ne s'en prend donc qu'à Roberval.

blables n'en puissent médire sans que cela tourne à leur confusion; car ils ne sont pas capables de l'entendre et je l'ai composée ainsi tout à dessein en y omettant ce qui étoit le plus facile et n'y mettant que les choses qui en valoient la peine. Mais je vous avoue que, sans la considération de ces esprits malins, je l'aurois écrite tout autrement que je n'ai fait et l'aurois rendue beaucoup plus claire, ce que je ferai peut-être encore quelque jour, si je vois que ces monstres soient assez vaincus ou abaissés. Ce qui est cause que je n'ai point voulu voir la version de Schooten, encore qu'il l'ait désiré, car si j'eusse commencé à la corriger, je n'eusse pu m'empêcher de la rendre plus claire qu'elle n'est, ce que je ne désire point. Je m'assure que la version sera bien obscure et qu'il y aura peut-être des équivoques qui donneront lieu à des prétextes de cavillation à ceux qui en cherchent, mais on ne pourra me les attribuer, à cause que mon latin n'est point du tout semblable au sien . . .

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

1re Part

HALPHEN. — TRAITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS. Troisième Partie : *Fragments*. 1 vol. in-8° ; XVI-272 p. Paris, Gauthier-Villars et fils ; 1891.

L'Éditeur a mis, en tête de ce dernier Volume du beau Livre d'Halphen, ces quelques lignes qu'a rédigées M. Hermite :

« Madame Halphen a confié les manuscrits laissés par son mari aux Membres de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences, en exprimant le désir que tout ce qui semblerait pouvoir être publié soit communiqué au monde mathématique.

» Nous remplissons ses intentions, et nous faisons paraître, avec le concours dévoué de M. Stieltjes, ces quelques pages, où l'illustre géomètre a laissé ses dernières pensées.

» Elles seront accueillies par les amis d'Halphen et les admirateurs de son talent avec les sentiments de tristesse et de regrets que nous laisse à jamais sa mort prématurée. »

On ne saurait mieux dire, et l'émotion profonde que trahissent ces dernières paroles sera assurément ressentie par tous ceux qui ouvriront ce Volume inachevé. Il était, en quelque sorte, attendu avec un désir particulier : « c'est là, dit M. Picard (1), que se serait déployé dans tout son éclat le talent d'Halphen, rompu aux problèmes les plus abstraits de l'Algèbre ». Les fragments que l'on a pu publier, grâce à M. Stieltjes, sont très intéressants : outre leur intérêt propre, ils mettent en évidence la manière de travailler d'Halphen : le goût qu'il avait pour les problèmes particuliers, le talent qu'il avait pour y voir et y montrer le *général*, la rare pénétration qui lui permettait d'aller jusqu'au bout.

Deux Chapitres, placés en tête, auraient sans doute figuré sans grandes modifications dans la rédaction définitive. Le premier se rapporte à la division d'une période par cinq, pour la fonction

(1) *Notice sur G. H. Halphen.*

$p(u, \omega, \omega')$: en posant

$$a = p\left(\frac{2\omega}{5}\right), \qquad b = p\left(\frac{4\omega}{5}\right),$$

et en partant du théorème d'addition, Halphen parvient, au moyen d'un calcul très simple, aux équations du sixième degré qui ont pour racines respectivement

$$\lambda = a + b, \qquad y = ab, \qquad t = (a - b)^2.$$

Ces équations sont étudiées au point de vue des formes symboliques qu'on peut leur faire revêtir, du discriminant, des relations entre les racines. Ces relations manifestent l'existence d'une résolvante du cinquième degré. Les deux premiers coefficients de cette résolvante s'obtiennent sans difficulté; quant aux autres, on montre qu'il suffit de les calculer dans un cas particulier, par exemple dans le cas où g_3 est nul, et où, comme on sait, l'équation du sixième degré se résoud entièrement. La recherche du développement des racines de ces diverses équations en fonction de q amène, en général, à considérer le produit infini qui représente

$$\sigma\left(\frac{2\tilde{\omega}}{n}\right) e^{-\frac{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}}{n}},$$

et les éléments introduits par M. Kiepert. L'étude des racines de la résolvante du cinquième degré conduit à la résolution de l'équation générale du cinquième degré.

Le Chapitre suivant contient une étude détaillée de la division par sept de l'une des périodes : le cas où g_3 est nul, et quelques autres cas particuliers sont examinés à fond. Le lecteur se trouve ainsi en possession de deux cas importants, où le nombre premier par lequel on divise les périodes est de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$, et où apparaissent d'une façon très nette les propositions générales relatives à la division des périodes par un nombre premier n. Ces propositions générales, Halphen les développe ensuite, il montre comment le problème dépend d'une équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré, dont l'inconnue est, par exemple, la somme des $\frac{n-1}{2}$ valeurs $a, b, c, \ldots$, que prend la fonction pu, quand on prend pour l'argument u les multiples de la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période déterminée. Ces valeurs $a, b, c, \ldots$ se séparent en groupes qui correspondent

aux diverses racines de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré ; les éléments d'un même groupe s'expriment par radicaux au moyen de la racine correspondante ; chacun de ces groupes, ou chacune de ces racines, est caractérisé par un indice μ qui caractérise en même temps la fraction de période $\frac{2(\omega'+\mu\omega)}{n}$ dont les multiples entiers fournissent les arguments de p qui donnent les valeurs a, b, c, ... ; l'absence d'indice correspond au cas où l'on prend pour ces arguments les multiples de $\frac{2\omega}{n}$. L'étude des lois de permutation de ces indices est du plus haut intérêt pour l'étude de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré et de ses résolvantes : elle conduit aux propositions fondamentales que l'on doit à Galois et à M. Hermite. Halphen revient ensuite au cas particulier de $n=7$ pour former explicitement une des résolvantes du septième degré ; c'est l'étude de cette résolvante qui termine le second Chapitre, et c'est là qu'apparaissent dans la rédaction les premières lacunes.

Le reste de l'Ouvrage contient des *fragments divers*. Le plus important et le plus complet se rapporte à la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, à la multiplication complexe par $\sqrt{-23}$. Il a déjà paru dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* [1], et comprend, sous le titre *Principes généraux*, un exposé du problème de la multiplication complexe et des diverses méthodes qui permettent de le traiter : celle sur laquelle Halphen appelle particulièrement l'attention est *directe* et ramène à une élimination algébrique la recherche du module des fonctions elliptiques à multiplication complexe : elle est appliquée au cas de la multiplication par $\sqrt{-23}$, de façon à pousser le problème jusqu'au bout.

Le second fragment, intitulé : *Parties aliquotes des périodes*, complète dans une certaine mesure ce qui a été dit dans les Chapitres I et II sur la division des périodes. Halphen y montre comment les arguments

$$w_n = \frac{2p\omega + 2p'\omega'}{n},$$

(1) 4e série, t. V ; 1889.

où p, p', n sont des entiers, et où l'on regarde comme identiques ceux qui ne diffèrent que d'un nombre entier de périodes, se séparent en groupes, quand on regarde n comme fixe et qu'on donne à p, p' des valeurs entières telles que le plus grand commun diviseur de p, p' et n soit l'unité. Les éléments d'un même groupe se déduisent de l'un d'eux en le multipliant par des nombres entiers; il calcule le nombre des groupes dans les différents cas : n premier, n puissance d'un nombre premier, n quelconque. Les éléments d'un même groupe se décomposent en groupes cycliques. Les fonctions $\wp$ pour toutes les n^{iemes} parties de périodes, effectives ou non, sont les racines d'un polynôme aisé à former, et ce polynôme se décompose en facteurs qui correspondent aux groupes. Halphen étudie cette décomposition et donne différents exemples de calcul des fonctions symétriques de quantités telles que $\wp w_n$, w_n prenant les diverses valeurs qui appartiennent à un groupe.

Enfin le Volume se termine par des fragments relatifs à la transformation, très précieux et très lisibles, grâce sans doute aux soins pieux qu'a pris M. Stieltjes pour les trier et les classer, mais qui échappent naturellement à une analyse succincte.

On ne ferme pas ce Volume sans tristesse, en pensant à ce qu'il aurait pu être : tel qu'il est, il rendra de très grands services, car les exemples particuliers qui y sont traités, avec ce goût des choses précises et terminées, cette puissance et cette patience de pénétration qui étaient comme la marque particulière du génie d'Halphen, sont la meilleure initiation possible aux théories générales, théories qui d'ailleurs, comme on l'a dit plus haut, sont, le plus souvent, au moins esquissées. La tâche qui avait été confiée à M. Stieltjes, et qui ne pouvait être mieux accomplie que par lui, est de celles qui n'effrayent pas les esprits généreux, bien qu'on les qualifie d'ingrates : j'ose croire qu'elle ne l'aura pas été, qu'elle a apporté à celui qui l'a entreprise et mené à bien une satisfaction légitime, et que le monde savant sera reconnaissant à M. Stieltjes et à MM. Gauthier-Villars de nous avoir donné ce troisième Volume.

J. T.

MOUCHOT. — Les nouvelles bases de la Géométrie supérieure (Géométrie de position). 1 vol. in-8°; VII-179 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 1892.

M. Mouchot, dont le nom est bien connu, grâce à ses belles recherches sur l'utilisation de la chaleur solaire, est de ceux qui suivent avec persévérance leurs propres idées, et qui se préoccupent peut-être plus du progrès qu'elles font dans leur esprit que de la façon dont pensent les autres; voici trente ans et plus, nous dit-il, qu'il poursuit les recherches dont il publie aujourd'hui le résumé; je serais étonné si, avant de donner à sa pensée une forme définitive, il s'était beaucoup préoccupé des recherches de von Staudt, des publications dont elles ont été l'objet, ainsi que des travaux de Laguerre dans le même ordre d'idées. En prenant ensuite connaissance des travaux des autres, M. Mouchot se sera simplement réjoui de ce qu'ils pouvaient présenter de commun avec ses propres conclusions. Au reste, il convient de dire que sa méthode pour introduire géométriquement les imaginaires se distingue des autres, tout en ayant avec elles des relations inévitables. Il y a toujours profit à entrer en communication avec des esprits de cette trempe, et le petit Livre de M. Mouchot sera sans doute bien accueilli des philosophes et des mathématiciens.

C'est la nécessité d'introduire en Géométrie les éléments imaginaires, afin de pouvoir faire des raisonnements applicables à tous les états d'une figure qui est la préoccupation essentielle de M. Mouchot; voici comment il arrive à cette introduction.

Il désigne par point l'ensemble de ce que l'on appelle habituellement *deux points;* ces deux points, qu'il appelle *composantes,* doivent être rangés dans un ordre déterminé; quand les deux composantes sont distinctes, le point (au sens de M. Mouchot) est imaginaire; et l'interversion de l'ordre dans les composantes correspond à l'échange entre deux points imaginaires conjugués; si les composantes sont confondues, le point est réel. Cette conception du point entraîne une conception correspondante des droites et des courbes, et ce sont les conséquences de ces conceptions que développe M. Mouchot : dans son système, les points d'intersection de deux courbes réelles ou imaginaires prennent un sens concret très précis. D'ailleurs l'étude des figures qu'intro-

duit ainsi M. Mouchot offre un incontestable intérêt géométrique.

Est-ce à dire qu'il ne s'exagère pas quelque peu l'intérêt de ses recherches? On aurait, à coup sûr, mauvaise grâce à le lui reprocher, mais on peut reconnaître aussi qu'une représentation géométrique concrète des éléments imaginaires n'est pas indispensable. Il suffit, et la chose est amplement faite aujourd'hui, d'une bonne théorie analytique des *nombres* imaginaires, considérés comme l'ensemble de deux nombres réels, rangés dans un ordre déterminé, sur lesquels on a défini d'une façon précise les opérations arithmétiques. Dès lors la Géométrie de Descartes suffit, et, si l'on parle d'un point imaginaire dont on a les coordonnées, on sait que l'on ne parle que de ces coordonnées. Les démonstrations analytiques doivent ensuite être présentées de façon à bien mettre en évidence ce fait que les propriétés des éléments imaginaires que l'on veut établir ne dépendent pas des axes; dès lors on n'a nul besoin ni du *principe de continuité* de Poncelet, ni du *principe des relations contingentes* de Chasles. A l'époque où ont écrit ces grands géomètres, la théorie analytique des *nombres* imaginaires, quoiqu'elle eût été déjà constituée (en particulier par Cauchy), n'était pas encore classique; Poncelet et Chasles ont raisonné en Géométrie comme on a fait longtemps en Analyse, quand on se bornait à dire qu'on calcule avec les nombres imaginaires comme avec les nombres réels et que l'on arrive ainsi (sans trop savoir pourquoi) à des résultats exacts. En Géométrie comme en Analyse, la connaissance des faits mathématiques les plus importants a devancé, et de beaucoup, l'établissement de bases indiscutables sur lesquelles il a été ensuite possible de faire reposer solidement cette connaissance, et Descartes, auquel M. Mouchot aime à se rattacher, a donné les plus étonnants exemples des progrès que l'on peut faire faire aux Mathématiques, en se souciant fort peu de la rigueur. Quoi qu'il en soit, aujourd'hui que la théorie analytique est entièrement constituée, l'intérêt d'une interprétation géométrique ne disparaît pas, à coup sûr; mais il est quelque peu diminué. La tentative de v. Staudt, toutefois, en ce sens qu'elle fait abstraction de toute idée de mesure, conserve un grand intérêt philosophique. J. T.

HUSSERL (E.-G.). — Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen. Erster Band, in-8, XVI-324 p. Halle-Saale. Pfeffer; 1891.

Voici tout un gros Volume sur le nombre entier, ou plutôt *sur la notion de nombre entier*. Le Livre de M. Husserl est fait pour les philosophes; il peut intéresser cependant les mathématiciens qui essayent d'être philosophes et c'est à ce titre que nous le signalons; s'il m'arrive, en parlant, de dire quelque hérésie philosophique, à supposer qu'il y ait des hérésies en Philosophie, le lecteur voudra bien m'excuser.

Le Livre de M. Husserl est divisé en deux Parties : la première a pour titre les *concepts propres de multiplicité, d'unité* et de *nombre,* et la seconde, les *concepts symboliques de nombre et les sources logiques de l'Arithmétique*.

Dans les deux Parties, il convient d'admirer la richesse d'informations de M. Husserl : les opinions des philosophes et des mathématiciens qui ont touché la matière sont développées avec ampleur, quelquefois même avec plus d'ampleur que n'ont fait les auteurs eux-mêmes; le procédé de M. Husserl, pour chaque théorie qu'il analyse et qu'il combat, consiste à l'exposer de la façon la plus cohérente qu'il est possible, d'une façon si cohérente que le lecteur naïf est souvent disposé à accepter tout d'abord cette théorie et s'étonne ensuite, quelques pages plus loin, des lacunes et des inconséquences qu'on lui dévoile. C'est sur la première Partie, ou plutôt sur quelques points qui y sont traités, que j'insisterai.

La notion de nombre entier, pour M. Husserl, résulte, par abstraction, de l'idée de réunion, de collection d'objets distincts; ces objets peuvent d'ailleurs être de nature quelconque, matérielle ou immatérielle; ils peuvent être de même nature, ou hétérogènes; ils doivent être distincts; mais l'attention se porte sur ce qu'ils sont distincts, non sur ce qui les distingue; les unités distinctes de la collection, prises ensemble, forment un tout; cette union entre les parties peut s'exprimer, si l'on veut, par la conjonction *et,* en sorte que les diverses collections que l'on peut former (1) peuvent être représentées par un objet et un objet (ein

(1) Ainsi que me l'a fait observer M. Paul Tannery, la grosse question de se

Etwas und ein *Etwas*), un et un et un, un et un et un et un, etc.; les mots deux, trois, quatre, etc. ne signifient pas autre chose. C'est le nombre *cardinal* que définit donc M. Husserl, et auquel il attribue ainsi le rôle prépondérant : quelques auteurs, et non des moindres, attribuent, au contraire, ce rôle aux nombres ordinaux, et pour eux c'est l'idée de rang, de succession, qui est l'idée génératrice du nombre, non celle de collection.

Laissant de côté les innombrables discussions, d'ordre psychologique, auxquelles donnent lieu ces notions, je voudrais m'arrêter un instant à l'idée d'*égalité*, qui intéresse peut-être plus particulièrement les mathématiciens.

C'est à bon droit, à ce qu'il me semble, que M. Husserl critique la célèbre définition de Leibnitz, bien souvent reproduite : *Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*. Qui ne voit tout ce qu'il y a de vague et d'obscur dans ce *substitui potest* et dans ce *salva veritate?* Je crois bien, comme M. Husserl, qu'il n'y a pas de définition possible de l'égalité en général, mais bien des définitions de l'égalité de tels ou tels êtres mathématiques particuliers; ainsi on peut définir l'égalité de deux segments de droite, ou de deux angles, l'équipollence de deux segments, l'équivalence de deux aires ou de deux volumes, etc. Ces définitions doivent satisfaire à certaines conditions, et peut-être est-ce ici le lieu de faire remarquer que ces conditions ne sont autre chose que ce qu'on appelle les *axiomes relatifs à l'égalité :* ainsi l'égalité doit être réciproque, et deux quantités égales à une troisième doivent être égales entre elles. Au reste, il me paraît que c'est là le rôle des axiomes en Mathématiques, au moins de ceux qui ne sont ni des truïsmes, ni des postulats : *les axiomes sont des conditions imposées aux définitions*. Quoi qu'il en soit, pour ce qui est du nombre entier, M. Husserl conteste l'utilité d'une définition de l'égalité ; la notion de l'égalité étant, d'après lui, suffisamment éclairée par la notion même de nombre : pourquoi chercher à expliquer que un et un et un est égal à un et un et un? Il critique assez vertement les mathématiciens qui ont cherché à définir l'égalité en nombre de deux collections par la possibilité

voir si toutes les collections peuvent être obtenues ainsi par l'adjonction répétées d'un objet n'est pas [illegible] par M. Husserl.

de faire correspondre, d'une façon univoque, les éléments d'une collection aux éléments de l'autre; et la prétention surtout lui paraît insoutenable de faire sortir en quelque sorte, de cette définition de l'égalité, une définition du nombre, en considérant par exemple une suite-type de collections, comme celle-ci, où chaque collection est formée de traits verticaux

|, ||, |||, ||||, ...

et en comparant chaque collection possible d'objets à celle de la suite-type qui lui est égale en nombre, d'après la définition précédente. A ce sujet, il prend quelque peu M. Stolz à partie. Je n'ai pas, bien entendu, à prendre ici la défense de M. Stolz, mais, à la réflexion, il ne me paraît pas certain que l'opinion de M. Husserl soit foncièrement distincte de celle qu'il combat.

Pour lui, je l'ai déjà dit, il est inutile de définir l'égalité en nombre de deux collections; tant mieux, s'il en est ainsi; d'autant que, alors, on est dispensé d'examiner cette ennuyeuse question : après avoir vérifié que deux collections sont égales en nombre en faisant correspondre chaque élément de l'une à chaque élément de l'autre, est-on assuré que, en choisissant un autre mode de correspondance, on trouvera encore que les deux collections sont égales en nombre? En d'autres termes, quand on compte les éléments d'une collection, le résultat est-il indépendant de l'ordre dans lequel on compte les éléments?

Rien que pour éviter cette question, je serais heureux que M. Husserl eût raison; mais allons un peu plus loin. Pour lui, cette correspondance n'est qu'une condition nécessaire et suffisante au moyen de laquelle *on peut vérifier* l'égalité en nombre de deux collections, nullement une définition, et encore, pour vérifier cette égalité, est-il plus simple et plus commode de *compter* les deux collections. Sur cette commodité, il n'y a pas de doute, et le commerçant européen qui, pour trafiquer avec quelque sauvage, est obligé de troquer un à un les objets qu'il vend contre ceux qu'il reçoit est assurément du même avis que M. Husserl; mais cette pratique même de l'échange, usitée chez des peuples sans culture, n'est-elle pas une présomption en faveur de la valeur, et, en quelque sorte, du caractère primitif de cette définition de l'égalité par la correspondance entre les éléments de deux collec-

tions, que quelques mathématiciens ont adoptée? Et n'est-ce pas à cause même de sa culture que M. Husserl n'a pas besoin de définition (¹).

Dans la claire idée qu'il se fait de l'égalité, est-il certain qu'une certaine suite-type n'intervienne pas d'une façon quelque peu inconsciente, ainsi que cette correspondance dont il conteste l'utilité? En disant qu'une collection concrète se compose de quatre éléments, qu'elle est un *Etwas* et un *Etwas* et un *Etwas* et un *Etwas*, n'en fait-il pas correspondre chaque élément à ce mot un *Etwas* ou plutôt à l'idée qu'il se fait d'un *Etwas*? Outre que, à ce degré d'abstraction que suppose le concept d'une chose quelconque, d'un *Etwas*, il est peut-être difficile de distinguer entre un concept et son signe, il n'importe nullement, pour que la suite-type existe dans l'esprit de M. Husserl, que les éléments de cette suite soient des mots ou des concepts abstraits répétés; dans l'un ou l'autre, car la correspondance est possible et si chacun des petits traits de M. Stolz

||||

a le même sens que un *Etwas*, si leur rapprochement dans un même groupe figuré a la même signification que la copule *et*, où est la différence entre les deux points de vue (²)? D'un autre côté, si l'on compte les éléments d'une collection, ne les compte-t-on pas un à un, ne les fait-on pas ainsi correspondre successivement aux mots un, deux, trois, ...? Ne sépare-t-on pas ainsi la collection en collections partielles dont les éléments correspondent successivement au mot *un*, ou à l'idée d'*un*, dans les expressions un, un et un, un et un et un, ...? Et, ainsi, les idées de nombre cardinal et de nombre ordinal ne se recouvrent-elles pas, et si M. von Helmholtz observe que le nom de *nombre* qui correspond à la collection que l'on compte n'est que le nom de nombre qui, au premier point de vue, correspond au dernier élément compté,

---

(¹) Une autre présomption en faveur de cette définition est le parti que M. Cantor en a tiré pour arriver à la notion d'égalité en puissance (*Mächtigkeit*) pour deux ensembles.

(²) Au reste, il me semble que M. Husserl s'est aperçu lui-même de la possibilité de présenter les choses de façon que cette différence disparût à peu près (*voir* Chap. VII, p. 1[illegible]).

qui, au second point de vue, correspond à la dernière collection partielle, laquelle n'est autre que la collection totale, faut-il en conclure que la notion de nombre est radicalement distincte chez M. von Helmholtz et chez M. Husserl?

Quant à la difficulté dont j'ai parlé au début, l'indépendance du nombre des éléments d'une collection et de l'ordre dans lequel on les compte, difficulté que M. Husserl supprime, je crois bien, avec M. von Helmholtz, qu'elle est d'ordre psychologique plutôt que mathématique : il me semble qu'elle dépend de la façon dont nous nous *représentons*, dont nous sommes peut-être obligés de nous *représenter*, les éléments d'une collection comme distincts : presque invinciblement nous nous les représentons comme séparés dans l'espace, ou comme successifs dans le temps, et c'est à cause de cette représentation que la question se pose, et elle se pose parce que, alors, nous portons notre attention sur ce qui *distingue* les éléments les uns des autres, non sur ce seul fait qu'ils sont distincts, et, comme l'a fait très justement observer M. Husserl, c'est cela seul qui importe. En vérité, quand nous nous représentons une collection, nous n'arrivons guère à supprimer toute différence de rôle entre les éléments de cette collection et c'est cette impuissance de penser à des objets distincts sans penser un peu à ce qui les distingue, c'est cette impuissance qui crée la difficulté.

La première Partie du Livre de M. Husserl se termine par une excellente étude sur les opérations fondamentales de l'Arithmétique et sur leur signification quand on regarde le nombre comme une collection d'unités, sans recourir aux symboles (systèmes de numération) qui servent à les représenter. Signalons en passant, au point de vue pédagogique, la nécessité [1] de faire une pareille étude, d'où résultent clairement les propriétés fondamentales des opérations, avant de donner la théorie des règles pratiques qui

---

[1] Je suis heureux de me rencontrer ici avec M. Méray, qui, dans un très intéressant article de la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur* (janvier 1892), a fortement, et dans les meilleurs termes, insisté sur cette nécessité ; seulement je dois dire qu'elle est souvent mieux comprise par nos professeurs que ne semble le croire M. Méray : ainsi, en feuilletant des notes prises au lycée par un élève de la classe de *sixième*, j'ai eu le plaisir d'y trouver nettement distinguées la définition théorique de chaque opération et la règle pratique pour trouver, en *chiffres*, le *résultat* de l'opération quand les *données* sont exprimées en *chiffres*.

permettent d'effectuer ces opérations dans le système décimal, théorie qui suppose la connaissance de ces propriétés fondamentales.

J'avoue avoir été très étonné de rencontrer dans un esprit aussi philosophique que M. Husserl et aussi bien informé des choses mathématiques une conception singulièrement étroite de l'Arithmétique. M. Husserl, si je l'ai bien compris, la réduit au calcul. D'après lui, pour quelqu'un qui aurait de tous les nombres une conception aussi nette que celle que nous pouvons en avoir pour les nombres deux, trois ou quatre, toute l'Arithmétique se réduirait à des propositions aussi évidentes que celle-ci $2 + 2 = 4$, et la seconde Partie de son Livre est consacrée à développer cette idée que l'Arithmétique est fondée tout entière sur la représentation symbolique des nombres, que ces symboles passent au premier plan, et que l'idée propre de collection d'unités disparaît en quelque sorte. Tout cela, encore une fois, n'est vrai que du calcul. Aussi bien M. Husserl s'élève-t-il contre la paraphrase (ὁ θεὸς ἀριθμητίζει) que Gauss a faite d'une formule célèbre : pour M. Husserl « ἀριθμητίζειν » est le fait d'un être fini. Nul doute pour ce qui est du calcul. Mais il est probable que Gauss ne se faisait pas de la Divinité l'idée d'un Inaudi monstrueux, ou d'un mathématicien comme celui de je ne sais quel roman de M. Jules Verne, qui passe son temps, dans les situations les plus invraisemblables, à extraire de tête des racines cubiques. La pensée de Gauss était que toutes les vérités mathématiques ne sont que la traduction dans le langage de la Géométrie, de la Mécanique ou de la Physique, d'identités d'Algèbre ou d'Analyse, qui embrassent ainsi les lois les plus diverses de la réalité sensible, qui en sont l'expression la plus abstraite et la plus générale, et qui se résolvent finalement en propriétés numériques, assurément indépendantes de tout système de numération. Pour rester dans le domaine de la pure Arithmétique du nombre entier, ou du moins de ce que l'on entend habituellement par là, les propriétés des nombres premiers ne sont-elles pas entièrement indépendantes de tout système de numération, et la possibilité de concevoir clairement toutes les collections possibles, aussi clairement que les collections de deux ou trois objets, nous aiderait-elle beaucoup à découvrir le théorème de Fermat, ou la loi de réciprocité? Oui, sans doute, si l'on entend

par « concevoir » une vue tellement claire des choses qu'elle en pénètre toutes les propriétés, mais il n'y a assurément aucune de nos conceptions qui soit dans ce cas. J. T.

KŒNIGS (G.). — Leçons sur l'agrégation classique de Mathématiques. Lith. 203 p. in-4°. Paris, Hermann, 1892.

Peut-être convient-il de dire ici, pour ceux de nos lecteurs qui ne sont pas familiers avec les choses de l'enseignement français, que l'agrégation de Mathématiques est un concours qui donne à ceux qui y réussissent le droit d'être professeurs (titulaires) de Mathématiques dans un lycée. Ce concours comporte diverses séries d'épreuves, d'ordre assez élevé, parmi lesquelles figurent des *leçons,* faites devant un jury d'État, sur des sujets qui se rapportent à l'enseignement des lycées, et qui sont connus un an d'avance. Ces sujets, d'ordinaire, sont très incomplètement traités dans les livres d'enseignement, et c'est même là une des raisons pour qu'on les choisisse : ils sont naturellement l'objet de la préoccupation de ceux qui, comme M. Kœnigs, sont chargés d'aider les candidats qui se préparent à l'agrégation : c'est de cette préoccupation qu'est sorti le Volume dont nous rendons compte.

Il comprend deux Parties bien distinctes : l'une contient des développements relatifs à quelques-unes des leçons les plus difficiles qui figurent au programme d'agrégation pour l'année 1892, développements qui sont d'ailleurs de nature à intéresser d'autres personnes que les candidats à l'examen. Voici les titres des sujets traités :

Intersection de deux quadriques dans le cas où cette intersection se décompose; étude des contacts. — Sur les propriétés métriques d'un faisceau de coniques. — Axes d'une section plane d'une quadrique : centre de la section, axes; axe et paramètre dans le cas de la section parabolique. — Les quadriques en coordonnées tangentielles : centre de la surface; dégénérescences projectives; discussion métrique; résumé. — Sur les nombres e et π. — Sphères tangentes à quatre plans donnés. — Sphères tangentes

à quatre sphères données. — Sur l'équation en λ [1] : discussion relative à la réalité ; résumé de la discussion. — Nous signalerons particulièrement parmi ces leçons la première et les deux dernières.

L'étude de l'intersection de deux quadriques est faite d'une façon très élégante au moyen de l'équation qui définit cette courbe sur une des surfaces quand on prend pour variables les paramètres de ses génératrices rectilignes. — La leçon sur les sphères tangentes à quatre sphères montre tout ce qu'il faut ajouter à la solution de Gergonne quand on veut en faire d'une façon précise soit l'analyse, soit la synthèse. Enfin l'étude de l'intersection de deux coniques, exposée par une méthode dont M. Darboux avait fait connaître le principe dans ses conférences à l'École Normale, ne laisse rien à désirer ni pour la simplicité, ni pour la rigueur.

La seconde Partie est consacrée à l'étude de l'inversion, des surfaces et des courbes anallagmatiques. L'objet de M. Kœnigs a été de familiariser les étudiants avec un des plus beaux Chapitres de la Géométrie, qui leur était difficilement accessible depuis que le livre de M. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, est devenu introuvable : d'ailleurs la façon détaillée et lumineuse dont M. Kœnigs a traité le sujet à son tour rendra singulièrement facile au lecteur l'acquisition des résultats essentiels. Après avoir exposé les propriétés fondamentales de l'inversion, des systèmes de sphères, des surfaces et des courbes anallagmatiques, l'auteur fait une étude spéciale des cycliques sphériques, qu'il range en trois classes, suivant qu'elles n'ont pas de point double, qu'elles admettent un point double à tangentes distinctes, ou un point de rebroussement. Cette classification s'applique aux cycliques planes, qui proviennent par inversion des cycliques sphériques. Il étudie ensuite les propriétés de ces diverses courbes et, en particulier, leurs propriétés focales. Cette étude, faite au point de vue de la Géométrie, est complétée par la discussion des équations qui représentent les cycliques planes du quatrième et du troisième ordre. Dans l'étude des surfaces cycliques qui termine le travail de M. Kœnigs, nous signa-

(1) On désigne habituellement ainsi, dans l'enseignement français, l'équation du troisième degré dont dépend la recherche des sécantes communes à deux coniques.

lerons particulièrement la belle discussion relative à l'équation générale des surfaces du quatrième degré bicirculaires, discussion qui permet de reconnaître à quel type de surface cyclide on a affaire.

On voit que M. Kœnigs a abordé dans son livre des sujets très divers, les uns d'une nature tout élémentaire, les autres plus relevés : on y retrouvera partout cette façon de voir les choses sous leur aspect le plus général, et d'assigner ainsi aux faits particuliers leur vraie nature et leur vraie raison, qui est une des marques de son talent. J. T.

MÉLANGES.

A PROPOS DE LA CORRESPONDANCE DE HUYGENS;

PAR M. PAUL TANNERY.

I. Le compte rendu des trois premiers Volumes de la *Correspondance de Huygens*, inséré dans le numéro de janvier du *Bulletin des Sciences mathématiques*, renferme quelques inexactitudes historiques que je crois intéressant de relever. Ce n'est point qu'elles soient bien graves, mais elles me fourniront l'occasion de remarques diverses qui pourront contribuer à faire ressortir la singulière importance de la publication admirable que poursuit la Société hollandaise des Sciences. Je me bornerai au reste au premier Volume, le seul que j'aie pu étudier suffisamment jusqu'à ce jour.

Page 12 du Bulletin, 5. — « A l'âge de dix-sept ans, Huygens retrouva un des plus beaux résultats d'Archimède, celui du rapport des *aires* du paraboloïde de révolution et du cône inscrit. » Au lieu du mot *aires*, il faut lire *volumes*. Le même lapsus se retrouve encore page 18.

Pour l'aire des surfaces courbes, l'antiquité n'avait pas laissé de modèles en dehors des trois corps ronds. La cubature du conoïde

parabolique d'Archimède (paraboloïde de révolution) était, au contraire, bien connue depuis la Renaissance, et si Huygens en a trouvé une démonstration nouvelle, malheureusement perdue, il n'ignorait point l'ancienne. Mais, à la même date, il a l'idée de faire tourner la parabole autour d'une parallèle à son axe et de cuber le volume ainsi engendré. Il n'avait, semble-t-il, été devancé que par Fermat (lettre à Roberval du 4 novembre 1636). Voilà certes, à 17 ans, un singulier exemple d'aptitude précoce pour les Mathématiques.

D'après le n° 20 de la *Correspondance de Huygens* (à Mersenne, novembre 1646), on peut conjecturer que les *Cogitata physicomathematica* du Minime de 1644 avaient, plus que tout autre Livre, contribué à l'éveil du génie chez le jeune étudiant de l'Université de Leyde. Cette lettre nous prouve d'ailleurs qu'il avait aussi, dès cette époque, pensé, non seulement au *volume*, mais aussi à l'*aire* du paraboloïde.

« Dans ce mesme vostre livre, là où vous venez à parler des proprietez de la parabole, j'ay trouvé celle-cy qui est de la superficie du *conoides parabolicum*, laquelle si vous me pouvez vérifier, je vous puis donner une ligne droite esgalle à la circonférence d'une parabole, mais je ne croy pas que vous en ayez la demonstration. »

Huygens a biffé cet alinéa ([1]), qui contenait une erreur dont on ne s'étonnera pas vu son âge; il n'en est pas moins clair que ses recherches postérieures sur l'aire des surfaces de révolution du second degré, recherches qu'il menait à bien dix ans plus tard, ont eu pour point de départ l'indication donnée par Mersenne.

Mais l'énoncé des *Cogitata* est faux ([2]). Doit-on en imputer l'erreur à Mersenne, assez coutumier de transcriptions inexactes, ou à Roberval qui lui a fourni la matière pour cet endroit de son Livre? La seconde hypothèse est la plus probable, car autrement

([1]) La Lettre est publiée d'après la minute.

([2]) *Hydraulic*, p. 99. — « Adde cylindrum eiusdem basis et altitudinis cum recto conoide parabolico habere superficiem quæ sine basibus sit ad superficiem conoidis absque base, ut axis totus ad duas tertias rectæ quæ potest semissem axis et totam diametrum. »

Roberval eût sans doute réclamé la priorité lorsque Huygens et Fermat, en 1658, à l'occasion des problèmes de Pascal sur la cycloïde, firent, l'un et l'autre, connaître à Paris qu'ils connaissaient une méthode pour la quadrature des surfaces de révolution [1]. D'autre part, Roberval avait dû reconnaître d'assez bonne heure son erreur, sans cependant parvenir à un résultat exact; car dans son grand factum contre Torricelli (1647), où il énumère ses travaux, il garde sur celui-là un silence complet. On peut cependant lui laisser l'honneur d'avoir soulevé le premier un problème nouveau et d'une importance capitale.

Page 12, B. — « Quatre années plus tard (en 1650), Huygens découvrit une grosse inadvertance dans un raisonnement de Cavalieri, l'introducteur des indivisibles dans l'analyse. Ce paralogisme se retrouve d'une manière plus évidente dans la démonstration bien connue du paradoxe de l'égalité de la circonférence d'un cercle à son diamètre. »

Ainsi présentée, cette indication peut induire en erreur. Cavalieri ou ses disciples ont pu faire des démonstrations sans rigueur, ils n'en ont point donné qui constituent des paralogismes. En fait, c'est Huygens qui semble avoir inventé le paradoxe précité pour montrer à Schooten l'insuffisance d'une démonstration donnée non par Cavalieri, mais par Torricelli, et portant sur une vérité non contestée : *De sphæra et solidis sphæralibus libri duo* (De dimensione parabolæ, p. 95).

Page 15, η. — « L'inadvertance de Descartes (sur ce point que le lieu de Pappus à 4 droites est formé par l'ensemble de deux coniques et non par une seule) a été remarquée, pour la première fois, par Blaise Pascal. » A l'appui de cette assertion est citée une lettre de Mersenne du 17 mars 1648, où il est effectivement parlé d'une solution, que venait d'achever le jeune Pascal, de ce fameux problème « qu'on pretend icy n'avoir pas esté resolu par M. Descartes en toute son estendue ». Mais cet « on » désigne avant tout autre Roberval qui, s'il n'avait rien publié, n'en avait pas

---

(1) La priorité de communication, à l'étranger, appartient incontestablement à Huygens.

moins résolu le même problème dès 1640 (lettre à Fermat du 4 août 1640).

Page 15, r_1 (*suite*). — « Mais c'était l'étude d'un Livre de P. de Fermat, qui induisit Huygens à écrire à Fr. de Schooten, qui avait publié une édition latine de la Géométrie de Descartes : *In prima tamen Pappi propositione universali, quæ legitur in fine paginæ* 162, *aliquid amplius habet nisi fallor quam a te inspectum sit.* Par rapport à ce *nisi fallor,* G.-P. de Roberval rassure Huygens ... »

Il y a là une confusion qui semble avoir été amenée par l'index V du premier Volume de la *Correspondance de Huygens;* cet Index, en effet, pour le problème de Pappus, renvoie, entre autres, à la page 327 d'où est tirée la citation qui précède. Mais il ne s'agit nullement là du problème *ad 4 lineas*, à propos duquel Roberval entrera plus tard en correspondance avec Huygens. Il ne s'agit pas davantage de l'édition de la *Géométrie* de Descartes procurée par Schooten en 1649. La page 162, que cite Huygens dans l'Extrait ci-dessus de sa lettre du 26 mai 1655, est celle de la traduction de Pappus par Commandin, et la proposition en question est le premier énoncé relatif aux *Lieux plans* d'Apollonius. Depuis trois ans (le 28 juillet 1652), Schooten avait communiqué à Huygens la restitution qu'il avait faite, d'après les indications de Pappus, de l'Ouvrage perdu du géomètre de Perge, restitution qu'il fit imprimer comme troisième Livre de ses *Exercitationes mathematicæ*, parues en 1656. Avant cette Communication, Huygens avait déjà (n°s 93 et 94 de la *Correspondance*) discuté, avec Schooten, un des lieux d'Apollonius. Or, en 1655, son père retrouve, dans les papiers que Mersenne lui avait autrefois envoyés (peut-être depuis dix-huit ans), la restitution du même Ouvrage par Fermat. Il le fait savoir à Schooten, et propose de lui envoyer le manuscrit, en faisant la remarque que, pour la première proposition, le travail de Fermat est plus complet. La réponse de Schooten est curieuse.

« En (¹) ce qui concerne les *Lieux plans* d'Apollonius restitués

(¹) Je traduis le texte latin.

par Fermat, quoique vous m'offriez de vous-même de me les faire voir, je préfère ne pas les connaître pour le moment, jusqu'à ce qu'après l'impression des miens j'aurai trouvé une occasion de les lire; car je ne voudrais pas qu'un autre les voyant pût croire que je suis un plagiaire ou que j'aie été aidé par quelqu'un; je veux pouvoir dire nettement que, tels je les ai publiés, tels je les ai trouvés. Quant à la première proposition universelle, c'est à dessein que je l'ai omise. Car, pour l'expliquer ou la construire, je voyais qu'il fallait un grand nombre de figures qui auraient accru plus qu'il ne convenait les dépenses d'impression, et je n'aurais pas alors trouvé facilement un typographe pour l'entreprendre. D'ailleurs, cette proposition ne m'a pas paru autant que les autres correspondre à des propriétés particulièrement élégantes et j'ai préféré la négliger plutôt que de la développer. »

Il est remarquable qu'après avoir cité élogieusement Fermat dans son Ouvrage de 1646, *De organica conicarum sectionum descriptione*, Schooten semble l'ignorer complètement dans les *Exercitationes*. Cependant l'existence du travail de Fermat sur les *Lieux plans* était publiquement connue depuis la *Synopsis* de Mersenne de 1644. Ce silence calculé de Schooten semble avoir blessé Fermat et l'avoir conduit à provoquer le professeur de Leyde au commencement de 1657 par les célèbres défis sur des questions numériques; car s'ils furent adressés également à Wallis, c'est certainement à l'incitation de Digby, tandis que pour Schooten, qui au reste ne s'en tira pas très heureusement, Fermat n'avait aucune occasion particulière de le viser.

II. Les remarques qui suivent se rapportent aux pages du premier Volume de la Correspondance de Huygens.

Page 216, note 1. — Dans une lettre de Huygens à Schooten, du 27 décembre 1654, il est parlé, évidemment d'après des indications données à Schooten par Mylon et communiquées à Huygens, de *Traités d'Arithmétique* (*et de Géométrie*) de Pascal qui, remarquent les éditeurs, ne se trouvent point dans les Œuvres de ce dernier comme ayant été imprimées avant cette date. « Il est évident d'ailleurs », ajoutent-ils, « que Huygens n'en connut que les titres ».

Ces traités qui n'ont jamais été non seulement imprimés, mais même effectivement rédigés en vue d'une publication, sont très certainement ceux qui sont mentionnés dans le placard de 1654 : *Celeberrimæ Matheseos Academiæ Parisiensi*, reproduit dans les Œuvres de Pascal. Il semble seulement que Mylon ait suivi dans sa relation un ordre différent de celui dudit placard, sur lequel je vais revenir tout à l'heure.

Page 398. — Dans une lettre du 8 avril 1656, Chapelain écrit à Huygens qu'il a donné lecture de l'imprimé *De Saturni Luna observatio nova* « en nostre assemblée académique de chez M. le Chancelier *frequenti senatu* et dans une autre d'hommes de lettres de chez M. Menage ». Les éditeurs (note 3) pensent qu'il s'agit dans ce passage d'un des deux chanceliers de l'Université. Mais il ne peut être douteux que la première communication de la découverte astronomique de Huygens n'ait été faite par Chapelain à l'*Académie française,* qui eut comme protecteur, de 1642 à 1672, le chancelier Séguier et qui se réunissait à son hôtel.

Il n'y a évidemment rien d'extraordinaire à ce que Chapelain, qui avait d'ailleurs engagé Huygens à publier sa découverte, se soit hâté d'en faire part à ses confrères de l'Académie française. La découverte d'un satellite de Saturne (on ne connaissait encore que ceux de Jupiter) était certainement de nature à intéresser vivement les lettrés du XVII[e] siècle. Mais ce qu'il y a de singulier, c'est que la correspondance si complète de Huygens ne nous indique aucune communication semblable à une Société scientifique; bien plus, elle ne nous laisse pas même soupçonner pour cette époque, l'existence à Paris d'une pareille Société. Cependant Huygens, dès son premier voyage en France (1655) s'est mis en rapport avec les mathématiciens de Paris les plus en vue; il est bientôt en correspondance directe ou indirecte avec tous, pour ainsi dire, et en particulier avec Roberval et Carcavi, qui seront ses confrères lors de la fondation de l'Académie des Sciences en 1666. Qu'est donc devenue cette « très célèbre Académie de Mathématique de Paris » à laquelle Pascal dédiait le placard que nous rappelions tout à l'heure?

Déjà l'*histoire de la roulette,* de Pascal, pouvait faire douter que cette Académie subsistât en 1658, quelle qu'ait été la fréquence

des relations entre les principaux mathématiciens de Paris à cette époque. La correspondance de Huygens nous paraît apporter sur un point de cette obscure question une lumière décisive; dès 1655, l'Académie ne se réunissait plus.

Je dis *obscure question*, d'autant que la tradition courante sur les origines de l'Académie des Sciences me paraît tout à fait inacceptable. Dans sa notice historique sur cette Académie, M. Ernest Maindron, par exemple, a formulé cette tradition en disant que « c'était une Société de savants qui se réunissaient depuis longtemps déjà, à des jours fixés d'avance, chez le P. Mersenne, puis chez le maître des requêtes Montmort et plus tard chez Melchisedech Thevenot ». Voilà ce qui est constamment répété, sans qu'il ait été seulement constaté que ces diverses réunions aient bien appartenu à la même Société et qu'il n'y en ait pas eu plusieurs, soient successives, soient simultanées.

Qu'il y ait eu, dès avant 1654, une Société scientifique à Paris se parant du titre d'Académie, on n'en peut douter. Je citerai, par exemple, la lettre de Descartes à Mersenne du 2 novembre 1646, que j'ai publiée dans le *Bulletin* (1892, p. 35), « *à cause que Roberval en faisoit parade en son Académie* ».

Cette Société se réunissait régulièrement depuis 1636 au moins, chaque semaine à un jour fixe, mais c'était à tour de rôle chez l'un ou l'autre de ses membres et nullement toujours chez Mersenne. Dans sa lettre à Fermat du 4 avril 1637, Roberval dit, en effet, que la Compagnie des mathématiciens se réunissait le jeudi, et que, le 2 avril, l'assemblée avait eu lieu chez M. de Montholon, conseiller (1).

De même, en 1645 probablement, Descartes se rencontra avec Roberval dans une réunion de cette Académie; le second voulut soulever une discussion pour prouver l'impossibilité du mouvement dans le plein; Descartes refusa de s'y prêter. C'était « chez une personne de marque (2) ».

Quoique Roberval ait fait partie plus tard de l'Assemblée de M. de Montmor, celle-ci doit être absolument distinguée de

(1) Il indique, comme autres membres, Étienne Pascal et Le Pailleur. Il n'est pas douteux que Carcavi n'en ait fait partie dès lors.

(2) *Lettres de Descartes*, Clerselier, III, p. 339.

l'Académie dont il vient d'être parlé. Rappelant l'incident de 1645, Roberval s'était vanté, dans cette Assemblée de M. de Montmor, d'avoir une fois fermé la bouche à Descartes en bonne Compagnie. Cela souleva des discussions et Clerselier lut le 13 juillet 1658 (un samedi) une longue défense de l'opinion de son maître sur le mouvement dans le plein. Dans la Préface du Tome III des *Lettres de Descartes,* en s'expliquant à ce sujet, il affirme que l'Assemblée de M. de Montmor est peut-être une aussi bonne Compagnie et sans doute pour le moins aussi savante que l'autre pouvait être. Ces expressions prouvent à la fois que la rencontre de Descartes et Roberval avait eu lieu au sein d'une Société savante, et que la nouvelle Société était tout à fait différente.

Cette Société de Montmor subsiste encore en 1662; Clerselier y fait lecture des lettres qu'il adresse à Fermat pour défendre la Dioptrique de Descartes et c'est par ordre de l'assemblée (qui se tient alors le mardi de chaque semaine) qu'il écrit son épître du 13 mai (*Lettres de Desc.*, III, p. 284-285). Cette Société, où, dès 1658, les Descartistes (pour parler comme Clerselier) dominaient évidemment déjà, a donc tout à fait le caractère d'une Société cartésienne; ce n'est pas une Société scientifique proprement dite et ce serait à tort qu'on la considérerait comme l'embryon de l'Académie des Sciences.

Enfin, si nous considérons plus attentivement le très curieux placard de Pascal en 1654, il est bien difficile de s'expliquer cette pompeuse énumération de travaux immenses qui sont à peine ébauchés sur le papier, si elle s'adresse véritablement à une Société fonctionnant régulièrement. Il ne s'agit pas d'ailleurs d'un morceau de réception, puisque Pascal se donne comme admis dans la Compagnie dès son enfance (*inter vos educatus*) et rappelle l'approbation donnée autrefois (avant 1649) à sa machine arithmétique. Tout devient clair au contraire si l'on regarde ce placard comme un prospectus destiné à faire renaître une Société dissoute en attirant de nouveaux adhérents autour d'un petit noyau d'anciens membres.

L'Académie de Roberval semble avoir été en majorité constituée par des magistrats; les troubles de la Fronde durent suspendre les réunions et amener entre ses membres des divisions politiques qui les empêchèrent, après le rétablissement de l'ordre, de

renouer les anciennes traditions. En 1654, une tentative de reconstitution eut lieu, mais elle échoua. Quelques années après, une autre Société se forma, mais elle prit un tout autre caractère qui devait en écarter plus ou moins vite les savants réfractaires aux doctrines cartésiennes. Or ce sont eux qui, dans l'Académie de 1666, formeront le groupe le plus marqué.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Thomson (Sir W.). — *Popular Lectures and Addresses* (3 vols.); vol. 3 : *Navigational Affairs*. Post-8°, 492 p. with illustr. London, Macmillan. 7 sh. 6 d.

Tuch (Th.). — *Eine Cremona'sche Punkt-Gerade-Verwandtschaft 2. Ordnung nebst einer Untersuchung über die einer Curve 3. Ordnung gleichzeitig ein- und umgeschriebenen Dreiecke.* Inauguraldiss. 51 S. 8° und 1 Taf. 4°. Jena.

Venske (O.). — *Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung, welche sich auf Raumcurven constanter erster Krümmung beziehen.* Lex.-8°, 60 S. m. Fig. Göttingen, Vandenhöck et Ruprecht. 1 M. 20 Pf.

Duclaux (E.). — *Cours de Physique et de Météorologie professé à l'Institut agronomique.* In-8°, IV-508 p. avec 175 fig. dont 44 en deux couleurs. Paris, Hermann. 7 fr. 50 c.

Adler (A.). — *Graphische Auflösung der Gleichungen.* Gr.-8°, 26 S. Klagenfurt, v. Kleinmayr. 1 M.

Du Fay (...). — *Solutions et problèmes d'Analyse et de Mécanique proposés aux conférences de la Sorbonne.* 1875-1876. In-8°, 79 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Halphen (G.-H.). — *Traité des fonctions elliptiques et leurs applications.* 3e Partie : *Fragments.* In-8°, XVI-272 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 8 fr. 50 c.

Husserl (E.-G.). — *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und log. Untersuchungen.* 1 Bd. Gr.-8°, XVI-324 S. Halle, Pfeffer. 6 M. 50 Pf.

Marchand (E.). — *Observations des taches solaires en* 1890 *et des facules solaires en* 1889 *et* 1890 *faites à l'Observatoire de Lyon*. In-8°, 7 p. Lyon, impr. Plan.

Stoffaes (...). — *Cours de Mathématiques supérieures*. In-8°, VII-432 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 8 fr. 50 c.

Wolff (Ch.). — *Das Princip der reciproken Radien*. Gr.-8°, III-39 S. und 2 Taf. Erlangen, Blaesing. 1 M.

Rouché (E.) et de Comberousse (C.). — *Traité de Géométrie*. 6e édit., 2e Partie : *Géométrie dans l'espace*. In-8°, XIX-617 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Calinon (A.). — *Introduction à la Géométrie des espaces à trois dimensions*. In-8°, 26 p. avec fig. Nancy, Berger-Levrault et Cie.

Eisenlohr (A.). — *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (*Papyrus Rhind des British Museum*), *übersetzt u. erklärt*. 2. *Aufl.* (*ohne Tafeln*). Gr.-8°, II-278 S. Leipzig, Hinrichs. 12 M.

Grassmann (R.). — *Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Grössen in strenger Formel-Entwickelung*. Gr.-8°, IX-132 S. Stettin, Grassmann. 2 M. 25 Pf.

Harnach (A.). — *An Introduction to the study of the Elements of the differential and integral Calculus*. From the German. 8°. London, Williams et Norgate. 10 sh. 6 d.

Lie (S.). — *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen,* bearb. u. herausgeg. von G. Scheffers. Lex.-8°, XIV-568 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. 16 M.

Lucas (E.). — *Récréations mathématiques*. I : *Les Traversées; les Ponts; les Labyrinthes; les Reines; le Solitaire; la Numération; le Baguenaudier; le Taquin*. 2e édit. Gr. in-16°, XXIV-255 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 7 fr. 50 c.

Picard (E.). — *Traité d'Analyse*. T. I : *Intégrales simples et multiples, l'Equation de Laplace et ses applications; Développements en séries; Applications géométriques du Calcul infinitésimal*. In-8°, XII-457 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GALILÉE. — Le Opere di Galileo Galilei, edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume II, 611 p. in-4°. Firenze, Barbera; 1891.

Le second Volume de la nouvelle édition des *Œuvres de Galilée* (¹) nous transporte de Pise à Padoue. L'Université de cette dernière ville compta en effet Galilée au nombre de ses professeurs (*lettor delle Matematiche*), dès l'année scolaire 1592-1593 : il avait alors vingt-neuf ans; la dernière pièce du Volume est de 1610; c'est donc une longue période de dix-huit ans pendant laquelle le futur rénovateur mûrit lentement les idées de sa jeunesse, tandis que son activité semble tout entière se porter sur les matières de son enseignement, et en particulier sur les applications des Mathématiques. Une invention d'un caractère tout pratique, celle de son compas de proportion, lui donnera la première occasion de faire imprimer un de ses écrits, en même temps qu'elle l'entraînera, pour la défense de ses droits, à essayer son talent comme polémiste. Mais, en dehors de ces publications, Galilée, dès son origine, avait rédigé les leçons qu'il professait et il en faisait même faire pour ses auditeurs des copies manuscrites, qui de la sorte nous les ont conservées, au moins en partie. Ces leçons remplissent environ la moitié du Volume.

I. Il s'ouvre tout d'abord par deux Traités de fortification, une *Breve instruzione all'architettura militare*, et un *Trattato di fortificazione;* le premier, jusqu'à présent inédit, sauf divers fragments, paraît un résumé de son premier cours fait à Padoue; le second, publié pour la première fois par Venturi en 1818, semble une rédaction plus développée faite par Galilée lui-même, probablement un peu plus tard et en vue de leçons particulières plutôt que d'un cours public. L'un ou l'autre sont du plus haut intérêt pour l'histoire de la fortification; mais, au point de vue mathématique, ils n'offrent que des tracés géométriques élémen-

(¹) *Voir* le numéro du *Bulletin* de mai 1892, p. 15[illegible] et suiv.

taires. On peut remarquer toutefois des constructions approximatives de polygones réguliers de côtés donnés; celle du pentagone, avec une seule ouverture de compas, est nommément empruntée à Albert Durer.

La dernière pièce du Volume nous ramène au sujet des deux premières; c'est une page écrite par Galilée à la demande de Pietro Duodo, capitaine de Padoue pour la République de Venise, lequel avait institué une *Accademia Delia,* pour l'instruction militaire des jeunes nobles padouans; cette page, où sont résumées les connaissances dépendantes des Mathématiques que doit posséder un bon militaire, a été retrouvée par M. Favaro dans les Archives de la ville de Padoue. Il en avait déjà publié une reproduction photolithographique dans la *Rivista d'Artiglieria e Genio,* Rome, 1886.

II. Les *Mecaniche* de Galilée représentent, de même que le *Trattato di fortificazione,* une rédaction faite pour des leçons particulières; elles ont d'ailleurs probablement coïncidé, comme date, avec le cours public professé à Padoue par Galilée en 1597-98 sur les *Questions mécaniques* d'Aristote. Cette rédaction eut un très grand succès, comme en témoignent, d'une part le nombre considérable de copies manuscrites, quelques-unes très anciennes, qui en subsistent, et d'un autre côté, cette circonstance qu'avant d'avoir été imprimé en Italie (il ne le fut qu'après la mort de Galilée, en 1649, par les soins de Luca Danesi), l'ouvrage fut traduit en français et publié dans cette langue par le P. Mersenne, dès 1634.

On chercherait cependant vainement dans ce petit Traité quelqu'une des idées concernant le mouvement que Galilée agitait déjà à Pise en 1590; l'auteur s'y est simplement proposé de donner une théorie élémentaire des puissances simples (levier, treuil, poulie, vis) en insistant sur le principe que ce qui se gagne en force se perd en vitesse. Sauf la clarté de l'exposition et la mise en pleine lumière de ce principe, il n'y aurait là aucun progrès réel par rapport à l'antiquité si, à propos de la vis, Galilée n'établissait pas la théorie du plan incliné et ne faisait pas ressortir l'erreur dans laquelle est tombé Pappus à ce sujet au Livre VIII de sa *Collection mathématique.*

A la fin du Traité, se trouve cependant soulevée une question nouvelle dans un Chapitre, qui, à la vérité, devait, semble-t-il, faire partie originairement d'un autre ensemble perdu ou resté inachevé. Il s'agit de la force du choc; Galilée rejette les explications aristotéliques et en propose une nouvelle, reposant sur le principe fondamental qu'il a développé dans ses *Mecaniche*; mais il ne possède pas encore les éléments suffisants pour trouver une formule précise et il n'y a là qu'une simple tentative.

Les éditeurs en ont rapproché une *Leçon académique*, où Torricelli a relaté plus tard de curieuses expériences poursuivies par Galilée, sans doute vers la même époque, pour montrer que la force du choc est infinie par rapport à une puissance en repos.

III. Une troisième série de leçons publiques ou particulières de Galilée a été l'origine d'un troisième Traité, rédigé en italien, comme les précédents, et qui concerne l'Astronomie (*Trattato della sfera ovvero Cosmografia*). Ce Traité, publié pour la première fois en 1656 par frère Urbano Daviso (Buonardo Savi), a été considéré comme apocryphe, en particulier par Libri, pour ce motif que l'auteur y suit le système de Ptolémée et rapporte les arguments classiques sur l'immobilité de la Terre, en se contentant de dire que de très grands philosophes et mathématiciens ont estimé que la Terre était une étoile et l'ont considérée comme mobile. Cependant, au moins depuis 1597, Galilée avait embrassé le système de Copernic. Il n'en a pas moins été démontré que, dans son enseignement, il continua à répéter et à commenter les formules traditionnelles; l'authenticité de la *Cosmografia* est d'autre part suffisamment établie par les manuscrits indépendants l'un de l'autre qui l'attribuent expressément à Galilée et dont les deux plus anciens remontent jusqu'aux années 1605 et 1606.

La plus ancienne preuve de l'adoption des idées de Copernic par Galilée nous est d'ailleurs donnée par un petit écrit sous forme de lettre (du 30 mai 1597) à son ami et maître Jacopo Mazzoni, qui venait de publier un Ouvrage *De comparatione Aristotelis et Platonis*, où il avait incidemment réfuté la doctrine du mouvement de la Terre. L'objet de l'écrit de Galilée, qu'il fit circuler manuscrit dans le cercle de ses amis intimes, et qui fut pour la première fois publié par Venturi (1818), est de prouver mathé-

matiquement l'erreur où était tombé Mazzoni en affirmant que si la Terre n'était pas au centre du monde, l'horizon astronomique ne pourrait diviser sensiblement la sphère céleste en deux hémisphères égaux.

IV. En ce qui concerne les lois du mouvement, nous ne trouvons à proprement parler dans le second Volume qu'une première rédaction latine (publiée d'après un autographe qui paraît remonter à l'année 1604) de la théorie du mouvement accéléré insérée dans les *Dialogues des nouvelles Sciences* de 1638. La loi de ce mouvement y est posée *a priori;* l'expérience (celle de la force du choc) n'y est invoquée que pour prouver la possibilité qu'un corps puisse passer par tous les degrés de vitesse; le même fait est développé théoriquement par la considération du mouvement sur le plan incliné.

V. Vers le 10 octobre 1604, une nouvelle étoile apparut dans le ciel et renouvela l'étonnement produit par celle de 1572. Elle paraît avoir été remarquée en premier lieu à Padoue par un jeune Milanais, Baldassare Capra, qui y étudiait la Médecine et qui recevait en même temps des leçons d'Astronomie d'un Allemand (Simo Marius). Galilée qui, cette année-là, faisait un cours sur la théorie des planètes, consacra à la nouvelle étoile trois leçons, dont il reste quelques fragments, rédigés en latin, en partie seulement publiés d'après les autographes, par Venturi (1821). Il devait plus tard revenir, dans ses *Massimi sistemi,* sur les questions que soulevaient les apparitions de ce genre. Pour le moment, il semble qu'il ait prudemment évité toute polémique compromettante.

Il y fut cependant provoqué dès lors par Baldassare Capra, qui, au commencement de 1605, fit imprimer à Padoue un opuscule intitulé : *Consideratione astronomica circa la nova et portentosa stella che nell' anno* 1604 *a di* 10 *ottobre apparse, con un breve giudicio delli suoi significati*. Les éditeurs ont reproduit cet opuscule avec les annotations marginales de Galilée, d'après un exemplaire conservé à la Bibliothèque nationale de Florence. Capra, tout en qualifiant d'*Eccellentissimo* le professeur de l'Université, lui avait adressé quelques critiques; elles ne furent

relevées, ainsi que les erreurs de l'auteur, que quand Galilée eut à défendre, contre le même personnage, son invention du compas de proportion.

Un Antonio Lorenzini da Montepulciano publia également à Padoue, en 1605, un *Discorso* sur la nouvelle étoile, où il soutint qu'elle appartenait à la sphère de la Lune et que les raisonnements des mathématiciens, touchant l'absence de parallaxe, ne pouvaient prouver le contraire. Galilée était encore directement visé, sinon nommé cette fois. Mais Lorenzini n'obtint comme réponse qu'un *Dialogue* burlesque, écrit en patois, et qui parut sous le pseudonyme de Cecco de' Ronchitti da Brugene. Dès l'origine, il fut attribué à Galilée, et en conséquence les éditeurs l'ont reproduit, avec une traduction en italien et, en notes, les passages visés du *Discorso* de Lorenzini. Mais M. Favaro pense que Galilée n'a fourni que les matériaux, et que le véritable rédacteur est un moine bénédictin, intime du professeur, et nommé Girolamo Spinelli. Ce dialogue, dont les interlocuteurs sont deux paysans, est d'ailleurs franchement gai, et les plaisanteries dirigées contre Aristote et les philosophes qui se mêlent de ce qu'ils ne savent pas n'étaient guère de nature à blesser personne.

VI. Le premier Ouvrage que fit imprimer Galilée est l'opuscule en italien dédié à Côme de Médicis, et intitulé : *Le operazioni del compasso geometrico e militare* (1606). L'ingénieuse invention de Galilée était parfaite dès 1597, et dès lors il avait dû rédiger une instruction pour la joindre aux instruments que prenaient ses élèves ou qu'il offrait à divers personnages de marque, italiens et étrangers. Cette instruction subsiste dans des manuscrits antérieurs à 1606, et est maintenant publiée pour la première fois; d'un second texte, qui donne au contraire à très peu près la forme définitive, les éditeurs n'ont reproduit que la seule variante notable qu'il offre par rapport à l'imprimé.

Baldassare Capra osa, dès l'année suivante, faire imprimer à Padoue même un opuscule latin : *Usus et fabrica circini cujusdam proportionis, per quem omnia fere tum Euclidis, tum Mathematicorum omnium problemata facili negotio resolvuntur*, dans lequel, sans nommer Galilée et sans s'expliquer nettement sur l'invention de l'instrument, il ne craignait pas de

dire qu'elle était impudemment réclamée par tel qui n'y avait aucun droit et s'attribuait au moins l'explication de la construction (que Galilée n'avait pas donnée). Cette explication avait d'ailleurs été empruntée par Capra à un écrit manuscrit d'un Flamand, Jean-Eutel Zieckmeser, qui, vers 1603, était passé à Padoue avec un instrument copié sur celui de Galilée, et y avait été convaincu de plagiat. Capra avait également pris un certain nombre d'opérations dans le manuscrit du Flamand; il avait compilé le reste de son écrit soit sur celui de Galilée lui-même, soit dans des Ouvrages de Magini, professeur de Mathématiques à Bologne; le tout est maladroitement fait, avec de grossières erreurs, que Galilée releva avec soin sur un exemplaire conservé à la Bibliothèque nationale de Florence et que les éditeurs ont intégralement reproduit avec les annotations marginales.

L'inventeur du compas géométrique et militaire ne pouvait tolérer cet insolent plagiat. Il fit citer Capra à Venise, devant les Réformateurs de l'Université, et obtint la suppression de l'édition dont il avait à se plaindre; mais comme une trentaine d'exemplaires étaient, avant la saisie, sortis des États vénitiens [1], il crut nécessaire d'y opposer sa *Difesa di Galileo Galilei, nobile fiorentino, lettore delle Matematiche nello Studio di Padova, contra alle calunnie ed imposture di Baldessar Capra, milanese,* le second Ouvrage qu'il ait fait imprimer (Venise, 1607), et où il raconte tout au long, avec pièces justificatives à l'appui, cette singulière histoire. Elle révèle un état de mœurs scientifiques dont nous nous faisons difficilement une idée; aussi la *Défense de Galilée* mérite une lecture attentive; on y trouvera d'ailleurs nombre de détails historiques intéressants. Elle est très sérieusement menée, avec des détails minutieux et un langage plutôt sévère que violent vis-à-vis de l'adversaire, si l'on tient compte des habitudes du temps; mais on s'explique difficilement que Galilée ait cru indispensable de lui donner de tels développements.

Nous le voyons ainsi arrivé à près de cinquante ans sans qu'il eût en réalité dépassé par ses travaux connus un niveau bien inférieur à celui au-dessus duquel devait s'élever sa vieillesse. C'est

---

[1] L'écrit de Capra est dédié à Joachim-Ernest, marquis de Brandebourg, auquel Simon Marius de Guntzhausen dut le présenter.

un éminent professeur de Mathématiques, mais il n'a pas réellement fait de recherches originales; deux inventions pratiques, sa *balancette* et son compas, témoignent hautement des facultés spéciales qui, tout à l'heure, vont lui permettre de renouveler l'Astronomie; mais l'autre face de son génie n'apparaît pas en lui. Il ne s'est pas révélé comme théoricien; il l'est cependant avant toutes choses et il coordonne patiemment les idées qu'il ne publiera que bien plus tard. On dirait qu'au sortir de Pise et au moment d'engager la lutte contre l'enseignement scolastique, il a senti qu'il n'était pas suffisamment armé et qu'il n'avait pas d'autre part conquis une situation personnelle suffisante pour lui donner des chances sérieuses de succès. Il s'est dit qu'il attendrait l'heure opportune et jusque-là il réserve ses forces, sentant bien qu'elles ne font que grandir. PAUL TANNERY.

A. SOMMERFELD. — DIE WILLKÜRLICHEN FUNCTIONEN IN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK. Inaugural-Dissertation. 75 p. Königsberg, 1891.

Dans un Mémoire très remarquable, intitulé : *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen* (¹), M. Weierstrass a fait l'étude d'une intégrale définie qui est, en quelque sorte, une généralisation de l'intégrale de Dirichlet qui joue un rôle prépondérant dans la théorie des séries trigonométriques et a tiré de cette étude de belles conséquences pour la représentation des fonctions uniformes au moyen d'un polynôme entier, avec une approximation donnée et pour la recherche des intégrales des équations aux dérivées partielles de la Physique satisfaisant à des conditions limites données. Voici, en quelques mots, un résumé de ce Mémoire :

Soit $f(x)$ une fonction réelle, continue, bien déterminée pour toutes les valeurs réelles de x et dont la valeur absolue reste inférieure à une limite supérieure et, d'autre part, soit $\psi(x)$ une

(¹) *Sitzungsberichte der königlich Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 9 et 30 juillet 1885. (Une traduction française de ce Mémoire a paru dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Jordan pour l'année 1886.)

fonction de même forme que $f(x)$, *paire,* c'est-à-dire telle que $\psi(-x) = \psi(x)$ et telle, en outre, que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

ait une valeur finie ω. Si l'on pose

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

où u est une variable réelle et k et x des quantités positives, indépendantes de u, la fonction $F(x, k)$ est telle que

$$\lim_{k=0} F(x, k) = f(x).$$

De là on conclut que, à tout nombre positif g', aussi petit qu'on le voudra, on pourra faire correspondre un nombre positif k' tel que pour $a < x < b$, $k < k'$ on ait

$$|\,F(x, k') - f(x)\,| < g'.$$

Si alors on développe $F(x, k')$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et si l'on désigne par $G(x)$ la somme des n premiers termes, on pourra prendre n assez grand pour que, pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b) la différence $F(x, k') - G(x)$ soit, en valeur absolue, plus petite qu'un nombre donné à l'avance g'' et, par suite, pour $a < x < b$ on aura

$$|\,f(x) - G(x)\,| < g' + g''.$$

De ce résultat, M. Weierstrass tire aisément la proposition importante suivante : Toute fonction $f(x)$, de la forme énoncée, peut se représenter, d'une infinité de manières, par une série infinie dont les termes sont des polynômes entiers en x et cette série est *uniformément* convergente pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle donné (a, b).

La première Partie de la Dissertation inaugurale de M. Sommerfeld est une exposition de la proposition fondamentale de M. Weierstrass dans les cas particuliers où l'on prend pour la fonction $\psi(x)$ l'une des deux fonctions e^{-x^2} ou $\frac{1}{1+x^2}$ et où l'on

remplace les limites d'intégration $-\infty$ et $+\infty$ par deux nombres quelconques a et b.

Dans le cas de $\psi(x) = e^{-x^2}$ on a $2\omega = \sqrt{\pi}$; la notation de M. Sommerfeld revient à poser $k = 2\sqrt{t}$, $u = \alpha$ et il faut alors prouver que

$$\lim_{t=0} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_a^b f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha = \pi f(x). \tag{1}$$

Dans le cas de $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $2\omega = \pi$ et, en posant, $k = t$, $u = \alpha$, on a à démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{t=0} \int_a^b f(\alpha) \frac{t}{t^2 + (x-\alpha)^2} d\alpha = \pi f(x). \tag{2}$$

L'auteur, au lieu de considérer immédiatement les intégrales qui figurent dans les premiers membres des égalités (1) et (2), énonce la proposition de M. Weierstrass sous la forme suivante :

Les deux intégrales

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, d\lambda \int_a^b f(\alpha) \cos\lambda(x-\alpha)\, d\alpha$$

et

$$K = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\, d\lambda \int_a^b f(\alpha) \cos\lambda(x-\alpha)\, d\alpha.$$

ont toutes deux pour limite $f(x)$ lorsque t tend vers zéro. Sous cette forme, on voit mieux que l'on obtient ainsi une généralisation de la formule de Fourier qui donne le développement en série trigonométrique d'une fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\alpha) \cos n(x-\alpha)\, d\alpha.$$

Les quantités $e^{-\lambda t}$ et $e^{-\lambda^2 t}$ jouent le rôle de facteur de convergence pour pouvoir passer du signe Σ au signe $\int$.

M. Sommerfeld démontre alors, en premier lieu, qu'on a

$$J = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\pi t} \int_a^b f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha$$

et

$$K = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(\alpha) \frac{t}{t^2 + (x-\alpha)^2} d\alpha$$

Il est alors ramené à prouver les égalités (1) et (2), ce qu'il fait en suivant la marche indiquée par M. Weierstrass. Il partage l'intervalle a, b en trois intervalles $(a, x-\delta)$, $(x-\delta, x+\delta)$ et $(x+\delta, b)$, δ désigne un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Les limites (pour $t=0$) des intégrales relatives au premier et au dernier intervalle sont nulles, il ne reste plus, alors, qu'à prouver que

$$\lim_{t=0} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha = \pi f(x).$$

et

$$\lim_{t=0} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha) \frac{t}{t^2+(x-\alpha)^2} d\alpha = \pi f(x),$$

ce qui se fait aisément en cherchant les limites supérieures et inférieures de ces intégrales et en faisant tendre δ vers zéro.

Après avoir démontré les égalités (1) et (2) lorsque a et b sont finis et, en supposant $f(x)$ continue entre a et b, l'auteur étend les propositions aux cas où a et b sont infinis et où $f(x)$, au lieu d'être continue, est seulement *intégrable* dans l'intervalle (a, b).

Pour terminer la première Partie, M. Sommerfeld donne l'application suivante, qui se trouve, d'ailleurs, dans le Mémoire déjà cité de M. Weierstrass. Considérons la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^2 t}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

où A_n et B_n sont calculés, au moyen de $f(x)$, par la loi connue de Fourier. Fourier admettait que u a pour limite $f(x)$ lorsque t tend vers zéro puisque, si l'on fait $t=0$, on trouve le développement de $f(u)$ en série trigonométrique. Le raisonnement de Fourier supposait donc $f(x)$ développable en série trigonométrique. M. Harnack (¹) a démontré que, *quelle que soit la fonction $f(x)$ intégrable*, on a toujours

$$\lim_{t=0} u = f(x).$$

Ce qui précède permet aisément de démontrer la proposition

(¹) *Schlömilch Zeitschrift*, 1887.

de M. Harnack. On a, en effet, comme on sait, l'identité

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-n^2 t}\cos nv = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\frac{(2\pi n+v)^2}{4t}};$$

on en conclut

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\frac{(x-\alpha+2\pi n)^2}{4t}}.$$

Le second membre de cette dernière formule est une somme d'intégrales de la forme du premier membre de (1) où l'on a remplacé x par $x+2\pi n$. Pour toutes les valeurs de n autres que zéro, la valeur $x+2\pi n$ est extérieure aux limites de l'intégration $-\pi$, $+\pi$ et, par suite, toutes ces intégrales ont pour limite zéro, sauf celle pour laquelle $n=0$: on a donc

$$\lim_{t=0} u = \lim_{t=0} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}} d\alpha;$$

d'où

$$\lim_{t=0} u = f(x).$$

Le second et le troisième Chapitre du travail de M. Sommerfeld sont des extensions aux fonctions à deux et à trois variables des propositions démontrées dans le Chapitre I pour les fonctions à une variable. L'auteur obtient ainsi des généralisations des développements des fonctions à deux et à trois variables en séries de fonctions cylindriques et sphériques. C. Bourlet.

MÉLANGES.

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE LES COURBURES DE DEUX SURFACES INVERSES;

PAR M. ALPHONSE DEMOULIN,
Docteur en Sciences physiques et mathématiques, à Bruxelles.

Soit (Σ) une surface quelconque et (Σ') son inverse par rapport à un pôle O. A tout point A, pris sur (Σ), correspond, sur (Σ'), un point A'. Les normales AN et A'N' aux surfaces (Σ) et (Σ') sont situées dans un même plan et font, avec le rayon OAA', des angles égaux dont nous appellerons u la valeur commune.

Par la droite OAA', menons un plan quelconque qui coupe la surface (Σ) suivant une courbe (Γ) et la surface (Σ') suivant une courbe (Γ'). Soit AT la tangente, en A, à la courbe (Γ) et A'T' la tangente, en A', à la courbe (Γ'). On peut appeler *correspondantes* deux sections normales telles que NAT et N'A'T'.

Dans son Ouvrage, *Des méthodes en Géométrie,* M. Paul Serret a énoncé, sans démonstration (p. 23), la propriété suivante :

Si l'on désigne par R *et* R' *les rayons de courbure de deux sections normales correspondantes* NAT, N'A'T', *on a, quelles que soient les sections considérées autour des points* A *et* A',

$$\frac{OA}{R} + \frac{OA'}{R'} = \text{const.}$$

Nous nous proposons de compléter le théorème de M. Paul Serret en montrant que la *constante* est égale à $2\cos u$.

Observons que les lignes planes (Γ) et (Γ') sont inverses par rapport au pôle O. Si donc nous appelons ρ_0 et ρ'_0 les rayons de courbure de ces lignes aux points A et A', nous aurons, en vertu d'une formule connue, due à M. Nicolaïdès [1],

$$(1) \qquad \frac{OA}{\rho_0} + \frac{OA'}{\rho'_0} = 2\sin OAT.$$

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 144; 1865.

D'autre part, le théorème de Meunier donne

$$\rho_0 = R\cos(\mathrm{OAT}, \mathrm{NAT}),$$
$$\rho'_0 = R'\cos(\mathrm{OA'T'}, \mathrm{N'A'T'}).$$

Substituant dans (1) et observant que

$$\cos(\mathrm{OAT}, \mathrm{NAT}) = \cos(\mathrm{OA'T'}, \mathrm{N'A'T'}),$$

on trouve

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{OA}}{R} - \frac{\mathrm{OA'}}{R'} = 2\sin\mathrm{OAT}\cos(\mathrm{OAT}, \mathrm{NAT}).$$

Décrivons une sphère de centre A et de rayon égal à l'unité. Cette sphère sera percée par les droites AO, AN, AT en des points o, n, t qui seront les sommets d'un triangle sphérique ont. Le côté nt est égal à un quadrant : donc

$$\cos no = \sin ot \cos nto,$$

c'est-à-dire

$$\cos u = \sin\mathrm{OAT}\cos(\mathrm{OAT}, \mathrm{NAT}).$$

L'égalité (2) devient, par suite,

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{OA}}{R} - \frac{\mathrm{OA'}}{R'} = 2\cos u.$$

C'est la relation de M. Paul Serret, complétée comme nous l'avions annoncé. Il est possible de lui donner une forme plus élégante. Soit N la portion de la normale AN qui est comprise entre le point A et le point où cette normale coupe le plan mené, par l'origine O, perpendiculairement au rayon OAA'. Employons une notation analogue pour le point A'. On a

$$\mathrm{OA} = \mathrm{N}\cos u,$$
$$\mathrm{OA'} = \mathrm{N'}\cos u;$$

donc, en substituant dans (3),

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{N}}{R} - \frac{\mathrm{N'}}{R'} = 2.$$

Cette formule montre clairement que, sur deux surfaces inverses, les lignes de courbure se correspondent.

Soient R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de la surface (Σ) au point A et R'_1, R'_2 les rayons de courbure principaux de la sur-

face (Σ') au point A'. On a

$$\frac{N}{R_1} + \frac{N'}{R'_1} = 2,$$
$$\frac{N}{R_2} + \frac{N'}{R'_2} = 2,$$

d'où, par addition,

$$(5) \qquad N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + N'\left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}\right) = 4.$$

Il existe donc une relation entre les courbures moyennes de deux surfaces inverses.

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE DE CAUCHY;

PAR M. W. KAPTEYN.

Dans la séance du 7 juin 1841 de l'Académie des Sciences, Cauchy a présenté une formule générale pour la sommation des intégrales dont les dérivées renferment une ou plusieurs fonctions implicites d'une même variable. Je me propose de faire voir avec quelle facilité se déduisent de cette formule :

1° L'expression du théorème d'Abel [1];

2° L'expression du théorème généralisé d'Abel dont se sont occupés MM. Clebsch [2], Forsyth [3] et Poincaré [4];

3° Quelques cas particuliers du théorème d'Abel.

Rappelons d'abord les notations et la formule de Cauchy.

Soit $f(x, y)$ une fonction des variables x et y, y étant liée à x par une équation

$$(1) \qquad Y(x, y) = Y = 0,$$

dont le premier membre renferme x et y; supposons d'ailleurs

---

(1) *Mémoire sur une propriété générale, etc.* (*Œuvres complètes*).

(2) *Journal de Crelle*, t. 63; 1863.

(3) *Philosophical Transactions*, t. CLXXIV, 1883.

(4) *American Journal of Mathematics*, t. VIII, 1886.

qu'à cette équation on joigne une autre équation de la forme

$$F(x, y, t) = 0, \tag{2}$$

dont le premier membre soit fonction de x, y et de la nouvelle variable t. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les diverses racines de l'équation (1) résolue par rapport à y et par s la somme totale des valeurs de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{x} f(x, y)\, dx,$$

correspondantes non seulement aux diverses valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mais encore, pour chaque valeur de y, aux diverses valeurs de x qui vérifient l'équation (2), en sorte qu'on ait

$$s = \sum \int_{\xi}^{x} f(x, y_1)\, dx + \sum \int_{\xi}^{x} f(x, y_2)\, dx + \ldots + \sum \int_{\xi}^{x} f(x, y_n)\, dx.$$

Dans le premier terme de la valeur de s, le signe Σ se rapporte aux seules valeurs de x qui vérifient l'équation

$$F(x, y_1, t) = 0;$$

dans le second, aux seules valeurs de x qui vérifient l'équation

$$F(x, y_2, t) = 0, \qquad \ldots.$$

tandis que ξ représente toujours la valeur de x correspondante à la valeur $t = \tau$.

Cela posé, Cauchy a établi la formule

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} s = {} & \mathcal{E}((f(x, y_1)))\, l\frac{F(x, y_1, t)}{F(x, y_1, \tau)} + \ldots + \mathcal{E}((f(x, y_n)))\, l\frac{F(x, y_n, t)}{F(x, y_n, \tau)} \\ & - \int_{\tau}^{t} \mathcal{E}((f(x, y_1)\, D_t l\, F(x, y_1, t) + \ldots + f(x, y_n)\, D_t l\, F(x, y_n, t)))\, dt, \end{aligned} \right.$$

ou, en posant, pour abréger

$$f(x, y_1)\, l\, F(x, y_1, t) + \ldots + f(x, y_n)\, l\, F(x, y_n, t) = H(x, t), \tag{4}$$

$$s = \mathcal{E}((H(x, t) - H(x, \tau))) - \int_{\tau}^{t} \mathcal{E}((D_t H(x, t)))\, dt \;[1]. \tag{5}$$

---

(1) Dans le texte des *Œuvres complètes de Cauchy*, 1re série, t. VI, p. 167 et 168, *lisez* $D_t H(x, t)$ *au lieu de* $D_t l H(x, t)$.

pourvu que, dans le premier terme du second membre, on étende l'extraction de résidus indiquée aux seules valeurs de x qui rendent infinies les fonctions

$$f(x, y_1), \quad f(x, y_2), \quad \ldots, \quad f(x, y_n).$$

Lorsque le résidu partiel de la fonction

$$\frac{D_t \prod\left(\frac{1}{x}, t\right)}{x^2},$$

relatif à une valeur nulle de x, se réduit à une constante déterminée, on a

$$\mathcal{E}((D_t \Pi(x, t))) = \mathcal{E} \frac{D_t \prod\left(\frac{1}{x}, t\right)}{((x^2))},$$

et la formule (5) prend la forme

$$(6) \qquad s = \mathcal{E}((\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau))) - \mathcal{E} \frac{\prod\left(\frac{1}{x}, t\right) - \prod\left(\frac{1}{x}, \tau\right)}{((x^2))}.$$

En remplaçant $f(x, y)$ par $f(x, y, z, \ldots)$, $y, z, \ldots$ étant des fonctions de x liées à x par les équations

$$(7) \qquad Y(x, y, z, \ldots) = 0, \qquad Z(x, y, z, \ldots) = 0, \qquad \ldots,$$

et $F(x, y, t) = 0$ par

$$(8) \qquad F(x, y, z, \ldots, t) = 0,$$

la somme s des valeurs de l'intégrale

$$\int_\xi^x f(x, y, z, \ldots)\, dx,$$

correspondantes non seulement aux divers systèmes des valeurs de $y, z, \ldots$ considérées comme fonctions de x, mais aussi aux diverses valeurs que fournira l'équation (8) pour la variable x, considérée comme fonction de t, Cauchy démontre qu'on arrivera à la même formule (6) pourvu que l'on pose

$$(9) \qquad \Pi(x, t) = \Sigma f(x, y, z, \ldots)\, l\, F(x, y, z, \ldots, t),$$

la sommation que le signe Σ indique s'étendant aux divers systèmes de valeurs de $y, z, \ldots$ qui vérifient les équations (7).

1. Pour faire les applications que nous avons en vue, il importe de distinguer trois cas, selon que la dérivée de l'intégrale renferme une, deux ou $r-1$ fonctions implicites d'une même variable.

a. Soient $Y(x,y)=0$ et $F(x,y,t)=0$ des équations algébriques dont les premiers membres représentent des fonctions rationnelles et entières des variables x et y. Supposons d'ailleurs que

$$f(x,y)=\frac{U(x,y)}{f(x)\,Y'(y)},$$

où $U(x,y)$ est une fonction rationnelle et entière de x et y, $f(x)$ une fonction entière de x et $Y'(y)$ la dérivée de la fonction $Y(x,y)$ par rapport à y.

Cela posé, on aura

$$\Pi(x,t)=\frac{U(x,y_1)}{f(x)\,Y'(y_1)}\,l\,F(x,y,t)+\ldots+\frac{U(x,y_n)}{f(x)\,Y'(y_n)}\,l\,F(x,y_n,t).$$

b. Soient $Y(x,y,z)=0$, $Z(x,y,z)=0$ et $F(x,y,z,t)=0$ des équations algébriques dont les premiers membres représentent des fonctions rationnelles et entières des variables x, y et z. Supposons d'ailleurs que $Y=0$ et $Z=0$ admettent μ systèmes de valeurs

$$y_1 z_1,\quad y_2 z_2,\quad \ldots,\quad y_\mu z_\mu$$

et que

$$f(x,y,z)=\frac{U(x,y,z)}{f(x)\left(\dfrac{dY}{dy}\dfrac{dZ}{dz}-\dfrac{dY}{dz}\dfrac{dZ}{dy}\right)}=\frac{U(x,y,z)}{f(x)\,J\left(\dfrac{YZ}{yz}\right)},$$

où $U(x,y,z)$ est une fonction rationnelle de x, y, z et $f(x)$ une fonction entière de x.

Dans ce cas, la fonction $\Pi(x,t)$ prend la forme

$$\Pi(x,t)=\frac{U(x,y_1,z_1)}{f(x)\,J\left(\dfrac{YZ}{y_1 z_1}\right)}\,l\,F(x,y_1,z_1,t)+\ldots$$
$$+\frac{U(x,y_\mu,z_\mu)}{f(x)\,J\left(\dfrac{YZ}{y_\mu z_\mu}\right)}\,l\,F(x,y_\mu,z_\mu,t).$$

c. Soient $F_1(x_1,x_2,\ldots,x_r)=0$, $F_2(x_1,x_2,\ldots,x_r)=0$, ...,

$F_{r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ et $F_r(x_1, x_2, \ldots, x_r, t) = 0$ des équations algébriques dont les premiers membres représentent des fonctions rationnelles et entières des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Supposons d'ailleurs que les équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_{r-1} = 0$ admettent μ systèmes de valeurs

$$x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}; \quad x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}; \quad \ldots, \quad x_2^{(\mu)}, x_3^{(\mu)}, \ldots, x_r^{(\mu)};$$

et que

$$f(x, y, z, \ldots) = \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{f(x_1)\,J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2, x_3, \ldots, x_r}\right)}.$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \Pi(x, t) = {} & \frac{U(x_1, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)})}{f(x_1)\,J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}}\right)}\, l\, F_r(x_1, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, t) + \ldots \\ & + \frac{U(x_1, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_r^{(\mu)})}{f(x_1)\,J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2^{(\mu)}, x_3^{(\mu)}, \ldots, x_r^{(\mu)}}\right)}\, l\, F_r(x_1, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_r^{(\mu)}, t). \end{aligned}$$

2. Pour déterminer dans ces trois cas

$$\mathcal{E}((\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau))),$$

il faut remarquer que l'extraction des résidus se rapporte aux seules valeurs de x qui rendent $+$ zéro les fonctions renfermées dans les dénominateurs de la fonction

$$\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau).$$

Or ces dénominateurs possèdent dans les trois cas distingués un facteur $f(x)$ et un autre facteur. En considérant ce dernier, nous allons démontrer que les valeurs de x qui rendent — zéro ce facteur ne sauraient rendre infinie la fonction correspondante $\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau)$, de sorte que cette fonction ne possède d'autres résidus que ceux qui correspondent aux racines de l'équation $f(x) = 0$.

a. Théorème. — *Lorsque dans un point $x = a$, l'équation $Y(x, y) = 0$ admet p racines égales, la somme des p valeurs infinies de la fonction $\frac{1}{Y'(y)}$ dans ce point a une valeur constante.*

Supposons que, pour $x = a$, l'équation $Y = 0$ admet les racines égales $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et les racines inégales $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n$, et remarquons que d'après un théorème connu on a, n étant plus grand que l'unité,

$$\frac{1}{Y'(y_1)} + \frac{1}{Y'(y_2)} + \ldots + \frac{1}{Y'(y_n)} = 0.$$

En substituant dans cette formule, qui aura lieu quelle que soit la valeur de x, la valeur $x = a$, on obtient

$$\frac{1}{Y'(y_1)_a} + \frac{1}{Y'(y_2)_a} + \ldots + \frac{1}{Y'(y_p)_a} = -\frac{1}{Y'(y_{p+1})_a} - \ldots - \frac{1}{Y'(y_n)_a}.$$

Or, dans le second membre, les dénominateurs ayant des valeurs différentes de zéro, la somme des valeurs infinies du premier membre a une valeur constante. D'après ce théorème, en posant pour $x = a, y_1 = y_2 = \ldots = y_p = b$ la fonction $H(a, t) - H(a, \tau)$ se réduit à la valeur constante

$$\frac{U(a, b)}{f(a)} l \frac{F(a, b, t)}{F(a, b, \tau)} \left(\frac{1}{Y'(y_1)_a} + \ldots + \frac{1}{Y'(y_p)_a}\right)$$
$$+ \frac{U(a, y_{p+1})}{f(a)\,Y'(y_{p+1})_a} l \frac{F(a, y_{p+1}, t)}{F(a, y_{p+1}, \tau)} + \ldots + \frac{U(a, y_n)}{f(a)\,Y'(y_n)_a} l \frac{F(a, y_n, t)}{F(a, y_n, \tau)}.$$

Dans ce premier cas, on aura donc

$$\mathcal{E}((H(x, t) - H(x, \tau))) = \mathcal{E} \frac{1}{((f(x)))} \sum \frac{U(x, y)}{Y'(y)} l \frac{F(x, y, t)}{F(x, y, \tau)},$$

si l'on désigne par $\sum \frac{U(x, y)}{Y'(y)} l \frac{F(x, y, t)}{F(x, y, \tau)}$ la somme

$$\frac{U(x, y_1)}{Y'(y_1)} l \frac{F(x, y_1, t)}{F(x, y_1, \tau)} + \ldots + \frac{U(x, y_n)}{Y'(y_n)} l \frac{F(x, y_n, t)}{F(x, y_n, \tau)}.$$

b. Théorème. — *Lorsque dans un point $x = a$ les équations $Y(x, y, z) = 0$ et $Z(x, y, z) = 0$ admettent p systèmes de solutions $y_1, z_1; y_2, z_2; \ldots; y_p, z_p$ qui se confondent, la somme des p valeurs infinies de la fonction*

$$\frac{1}{\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz} - \frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dy}} = \frac{1}{J\left(\frac{YZ}{yz}\right)}$$

dans ce point a une valeur constante.

En effet, le nombre total des systèmes de solutions étant μ, on

a, d'après un théorème de Jacobi (¹), μ étant plus grand que l'unité,

$$\frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_1 z_1}\right)} + \frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_2 z_2}\right)} + \ldots + \frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_\mu z_\mu}\right)} = 0.$$

En substituant dans cette formule, qui aura lieu pour toute valeur de x, la valeur $x = a$ avec laquelle correspondent les p systèmes identiques $y_1, z_1; y_2, z_2; \ldots; y_p, z_p$, on obtient l'équation

$$\frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_1 z_1}\right)_a} + \frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_2 z_2}\right)_a} + \ldots + \frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_p z_p}\right)_a}$$
$$= -\frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_{p+1} z_{p+1}}\right)_a} - \ldots - \frac{1}{J\left(\dfrac{YZ}{y_\mu z_\mu}\right)_a},$$

dont le second membre a une valeur constante.

En raisonnant comme précédemment, on voit qu'on a de même dans ce second cas

$$\mathcal{E}((\mathrm{H}(x, t) - \mathrm{H}(x, \tau))) = \mathcal{E}\frac{1}{((f(x)))}\sum \frac{U(x, y, z)}{J\left(\dfrac{YZ}{yz}\right)}\, l\frac{F(x, y, z, t)}{F(x, y, z, \tau)},$$

où la somme s'étend à tous les μ systèmes de valeurs y, z.

c. Théorème. — *Lorsque dans un point $x_1 = a$ les équations*

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, \ldots, x_r), \quad \ldots, \quad F_{r-1}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

admettent p systèmes de solutions $x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}; x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}; x_2^{(p)}, x_3^{(p)}, \ldots, x_r^{(p)}$ qui se confondent, la somme des p valeurs infinies de la fonction

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dF_1}{dx_2} & \dfrac{dF_1}{dx_3} & \ldots & \dfrac{dF_1}{dx_r} \\ \dfrac{dF_2}{dx_2} & \dfrac{dF_2}{dx_3} & \ldots & \dfrac{dF_2}{dx_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{dF_{r-1}}{dx_2} & \dfrac{dF_{r-1}}{dx_3} & \ldots & \dfrac{dF_{r-1}}{dx_r} \end{vmatrix} = J\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2, x_3, \ldots, x_r}\right)$$

dans ce point a une valeur constante.

(¹) *Journal de Crelle*, t. 14.

D'après le même théorème de Jacobi, étendu par Clebsch ([1]), on a, μ étant le nombre total des solutions, ce nombre étant plus grand que l'unité,

$$\frac{1}{J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}}\right)} + \frac{1}{J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}}\right)} + \ldots + \frac{1}{J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2^{(\mu)}, x_3^{(\mu)}, \ldots, x_r^{(\mu)}}\right)} = 0.$$

De cette formule on tire comme précédemment le théorème proposé qui nous permet d'écrire

$$\mathcal{E}\,((\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau)))$$
$$= \mathcal{E}\,\frac{1}{((f(x_1)))} \sum \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{J\left(\dfrac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2, x_3, \ldots, x_r}\right)}\, l\, \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_r, t)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_r, \tau)}.$$

3. Évaluons maintenant le résidu intégral

$$\int_\tau^t \mathcal{E}\,((D_t\,\Pi(x, t)))\,dt$$

du dernier membre de l'équation (5). Dans les trois cas, la fonction $D_t\,\Pi(x, t)$, qui est fonction symétrique des racines d'une ou de plusieurs équations algébriques, peut être considérée comme une fonction rationnelle de x. Or, pour toute fonction rationnelle $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ le résidu partiel de la fonction $\dfrac{f_1\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 f_2\left(\frac{1}{x}\right)}$ relatif à la valeur nulle de x se réduisant à une constante déterminée, on aura dans tous les cas

$$\int_\tau^t \mathcal{E}\,((D_t\,\Pi(x, t)))\,dt = \mathcal{E}\,\frac{\Pi\left(\frac{1}{x}, t\right) - \Pi\left(\frac{1}{x}, \tau\right)}{((x^2))}.$$

Pour donner encore une autre forme au dernier membre de cette équation, je suppose que la fonction $\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau)$,

([1]) *Journal de Crelle*, t. 63.

développée suivant les puissances descendantes de x, donne lieu à l'équation

$$\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau) = \ldots = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + \frac{A_{-1}}{x} + \ldots.$$

En représentant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans ce développement par

$$C_{\frac{1}{x}}[\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau)],$$

il est évident qu'on a

$$\mathcal{E}\frac{\Pi\left(\frac{1}{x}, t\right) - \Pi\left(\frac{1}{x}, \tau\right)}{((x^2))} = C_{\frac{1}{x}}[\Pi(x, t) - \Pi(x, \tau)].$$

4. Introduisons maintenant, en suivant M. Boole [1], un nouveau signe, défini par l'équation

$$\Theta\left[\frac{1}{f(x)}\right]\varphi(x) = \mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{((f(x)))} - C_{\frac{1}{x}}\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right],$$

alors les résultats que nous avons obtenus précédemment peuvent se résumer de la manière suivante

$$\sum\int_{\xi}^{x}\frac{U(u, y)\,dx}{f(x)\frac{dY}{dy}} = \Theta\left[\frac{1}{f(x)}\right]\sum_{1}^{n}\frac{U(x, y)}{\frac{dY}{dy}}\, l\frac{F(x, y, t)}{F(x, y, \tau)}$$

$$\sum\int_{\xi}^{x}\frac{U(x, y, z)\,dx}{f(x)\,J\left(\frac{YZ}{yz}\right)} = \Theta\left[\frac{1}{f(x)}\right]\sum_{1}^{\mu}\frac{U(x, y, z)}{J\left(\frac{YZ}{yz}\right)}\, l\frac{F(x, y, z, t)}{F(x, y, z, \tau)},$$

$$\sum\int_{\xi_1}^{x_1}\frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_r)\,dx_1}{f(x_1)\,J\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2, x_3, \ldots, x_r}\right)}$$

$$= \Theta\left[\frac{1}{f(x_1)}\right]\sum_{1}^{\mu}\frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{J\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}}{x_2, x_3, \ldots, x_r}\right)}\, l\frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_r, t)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_r, \tau)}.$$

La première de ces formules s'accorde avec l'expression du théorème d'Abel par M. Rowe [2] et les deux autres avec les ex-

[1] *Philosophical Transactions*, p. 751; 1857.

[2] *Ibid.*, p. 721; 1881.

pressions du théorème généralisé qui ont été données par M. Forsyth.

5. Pour faire voir que la première de ces équations s'accorde aussi avec la formule que Abel lui-même a donnée, posons comme lui

$$f(x) = \mathrm{A}(x-\beta_1)^{m_1}(x-\beta_2)^{m_2}\ldots(x-\beta_\alpha)^{m_\alpha}.$$

et calculons le résidu de la fonction

$$\frac{1}{f(x)}\sum\frac{\mathrm{U}(x,y)}{\dfrac{d\mathrm{Y}}{dy}}\,l\,\frac{\mathrm{F}(x,y,t)}{\mathrm{F}(x,y,\tau)},$$

pour une racine quelconque $x=\beta$ de l'équation

$$f(x) = 0.$$

En multipliant cette fonction par $(x-\beta)^m$, le produit obtient pour $x=\beta$ une valeur différente de zéro. Soit, pour abréger,

$$\frac{(x-\beta)^m}{f(x)}\sum\frac{\mathrm{U}(x,y)}{\dfrac{d\mathrm{Y}}{dy}}\,l\,\frac{\mathrm{F}(x,y,t)}{\mathrm{F}(x,y,\tau)} = \psi(x),$$

$\psi(\beta)$ sera une quantité finie et l'on aura

$$\psi(x) = \psi(\beta) + (x-\beta)\,\psi'(\beta) + \ldots + \frac{(x-\beta)^{m-1}}{(m-1)!}\,\psi^{(m-1)}(\beta) + \ldots.$$

Or, lorsque x s'approche indéfiniment de la valeur β, $\psi(x)$ tend vers la valeur

$$\psi(\beta) = \frac{m!}{f^{(m)}(\beta)}\sum\frac{\mathrm{U}(\beta,\mathrm{B})}{\mathrm{Y}'(\mathrm{B})}\,l\,\frac{\mathrm{F}(\beta,\mathrm{B},t)}{\mathrm{F}(\beta,\mathrm{B},\tau)},$$

où B représente la valeur de y pour $x=\beta$.

Donc le résidu cherché, relatif à la valeur β, sera

$$m\,\frac{d^{m-1}}{d\beta^{m-1}}\left[\frac{1}{f^{(m)}(\beta)}\sum\frac{\mathrm{U}(\beta,\mathrm{B})}{\mathrm{Y}'(\mathrm{B})}\,l\,\frac{\mathrm{F}(\beta,\mathrm{B},t)}{\mathrm{F}(\beta,\mathrm{B},\tau)}\right].$$

En représentant par Σ' une sommation par rapport aux racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\alpha$, on obtient la formule

$$\begin{aligned}\sum\int_\xi^x\frac{\mathrm{U}(x,y)\,dx}{f(x)\,\mathrm{Y}'(y)} = -\,\underset{x}{\mathrm{C}_1}&\left[\frac{\mathrm{U}(x,y)}{f(x)\,\mathrm{Y}'(y)}\,l\,\frac{\mathrm{F}(x,y,t)}{\mathrm{F}(x,y,\tau)}\right]\\ &+\sum{}'\,m\,\frac{d^{m-1}}{d\beta^{m-1}}\left[\frac{1}{f^{(m)}(\beta)}\sum\frac{\mathrm{U}(\beta,\mathrm{B})}{\mathrm{Y}'(\mathrm{B})}\,l\,\frac{\mathrm{F}(\beta,\mathrm{B},t)}{\mathrm{F}(\beta,\mathrm{B},\tau)}\right].\end{aligned}$$

dans laquelle on reconnaîtra aisément la formule (43) du Mémoire déjà cité d'Abel.

6. Considérons encore un cas important de la formule de Cauchy.

En admettant que l'équation $Y(x, y) = 0$ soit de degré n par rapport à y et de même degré par rapport à x, il est évident qu'en posant $x = \frac{1}{x'}$ les n racines seront toutes, dans le voisinage de $x' = 0$, infiniment grandes comme

$$\frac{k_1}{x'}, \quad \frac{k_2}{x'}, \quad \ldots, \quad \frac{k_n}{x'},$$

les quantités k étant des constantes.

Supposons maintenant qu'on veuille déterminer la somme

$$s = \sum \int_\xi^x \frac{V(x, y)}{W(x, y)}\, dx,$$

où $V(x, y)$ et $W(x, y)$ désignent des fonctions rationnelles et entières des variables, de degré ν et ϖ respectivement, et considérons le second terme du dernier membre de l'équation (6). La fonction $\mathrm{H}(x, t) - \mathrm{H}(x, \tau)$ étant dans ce cas

$$\frac{V(x, y_1)}{W(x, y_1)}\, l\, \frac{F(x, y_1, t)}{F(x, y_1, \tau)} + \ldots + \frac{V(x, y_n)}{W(x, y_n)}\, l\, \frac{F(x, y_n, t)}{F(x, y_n, \tau)},$$

on voit aisément que la fonction

$$\frac{\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{x'}, t\right) - \mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{x'}, \tau\right)}{x'^2},$$

dans le voisinage de $x' = 0$, sera infiniment petite comme

$$C x'^{\varpi - \nu - 2},$$

C étant une constante. Il en résulte que pour

$$\nu \leqq \varpi - 2,$$

on aura toujours

$$\mathcal{E} \frac{\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{x'}, t\right) - \mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{x'}, \tau\right)}{((x'^2))} = 0.$$

et par suite simplement

$$s = \int (H(x, t) - H(x, \tau)).$$

7. Pour faire une application de cette formule simplifiée, posons

$$F(x, y, t) = \frac{\varphi(x, y) + t\,\psi(x, y)}{1 + t},$$

où $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$ représentent deux courbes du même degré m, et calculons les valeurs des sommes suivantes

$$s_1 = \sum \int_{\xi}^{x} \frac{Q(x, y)}{\frac{dY}{dy}}\, dx,$$

$$s_2 = \sum \int_{\xi}^{x} \frac{H(x, y)}{|\alpha\alpha| \frac{dY}{dy}}\, dx,$$

$$s_3 = \sum \int_{\xi}^{x} \frac{G(x, y)}{|\alpha\beta| \frac{dY}{dy}}\, dx,$$

les sommations que le signe Σ indique s'étendant sur tous les points d'intersection de la courbe $Y = 0$ avec les courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

Dans les intégrales précédentes $Q(x, y)$, $H(x, y)$, $G(x, y)$, $|\alpha\alpha|$ et $|\alpha\beta|$ représentant des fonctions rationnelles et entières de degrés $n - 3$, $n - 2$, $n - 2$, 1 et 1 respectivement, la condition

$$v = w - 2$$

est remplie dans tous les cas.

Dans la seconde somme, nous avons mis $|\alpha\alpha|$ au lieu de

$$(x - \alpha_1)\left(\frac{dY}{dx}\right)_{\alpha_1 \alpha_2} + (y - \alpha_2)\left(\frac{dY}{dy}\right)_{\alpha_1 \alpha_2},$$

c'est-à-dire que $[\alpha\alpha] = 0$ représentera la tangente à la courbe $Y = 0$ au point $\alpha_1 \alpha_2$. D'ailleurs nous assujettirons la courbe $H = 0$ à passer par les $n - 2$ points où cette tangente coupe la courbe $Y = 0$ et nous admettrons que les coefficients de $H(x, y)$

soient tels que la fonction

$$\frac{H(x, y)}{[\alpha\alpha]\dfrac{dY}{dy}}$$

devienne infini dans le point $\alpha_1\alpha_2$ comme $-\dfrac{1}{(x-\alpha_1)^2}$.

Quant à la troisième somme, nous ferons des suppositions analogues. Le polynôme $[\alpha\beta]$ représentera le premier membre de l'équation d'une droite passant par les deux points $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$; la courbe $G=0$ passera par tous les points où la droite $[\alpha\beta]=0$ coupe la courbe $Y=0$, excepté les deux points $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$ et les coefficients du polynôme G seront tels que la fonction

$$\frac{G(x, y)}{[\alpha\beta]\dfrac{dY}{dy}}$$

devienne infini dans le point $\alpha_1\alpha_2$ comme $-\dfrac{1}{x-\alpha_1}$ et dans le point $\beta_1\beta_2$ comme $\dfrac{1}{x-\beta_1}$.

Considérons maintenant les trois sommes s_1, s_2, s_3.

$$\mathcal{E}((\mathrm{H}(x, \infty)-\mathrm{H}(x, 0)))$$
$$=\mathcal{E}\left(\left(\frac{Q(x, y_1)}{Y'(y_1)}\right)\right) l\frac{\psi(x, y_1)}{\varphi(x, y_1)}+\ldots+\mathcal{E}\left(\left(\frac{Q(x, y_n)}{Y'(y_n)}\right)\right) l\frac{\psi(x, y_n)}{\varphi(x, y_n)}$$

$$\mathcal{E}((\mathrm{H}(x, \infty)-\mathrm{H}(x, 0)))$$
$$=\mathcal{E}\left(\left(\frac{H(x, y_1)}{[\alpha\alpha]_1 Y'(y_1)}\right)\right) l\frac{\psi(x, y_1)}{\varphi(x, y_1)}+\ldots+\mathcal{E}\left(\left(\frac{H(x, y_n)}{[\alpha\alpha]_n Y'(y_n)}\right)\right) l\frac{\psi(x, y_n)}{\varphi(x, y_n)},$$

$$\mathcal{E}((\mathrm{H}(x, \infty)-\mathrm{H}(x, 0)))$$
$$=\mathcal{E}\left(\left(\frac{G(x, y_1)}{[\alpha\beta]_1 Y'(y_1)}\right)\right) l\frac{\psi(x, y_1)}{\varphi(x, y_1)}+\ldots+\mathcal{E}\left(\left(\frac{G(x, y_n)}{[\alpha\beta]_n Y'(y_n)}\right)\right) l\frac{\psi(x, y_n)}{\varphi(x, y_n)},$$

où les résidus s'étendent aux seules valeurs de x qui rendent zéro les fonctions $Y'(y)$, $[\alpha\alpha]$ et $[\alpha\beta]$. Or la somme des résidus correspondants aux valeurs de x qui rendent zéro les fonctions $Y'(y)$, s'évanouit; par suite, on obtient

$$s_1 = 0,$$
$$s_2 = \mathcal{E}\frac{H(x, y_1)}{[\alpha\alpha]_1 Y'(y_1)} l\frac{\psi(x, y_1)}{\varphi(x, y_1)},$$
$$s_3 = \mathcal{E}\frac{G(x, y_1)}{[\alpha\beta]_1 Y'(y_1)} l\frac{\psi(x, y_1)}{\varphi(x, y_1)}+\mathcal{E}\frac{G(x, y_2)}{[\alpha\beta]_2 Y'(y_2)} l\frac{\psi(x, y_2)}{\varphi(x, y_2)},$$

le seul résidu dans la somme s_2 se rapportant au point $\alpha_1\alpha_2$, les deux résidus dans la somme s_3 aux deux points $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$.

En posant

$$x = \alpha_1 + x', \qquad y = \alpha_2 + y',$$

on sait que la fonction

$$\frac{\mathrm{H}(x, y_1)}{[\alpha\alpha]_1 \, \mathrm{Y}'(y_1)} = -\frac{1}{x'^2},$$

dans le voisinage du point $\alpha_1\alpha_2$. Il faut donc, pour calculer le résidu dans la somme s_2, développer

$$\log\frac{\psi(\alpha_1 + x', \alpha_2 + y')}{\varphi(\alpha_1 + x', \alpha_2 + y')} = l\,\frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2) + x'\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{\alpha_1\alpha_2} + y'\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{\alpha_1\alpha_2}}{\varphi(\alpha_1, \alpha_2) + x'\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{\alpha_1\alpha_2} + y'\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{\alpha_1\alpha_2}},$$

où

$$y' = -\frac{\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right)_{\alpha_1\alpha_2}}{\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right)_{\alpha_1\alpha_2}}\,x',$$

suivant les puissances ascendantes de x'.

En désignant, pour abréger, par k_1 et k_2 les quantités

$$k_1 = \left(\frac{\frac{d\psi}{dx} + \frac{y'}{x'}\frac{d\psi}{dy}}{\psi}\right)_{\alpha_1\alpha_2} = \left(\frac{dl\,\psi}{dx} + \frac{dl\,\psi}{dy}\frac{dy}{dx}\right)_{\alpha_1\alpha_2},$$

$$k_2 = \left(\frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{y'}{x'}\frac{d\varphi}{dy}}{\varphi}\right)_{\alpha_1\alpha_2} = \left(\frac{dl\,\varphi}{dx} + \frac{dl\,\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right)_{\alpha_1\alpha_2},$$

on obtient

$$l\,\frac{\psi(\alpha_1 + x', \alpha_2 + y')}{\varphi(\alpha_1 + x', \alpha_2 + y')} = l\,\frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)}{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)} + l\,\frac{1 + k_1 x'}{1 + k_2 x'}$$
$$= l\,\frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)}{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)} + (k_1 - k_2)x' \ldots,$$

et l'on trouve pour le résidu cherché

$$s_2 = k_2 - k_1 = \left(\frac{d}{dx}\,l\,\frac{\varphi}{\psi} + \frac{d}{dy}\,l\,\frac{\varphi}{\psi}\,\frac{dy}{dx}\right)_{\alpha_1\alpha_2}.$$

Les résidus de la somme s_3 s'obtiennent plus facilement. En effet, d'après les hypothèses admises, dans le voisinage des points $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$ on a, en posant d'abord $x = \alpha_1 + x'$ et ensuite

$x = \beta_1 + x'$,

$$\frac{G(x, y_1)}{[\alpha\beta]_1 Y'(y_1)} = -\frac{1}{x'} \quad \text{et} \quad \frac{G(x, y_2)}{[\alpha\beta]_2 Y'(y_2)} = \frac{1}{x'};$$

par suite

$$s_3 = -l\frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)}{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)} + l\frac{\psi(\beta_1, \beta_2)}{\varphi(\beta_1, \beta_2)},$$

ou

$$s_3 = l\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\alpha_1\alpha_2} - \log\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\beta_1\beta_2}.$$

En comparant les résultats précédents avec ceux de MM. Clebsch et Gordan (¹), on remarquera qu'ils sont beaucoup plus généraux, quoiqu'ils présentent les mêmes formes. En effet, les sommes considérées s_1, s_2, s_3 se transformeront en sommes d'intégrales de première espèce, d'intégrales normales de seconde et de troisième espèce si l'on ajoute aux hypothèses que nous avons admises l'hypothèse que les courbes $Q(x, y) = 0$, $H(x, y) = 0$ et $G(x, y) = 0$ passent par tous les points multiples de la courbe $Y = 0$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Salmon (G.). — *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions.* Traduit de l'anglais par O. Chemin. 2e Partie : *Théorie des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Famille de surfaces.* In-8°, x-297 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 6 fr.

Schroder (E.). — *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (exakte Logik). 2. Bd., 1. Abthg. gr.-8°, XIII-400 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. 12 M.

Bobek (K.-J.). — *Lehrbuch der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Bearb. nach System Kleyer. Gr. in-8°, VII-176 S. m. 17 Fig. Stuttgard, Maier. 5 M.

Hagen (J.-G.). — *Synopsis der höheren Mathematik.* 1. Bd. *Arithmetische u. algebraische Analyse.* Imp. in-4°, VIII-398 S. Berlin, Dames. 30 M.

Laurent (H.). — *Traité d'Analyse,* t. VII et dernier : *Calcul intégral*

(¹) *Theorie der Abelschen Functionen*, p. 47, sqq.

(*applications géométriques de la théorie des équations différentielles*). In-8°, 346 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 8 fr. 50 c.

MOLENBROCH (P.). — *Theorie der Quaternionen*. 8°, XII-284 S. Leiden, Brill. 7 M.

D'OCAGNE (M.). — *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques : essai d'une théorie générale, règles pratiques, exemples d'application*. In-8°, 96 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

PICK (G.). — *Ueber das System der covarienten Strahlencomplexe zweier Flächen 2. Ordnung* (Sonderdr.) Lex.-8°, 13 S. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

WEYR (E.). — *Ueber Involutionen höheren Grades auf nicht rationalen Trägern* (Sonderdr.) Lex.-8°, 18 S. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

APPELL (P.). — *Sur une fonction analogue à la fonction* Θ. In-4°, 6 p. Marseille, impr. Barlatier et Barthelet.

MÉRAY (CH.). — *Théorie analytique du logarithme népérien et de la fonction exponentielle*. In-4°, 40 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 1 fr. 50 c.

DUHEM (P.). — *Cours de Physique mathématique et de Cristallographie*. T. I : *Théorèmes généraux ; Corps fluides*. In-4°, VI-382 p. avec fig. Paris, Hermann.

JAMET (V.). — *Sur un théorème de Statique*. In-4°, 8 p. avec fig. Marseille, impr. Barlatier et Barthelet.

JAMIN (J.) et BOUTY. — *Cours de Physique de l'École Polytechnique. Tables générales par ordre de matières et par noms d'auteurs des quatre Volumes de la 4e édition*. In-8° à 2 col. Paris, Gauthier-Villars et fils, 0 fr. 60.

KIRCHHOFF (G.). *Vorlesungen über mathematische Physik*. 3. Bd. *Elektricität und Magnetismus*. Herausgegeben von M. Planck. Grand in-8°, X-228 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. 8 M.

POINCARÉ (H.). — *Electricität und Optik*. Vorlesungen redigirt von J. Blondin. Autoris. deutsche Ausgabe von W. Jaeger u. E. Gumlich. 1. Bd *Die Theorien von Maxwell und die elektromagnetische Licht-Theorie*. Gr. in-8°, VIII-248 S. Berlin, Springer. 8 M.

CANTOR (M.). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 2. Bd. von 1200-1668. 1. Thl. Gr. in-8°, 499 S. Leipzig, Teubner. 14 M.

CELS (JULES). — *Sur les équations différentielles linéaires ordinaires*. In-4°, 80 p. Paris, Gauthier-Villars.

DEMARTRES. — *Cours d'Analyse professé à la Faculté des Sciences de Lille en* 1890-91. 1re Partie : *Fonctions de variables réelles*. In-4°, II-196 p., autographié. Paris, Hermann.

Duhamel. — *Éléments de Calcul infinitésimal.* 3e et 4e éditions, revues et annotées par J. Bertrand, t. II. In-8°, xv-537 p. et une planche. Paris, Gauthier-Villars. T. I et II, 15 fr.

Gournerie (J. de la). — *Traité de Géométrie descriptive.* 3e édition, revue et augmentée de la Théorie de l'intersection de deux polyèdres; par *E. Lebon*, 1re Partie (texte). In-4°, xxi-158 p. et atlas de 55 planches. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Mansion (M.-P.). — *Theorie der partiellen Differentialgleichungen* 1. *Ordnung.* Vom Verfasser durchgesehene und vermehrte deutsche Ausgabe. Mit Anhängen von S. v. Kowalewsky, Imschenetsky und Darboux. Herausgeg. von H. Maser. Gr. in-8°, xxi-489 S. Berlin, Springer. 12 M.

Sarrau (E.). — *Notions sur la théorie des quaternions.* In-8°, 46 p. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 75 c.

Serret (J.-A.). — *Cours de Calcul différentiel et intégral.* 3e édit.; t. II : *Calcul intégral.* In-8°, xii-734 p. Paris, Gauthier-Villars, t. I et II. 24 fr.

Tables des logarithmes à huit décimales des nombres de 1 *à* 125 000 *et des fonctions goniométriques sinus, cosinus et cotangente de centimilligone en centimilligone et de microgone en microgone pour les* 25 000 *premiers microgones et avec sept décimales pour tous les autres microgones;* par J. de Mendizabal Tamborrel. Gr. in-4°, x-309 p. Paris, Hermann.

Thiry (Cl.). — *Applications remarquables du théorème de Steward et théorie du barycentre.* In-8°, 94 p. avec figures. Gand, Hoste. 2 fr.

Duhem (P.). — *Cours de Physique mathématique et de Cristallographie. Hydrodynamique; Élasticité; Acoustique.* T. II : *Les fils et les membranes; les Corps élastiques, l'Acoustique.* In-4°, iv-314 p. Paris, Hermann, autographié.

Sarrau (E.). — *Notions sur la théorie de l'élasticité.* In-8°, 55 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 50 c.

Duhem (P.). — *Leçons sur l'électricité et sur le magnétisme.* T. II : *Les aimants et les corps diélectriques.* In-8°, 484 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 14 fr.

Nivellement de précision de la Suisse exécuté par la Commission géodésique fédérale sous la direction de A. Hirsch et E. Plantamour. 10e livr. IIe vol. Catalogue des hauteurs suisses. G. in-4°, 123 p. avec Carte en couleurs. Bâle, Georg. 2 M. 50 Pf.

Robert (G.). — *Méthode d'intégration directe.* In-8°, 35 p. Paris, Gauthier-Villars.

MAXWELL (J.-C.). — *Theory of Heat.* 10 edit with corrections and additions by Lord Rayleigh. In-12, 358 p. London, Longmans. 4 sh. 6 d.

LUCAS (F.). — *Traité pratique d'électricité à l'usage des ingénieurs et des constructeurs. Théorie mécanique du magnétisme et de l'électricité; Mesures électriques; Piles, accumulateurs et machines électrostatiques. Machines dynamo-électriques génératrices. Transport, distribution et transformation de l'énergie électrique; Utilisation de l'énergie électrique.* Gr. in-8°, VIII-595 p. avec 278 fig. Paris, Baudry et Cie.

BURKHARDT (H.). — *Bernhard Riemann Vortrag.* Gr. in-8°. 12 S. Göttingen, Vandenhöck et Ruprecht. 40 Pf.

DINI (U.). — *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse,* deutsch bearb. von J. Lüroth u. A. Schepp, gr. in-8°, XVIII-554 S. Leipzig, Teubner. 12 M.

POINCARÉ (H.). — *Cours de Physique mathématique. Thermodynamique.* Gr. in-8°, XX-432 p. avec figures. Paris, Carré.

GONNESSIAT (F.). — *Sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passage.* In-8°, 23 p. Lyon, impr. Plan.

MOUCHOT (A.). — *Les nouvelles bases de la Géométrie supérieure (Géométrie de position).* In-8°, VII-180 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 5 fr.

GIBBS (J.-W.). — *Thermodynamische Studien.* Unter Mitwirkung des Verf. aus dem englischen übersetzt von W. Ostwald. Gr. in-8°, XIV-409 S. mit 39 Fig. Leipzig, Engelmann. 14 M.

TUMLIRZ (O.). — *Théorie électromagnétique de la lumière.* Traduit de l'allemand par G. van der Mensbrugghe. In-8°, XVI-157 p. Paris, Hermann.

DEDEKIND (R.). — *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* 2. Aufl. Gr. in-8°, VII, 24 S. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 1 M.

GALILEI (G.). — *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und kopernikanische.* Aus dem italienischen übersetzt und erläutert von F. Strauss. Gr. in-8°, LXXIX-586 S. Leipzig, Teubner. 16 M.

SCHAPIRA (H.). — *Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen.* 1. Bd., 2. Thl., 1. Heft. Gr. in-8°, VIII-224 S. Leipzig, Teubner. 6 M.

GOULIER (C.-M.). — *Études théoriques et pratiques sur les levers topométriques et en particulier sur la tachéométrie.* In-8°, XXII-542 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 8 fr.

HEUN (K.). — *Untersuchungen über die Gauss'sche Quadraturmethode.* In-4°, 19 S. Berlin, Gaertner. 1 M.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Enthaltend die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie und physikal. Erdkunde. Herausgeg. von H.-J. Klein. II. Jahrg. 1891. Gr. in-8°, XI, 400 S. m. 5 Taf. in Lichtdr. u. Lithogr. u. 1 in Farbendruck. Leipzig, Mayer. Cart. 7 M.

PANZERBIETER (W.). — *Über einige Lösungen des Trisektionsproblems mittelst fester Kegelschnitte.* 4°, 25 S. m. 2 Taf. Berlin, Gaertner. 1 M.

ROSENOW (H.). — *Die Normalformen für die 472 verschiedenen Typen eigentlicher bilinearer Formen von 10 Variabelnpaaren bei kongruenter Transformation der Variabeln.* In-4°, 21 S. Berlin, Gaertner. 1 M.

Tables d'azimut pour tous les points situés entre les cercles polaires et les astres dont la déclinaison est comprise entre 0° *et* 48°. *Variation automatique; Détermination instantanée du relèvement vrai; Contrôle de la route;* par E. Decante. 5 vol. (Latitudes 39° à 48°). In-8°, 203 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Travaux de l'Observatoire de Lyon, publiés sous les auspices du conseil général du Rhône, par Ch. André. II. *Recherches sur l'équation personnelle,* par F. Gonnessiat. In-8°, 167 p. Paris, Gauthier-Villars.

WEIERSTRASS (K.). — *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.* Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen bearb. und heraugsgegeben, von H.-A. Schwarz. 2. Ausg. Gr. in-4° (Bog. 1-12), 96 S. Berlin, Springer. 10 M.

WELZIEN (F.). — *Ueber die Bedingungen, unter denen eine ganze rationale Funktion von mehreren Veränderlichen die vollständige Potenz einer andern darstellt.* In-4°, 23 S. Berlin. Gaertner. 1 M.

WOLF (R.). — *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschiche und Literatur.* (In 2 Bänden). 3. Halbband. Gr. in-8°, 320 S. m. Holzschn. Zürich, Schulthess. 8 M.

DOLBEAR (E.). — *Matter, Ether and Motion : the factors and relations of physical Science.* In-12. Boston. 10 sh. 6 d.

LE DANTEC. — *Nouvelle analyse physique des vibrations lumineuses basées sur la Mécanique de l'élasticité et conduisant logiquement à l'explication de tous les phénomènes de l'Optique.* In-8°, avec figures. Paris, Michelet. 3 fr. 50 c.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Dr P. MANSION, Professor an der Universität Gent, Mitglied der königl. belgischen Akademie. — THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG. Vom Verfasser durgesehene und vermehrte deustche Ausgabe. Mit Anhängen von *S. von Kowalevsky*, *Imschenetsky* und *Darboux*. Herausgegeben von *H. Maser*. XXII-489 pages in-8°. Berlin, Verlag von Julius Springer; 1892.

L'Ouvrage dont nous venons de transcrire le titre est une édition allemande, revue et augmentée, de la *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, publiée, il y a seize ans, dans le tome XXV du recueil in-8° des *Mémoires* de l'Académie de Belgique.

Depuis 1875, la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre a été l'objet de travaux importants, dans trois directions différentes. Mme von Kowalevsky, Darboux, Méray, Poincaré, Picard, Bourlet et d'autres ont étudié les difficiles questions qui se rapportent à l'existence de l'intégrale générale et des solutions singulières de ces équations; Lie et ses élèves ont étendu la théorie des transformations de contact à l'analyse entière des équations différentielles totales ou partielles; enfin Fröbenius, Darboux, Morera, etc. ont traité à fond le problème de Pfaff, dans le sens le plus étendu.

Nous ne pouvions songer à introduire des recherches aussi profondes et aussi originales dans l'ancien cadre de notre livre : il aurait fallu pour cela en doubler ou en tripler l'étendue et en modifier complètement le plan. La récente publication de trois Ouvrages remarquables a, du reste, rendu inutile une pareille extension de notre Mémoire primitif. Ces Ouvrages sont les *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* de E. Goursat (Paris, Hermann, 1891), où l'on trouve un résumé excellent du premier groupe de travaux signalés plus haut; la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie (Leipzig, B.-G. Teubner, 1888-1890; le troisième Volume n'a pas encore paru), et la *Theory of Differential Equations*. Part I : *Exact Equations and Pfaff's Problem*, de A.-R. Forsyth (Cambridge,

1890), où les deux autres groupes de travaux seront exposés d'une manière complète.

Nous nous sommes donc borné à une revision attentive de notre livre, en y introduisant seulement un certain nombre d'additions, de corrections et de notes bibliographiques : 1° à la fin de l'Introduction et dans les notes de la Préface, nous avons donné un aperçu historique des recherches sur l'existence de l'intégrale générale des équations différentielles ou aux dérivées partielles et sur la théorie de leurs solutions singulières; en Appendice, nous avons reproduit, avec l'autorisation de feu Mme S. von Kowalevsky, le beau Mémoire qu'elle a publié sur cette question en 1875; 2° dans la théorie des équations linéaires, nous avons introduit partout la méthode de Gilbert, qui permet de trouver la solution singulière signalée autrefois par Jacobi d'une manière mystérieuse. De plus, nous avons montré comment la méthode de Cauchy peut aussi donner la solution singulière et l'intégrale générale; 3° comme application de la théorie des équations linéaires, nous avons intégré l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées, dans tous les cas; 4° dans l'exposition de la méthode de Jacobi, nous avons fait les modifications rendues indispensables pour échapper à certaines objections de Gilbert; et, pour plus de sécurité, nous avons ajouté à notre travail primitif le Mémoire de ce géomètre sur la question; 5° enfin, çà et là, nous avons introduit des modifications moins importantes; nous avons ajouté aussi des notes bibliographiques, sans essayer toutefois, sous ce dernier rapport, d'être absolument complet. Cela était inutile, d'ailleurs, à cause de la publication récente des Ouvrages de Lie, Forsyth et Goursat, cités plus haut.

L'éditeur allemand de notre livre, M. H. Maser, bien connu par ses excellentes traductions de Gauss, d'Abel et de Galois, a ajouté en Appendice à notre travail le Mémoire analogue de d'Imschenetsky sur les équations aux dérivées partielles du second ordre; puis, à notre prière, un petit Mémoire de Darboux, éminemment suggestif, sur le même sujet, ou plutôt sur la théorie générale des équations aux dérivées partielles.

Grâce à ces diverses additions, le Mémoire que l'Académie de Belgique a bien voulu couronner en 1873 pourra sans doute rendre quelques services, sous sa forme nouvelle, aux géomètres

qui voudront s'initier à l'ensemble des travaux dont la théorie des équations aux dérivées partielles a été l'objet depuis Lagrange jusqu'à Lie.

TABLE DES MATIÈRES.

Appendice III. — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. G. Darboux.

Bibliographie. — Liste des Livres et Mémoires cités et de quelques autres travaux sur les équations aux dérivées partielles.

P. Mansion.

F. Gomes TEIXEIRA. — Curso de Analyse infinitésimal. Calculo integral (segunda Parte); 1 vol. in-8° de 348 pages. Porto, 1892.

M. Gomes Teixeira vient de faire paraître le troisième Volume de son *Cours d'Analyse infinitésimale*. Nous avons, lors de leur apparition, signalé aux lecteurs du *Bulletin* les deux premiers Volumes de cet Ouvrage (¹). Déjà une seconde édition a été publiée du Tome I, attestant le succès du livre, succès mérité, ainsi que nous l'indiquions précédemment, par les qualités de rigueur et de netteté de l'exposé, et aussi par le souci qu'a eu l'auteur, sans sortir du cercle des connaissances vraiment nécessaires à l'étudiant, de s'inspirer le plus largement possible de l'esprit des recherches modernes et de présenter, sous une forme aussi accessible que possible, les progrès les plus notables réalisés par la Science en ces derniers temps. Ce caractère s'affirme encore davantage dans le troisième Volume, particulièrement à l'occasion de la théorie des fonctions elliptiques, ainsi que nous le verrons plus loin.

Les matières traitées dans ce troisième Volume sont les suivantes :

Chap. I. — Intégration des fonctions de variables imaginaires.
Chap. II. — Intégrales eulériennes. Fonction $\Gamma(a)$.
Chap. III. — Fonctions elliptiques.
Chap. IV. — Applications de la théorie des fonctions elliptiques.
Chap. V. — Fonctions multiformes.
Chap. VI. — Méthode des variations.

En ce qui concerne les fonctions de variables imaginaires, M. Gomes Teixeira, après avoir exposé les principes fondamen-

(¹) *Voir* t. XII, p. 64, XIV, p. 56.

taux de la théorie d'après Cauchy, Hermite, Darboux, etc. en fait des applications nombreuses et importantes au développement des fonctions en série ainsi qu'à la détermination des intégrales définies prises entre des limites réelles.

On rencontre au cours de ce Chapitre diverses contributions personnelles de l'auteur qui méritent d'être signalées. Telles sont : l'élégante manière, basée sur la considération de l'intégrale de Cauchy $\int_0^x \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2}$ et sur la notion d'indice périodique, dont est obtenue l'intégrale $\int_0^x \cot(x-a-ib)\,dx$ (p. 7 à 10); la démonstration d'un théorème de M. Hermite sur l'interpolation par les fractions rationnelles (p. 41 et 42); l'étude des conditions pour qu'une fonction analytique quelconque soit développable en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$ et de $\cos(x-a)$, avec la méthode permettant d'obtenir les coefficients du développement et l'application aux fonctions $\sin nx$ et $\cos nx$, d'où se déduisent divers résultats dus à Euler (p. 53 à 61).

En une quarantaine de pages la théorie des intégrales eulériennes est présentée, dans tous ses développements essentiels, sous une forme des plus attrayantes. On y rencontre encore diverses démonstrations dues à l'auteur lui-même, notamment pour l'expression de $\log\Gamma(a)$ sous forme d'intégrale définie (p. 101 et 102), et pour l'expression approchée de $\Gamma(a)$ donnée par Stirling et d'un usage si fréquent dans le Calcul des probabilités. Sur ce dernier point, la démonstration de M. Gomes Teixeira provient de la modification de celle de M. Rouché, de manière à considérer le cas où le nombre a, tout en étant positif, cesse d'être entier (p. 111 à 114).

Il convient de louer d'une façon spéciale la partie du Volume relative aux fonctions elliptiques. M. Gomes Teixeira a, en effet, adopté, pour présenter cette théorie, le point de vue de M. Weierstrass, si magistralement développé par Halphen dans son grand Traité. C'est la fonction $\wp(u)$ que l'auteur a prise pour base de la théorie; les avantages qui résultent de ce choix, particulièrement en ce qui concerne le problème de l'inversion, n'ont plus besoin, croyons-nous, d'être démontrés; mais cette façon de présenter la théorie n'avait pas encore pénétré dans les ouvrages

didactiques de l'ordre de celui qui nous occupe, et, d'autre part, la lecture de l'admirable livre d'Halphen a de quoi un peu effrayer celui qui ne cherche pas à faire des fonctions elliptiques une étude poussée jusqu'aux derniers confins de la Science. Un intérêt tout particulier s'attache donc à l'exposé très clair, très précis et tout élémentaire de M. Gomes Teixeira. Il suffit de lire les cent pages qui le contiennent pour avoir une idée parfaitement nette de la théorie moderne des fonctions elliptiques.

Comme points de détail sur lesquels l'auteur nous semble avoir introduit lui-même divers perfectionnements, nous citerons la manière de démontrer la convergence de quelques séries importantes dans la théorie des fonctions elliptiques, en les réunissant toutes dans un seul théorème (p. 161 à 163), la méthode suivie pour faire la théorie générale de la fonction $p(u)$ définie par son développement en série (p. 167 à 172), le procédé pour obtenir la dérivée de $\mathrm{sn}\, u$ (p. 218 à 220), celui qui conduit au développement en série de fractions de $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ (p. 225 et 226). On trouverait sans doute encore à y regarder de plus près, d'autres points de détail pour lesquels l'auteur a introduit des perfectionnements de méthode, mais nous nous bornerons aux citations qui précèdent.

Un court Chapitre est consacré à quelques applications bien caractéristiques de la théorie des fonctions elliptiques à l'intégration des fonctions irrationnelles, à la théorie des coniques (rectification de l'ellipse, polygones de Poncelet), enfin à celle des cubiques (expression des coordonnées d'un point en fonction elliptique d'un paramètre, théorème de Clebsch, etc.).

Le Chapitre relatif aux fonctions multiformes contient, après quelques principes généraux, l'étude des fonctions algébriques faite d'après les travaux de Puiseux et de Briot et Bouquet, puis celle des fonctions transcendantes les plus usuelles ($\log z$, z^a, fonctions circulaires inverses), celle de la série de Lagrange avec sa généralisation où la contribution personnelle de l'auteur est des plus notables, enfin celle des fonctions définies par des intégrales, avec application, bien entendu, aux fonctions elliptiques.

Le Volume se termine par un exposé succinct de la méthode des variations et de ses principales applications géométriques, notamment à l'étude des surfaces minima.

Nous ne pouvons, en terminant ce rapide compte rendu, que répéter ce que nous avons déjà dit du Cours de M. Gomes Teixeira à propos des deux premiers Volumes. Comme rigueur, comme netteté, comme élégance, cet Ouvrage ne laisse rien à désirer; il a, en outre, le mérite, tout en restant parfaitement élémentaire et didactique, d'être au courant des derniers progrès de la Science.

C'est de tout point un livre excellent. M. O

SCHAPIRA (H.). — Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen. Erster Band. Zweiter Theil. Erster Heft. 1 vol. in-8°; VIII-224 p. Teubner, 1892.

Comme l'annonce le titre, le fascicule que nous annonçons fait partie d'un Ouvrage considérable sur les *cofonctions;* d'après une Note de l'éditeur, le premier volume doit paraître dans la présente année : il sera complété par une *première Partie*, et par un autre fascicule de la *seconde Partie*. Les théories que l'auteur a en vue dans cet Ouvrage se rapportent aux équations algébriques, aux équations différentielles ordinaires, aux équations différentielles linéaires (en particulier à la classe considérée par M. Fuchs), et même à l'Arithmétique : l'auteur a déjà développé ses idées dans une suite de publications et de leçons académiques, poursuivies depuis une douzaine d'années, et annonce l'intention de les réunir en un corps de doctrine.

Ce premier fascicule de la seconde Partie du premier Volume forme la Section VIII de l'Ouvrage et porte le sous-titre que voici : *Représentation des racines d'une équation algébrique générale du* $n^{\text{ième}}$ *degré au moyen de cofonctions de séries de puissances* (*Potenzreihe*) : *exposition élémentaire*. Le problème fondamental que l'auteur y traite est le suivant :

Considérons une équation algébrique entière en z de degré n

$$F(z, x) = z^n + \varphi_{n-1}(x) z^{n-1} + \varphi_{n-2}(x) z^{n-2} + \ldots + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0,$$

où les coefficients $\varphi_{n-1}(x), \ldots, \varphi_0(x)$ sont des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x, convergentes

dans un certain cercle décrit du point zéro comme centre; sous quelles conditions existe-t-il une série $f(x)$ de la même nature telle que, dans le voisinage du point zéro, les n racines de l'équation en z puissent être mises sous la forme $f(\alpha^h x)$, en désignant par α une racine primitive de l'équation

$$z^n - 1 = 0,$$

et en supposant que l'exposant h prennent les valeurs 0, 1, ..., $n-1$? En supposant ces conditions vérifiées, réaliser le développement en série $f(x)$, étudier ses propriétés, et appliquer ces résultats à la résolution des équations algébriques.

La fonction $f(x)$ est dite *fonction principale* (*Hauptfunction*); les fonctions $f(x)$, $f(\alpha x)$, $f(\alpha^2 x)$, ..., $f(\alpha^{n-1} x)$, sont des *cofonctions*, ou encore des fonctions *circomplexes* de la $n^{\text{ième}}$ classe.

Les conditions nécessaires que doivent vérifier les fonctions φ_{n-1}, φ_{n-2}, ..., φ_0 apparaissent presque immédiatement : il est clair qu'elles ne doivent contenir que les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de x, et en outre que $F(z, 0)$ doit se présenter sous la forme $(z-a)^n$, a étant une constante.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes; non seulement M. Schapira l'établit, mais il montre comment, en les supposant vérifiées, on peut réaliser la fonction principale $f(x)$, calculer successivement les coefficients de la série qui la représente.

Si l'on veut maintenant appliquer ces résultats à la résolution des équations algébriques, ou à résoudre le problème suivant : Étant donnée une équation entière en z à coefficients constants

$$z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

déterminer les fonctions $\varphi_{n-1}(x)$, ..., $\varphi_1(x)$, $\varphi_0(x)$, vérifiant les conditions imposées de façon que l'on ait

$$\varphi_k(x_1) = A_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

pour une valeur x_1 qui appartienne au domaine dans lequel la série $f(x)$ converge et représente, avec les fonctions $f(\alpha^h x)$, les racines de l'équation

$$z^n + \varphi_{n-1}(x) z^{n-1} + \ldots + \varphi_1(x) z + \varphi_0(x) = 0.$$

M. Schapira indique diverses méthodes pour la solution de ce problème; puis il traite avec détail de la résolution, au sens précédent, des équations des degrés 1, 2, 3, 4, 5 : ce qui lui fournit l'occasion d'intéressants développements analytiques, tant dans l'application de ses propres méthodes que dans la comparaison avec les résultats connus.

Signalons encore, dans les Chapitres préliminaires, l'introduction d'un certain calcul symbolique que M. Schapira utilise pour mettre sous forme de séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de x les fonctions entières ou rationnelles de cofonctions $f(\alpha^h x)$ ($h = 0, 1, 2, \ldots, n$), $f(x)$ désignant comme plus haut une série suivant les puissances entières et positives de x : ce calcul est appelé par l'auteur *différentiation substitutionnelle,* et il en représente par le symbole *sd* l'opération fondamentale, qui consiste essentiellement, étant donnée une fonction $F(u_i)$ d'une variable u_i affectée d'un indice, à prendre la dérivée par rapport à u_i de cette fonction et à la multiplier par une variable de même nature, mais dont l'indice est augmenté d'un nombre constant : ainsi

$$s_n d\,F(u_i) = F'(u_i)\,u_{n+i}.$$

J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE QUESTION DE LIMITE CONCERNANT LA THÉORIE DES SURFACES;

PAR M. L. LECORNU.

Il n'existe pas, en général, de surfaces réelles coupant orthogonalement un faisceau de courbes données; mais il existe une infinité de surfaces réelles rencontrant le même faisceau sous un angle d'incidence constant, différent de l'angle droit, et d'ailleurs arbitraire. Le premier cas étant la limite du second, on peut se demander ce que deviennent les surfaces trajectoires quand l'angle d'incidence diffère infiniment peu d'un angle droit. Pour répondre à cette question, rapportons le système à trois axes rectangulaires.

en supposant, pour fixer les idées, que l'axe des z soit vertical, et désignons par a, b, c les cosinus directeurs de la tangente menée en un point quelconque M, de coordonnées x, y, z, à la courbe qui passe par ce point : a, b, c sont des fonctions de x, y, z. Nous admettrons que, pour la région étudiée, ces fonctions sont continues et c ne s'annule pas. Soit $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface S qui passe par M et qui coupe les courbes données sous un angle constant ayant pour cosinus la quantité λ, inférieure à c. En désignant par p et q les dérivées partielles de z relatives à x et y, on a l'équation évidente

$$(ap + bq - c)^2 - (1 - \lambda^2)(p^2 + q^2 + 1) = 0.$$

Il est facile de vérifier que, pour la réalité de q, p doit rester compris entre les limites $-\frac{ac \pm \lambda\sqrt{a^2 + c^2 - \lambda^2}}{c^2 - \lambda^2}$ et que, pour la réalité de p, q doit de même ne pas dépasser les limites $-\frac{bc \pm \lambda\sqrt{b^2 + c^2 - \lambda^2}}{c^2 - \lambda^2}$. Lorsque λ tend vers zéro, ces expressions diffèrent respectivement aussi peu qu'on le voudra des quantités $-\frac{a}{c}$ et $-\frac{b}{c}$.

Il existe ainsi, pour chaque petite valeur constante attribuée à λ, une limite supérieure de la valeur absolue de chacune des quantités $p + \frac{a}{c}$ et $q + \frac{b}{c}$, et ces limites tendent vers zéro en même temps que λ. Posons donc

$$p = -\frac{a}{c} + \varepsilon, \qquad q = -\frac{b}{c} + \varepsilon',$$

en désignant par ε, ε' des quantités inférieures, en valeur absolue, à une constante η, laquelle tend vers zéro en même temps que λ. On peut, dès que la surface S est connue, exprimer ε, ε' en fonction des variables x, y, à l'exclusion de z. En écrivant ensuite que la dérivée de q par rapport à x est égale à la dérivée de p par rapport à y, on trouve

$$\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\varepsilon'}{dx} = \frac{1}{c^2}\left[a\left(\frac{db}{dz} - \frac{dc}{dy}\right) + b\left(\frac{dc}{dx} - \frac{da}{dz}\right) + c\left(\frac{da}{dy} - \frac{db}{dx}\right)\right] + \varepsilon'\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{c}\right) - \varepsilon\frac{d}{dz}\left(\frac{b}{c}\right).$$

Dans le second membre, la quantité entre crochets ne peut s'annuler constamment que si les courbes données sont normales à une série de surfaces, circonstance que nous excluons de notre recherche. Nous supposons en outre que, dans la région étudiée, ne se trouve compris aucun des points pour lesquels cette quantité serait nulle. Les deux derniers termes du second membre tendent vers zéro avec λ. Si donc on appelle φ une fonction des variables x et y qui ne s'annule pas pour la région étudiée et qui, par un choix convenable du sens positif sur l'axe des z, peut être rendue positive, on est en droit d'écrire

$$\frac{d\varepsilon}{dy} - \frac{d\varepsilon'}{dx} = \varphi.$$

Intégrons les deux membres de cette égalité pour tous les éléments $d\sigma$ du plan des xy compris dans un contour fermé arbitraire C; puis désignons par ds un élément linéaire du contour et par α l'angle que forme cet élément avec l'axe des x. Il vient par une transformation évidente

$$\int (\varepsilon \cos\alpha + \varepsilon' \sin\alpha)\, ds = \int\int \varphi\, d\sigma.$$

L'intégrale qui figure au premier membre est prise le long du contour, parcouru dans un sens convenable. Construisons, en chaque point du contour, la résultante géométrique, ρ, des grandeurs ε, parallèle à Ox, et ε', parallèle à Oy, et soit m le module de cette résultante. Nous pouvons encore écrire

$$\int m\, ds \cos(\rho, ds) = \int\int \varphi\, d\sigma,$$

d'où

$$\int m\, ds > \int\int \varphi\, d\sigma.$$

Soit maintenant $[m]$ la valeur moyenne de m sur le contour, et soit k une constante positive, égale ou inférieure à la plus petite valeur que prend φ pour la région étudiée. Soient s la longueur totale et σ l'aire totale du contour. Nous trouvons finalement

$$[m] > k\frac{\sigma}{s}.$$

Mais, d'autre part, p et q ne peuvent, avons-nous dit, être réels que si ε et ε' sont tous les deux, en valeur absolue, inférieurs à η. Il doit donc en être de même de m pour chaque point du contour, et, par suite, de la valeur moyenne $[m]$. Il s'ensuit que, si le contour est la projection d'une ligne tracée sur une surface réelle, on a nécessairement

$$k\frac{\sigma}{s} < \eta.$$

Choisissons pour contour particulier un rectangle dont les côtés aient des longueurs désignées par u et v. L'inégalité précédente devient

$$k\frac{uv}{2(u+v)} < \eta.$$

Prenons, pour l'un des sommets, A, du rectangle, un point déterminé du plan des xy et faisons croître indéfiniment u, à partir de zéro, en laissant v constant. Le premier membre va en croissant constamment de zéro à $\frac{k}{2}$. Si donc η est assez petit, il y aura une valeur de u pour laquelle l'inégalité cessera d'être vérifiée. A ce moment apparaîtront nécessairement, sur le contour du rectangle, certains points pour lesquels l'une au moins des deux dérivées partielles p, q deviendra imaginaire. Ceci a lieu quelle que soit la petitesse de v, pourvu que η soit choisi en conséquence. D'après cela, pour des valeurs de l'angle d'incidence très voisines de $\frac{\pi}{2}$, on rencontre toujours, sur le plan des xy, en marchant à partir d'un point quelconque A dans une direction arbitraire, des points pour lesquels la surface cesse d'être réelle. Ces points forment, autour de A, une courbe fermée qui correspond sur la surface à une *arête de rebroussement* (ligne de raccordement de deux nappes passant toutes les deux du réel à l'imaginaire).

Donnons encore au contour C la figure d'une circonférence de centre A, qui grandisse à partir de zéro. Le rapport $\frac{\sigma}{s}$ va lui-même en grandissant, et, si η est indéfiniment petit, l'inégalité fondamentale ne peut être vérifiée que pour un rayon infiniment petit. Un cercle de grandeur finie dont le centre correspond à un point réel de la surface rencontre donc toujours la projection horizon-

tale de l'arête de rebroussement. Par conséquent, la portion réelle de surface trajectoire entourée par cette arête se réduit ou bien à une *facette* infiniment petite, ou bien à une *bande* infiniment étroite.

En résumé, on peut dire qu'il existe toujours des surfaces trajectoires orthogonales d'un faisceau de courbes donné; mais que les parties réelles de ces surfaces sont évanouissantes et se réduisent à des points isolés ou à des lignes isolées.

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. A. GRÉVY.

I. Soit x un zéro de la fonction $z - \varphi(z)$ vérifiant l'inégalité $\operatorname{mod}\varphi'(x) < 1$; M. Kœnigs [1] a montré que le point d'affixe x est centre d'un cercle C_x à l'intérieur duquel : 1° $\varphi(z)$ est holomorphe; 2° le module $\frac{\varphi(z) - x}{z - x}$ reste constamment inférieur à une quantité plus petite que l'unité.

Si z est l'affixe d'un point de ce cercle, $z_1 = \varphi(z)$, ..., $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, ... sont les affixes de points qui convergent régulièrement vers le point d'affixe x.

M. Kœnigs a établi l'existence d'une fonction holomorphe dans le cercle C_x, satisfaisant à l'équation

$$F(z_1) = \frac{1}{g(z)} F(z),$$

$g(z)$ étant holomorphe et $g(x)$ égal à l'unité.

II. Nous nous proposons d'étendre ces résultats à l'équation fonctionnelle

$$f(z) = p_1(z) f(z_1) + p_2(z) f(z_2) + \ldots + p_n(z) f(z_n),$$

p_1, ..., p_n étant des fonctions holomorphes de z dans le domaine du point x, $p_n(x)$ étant différent de zéro.

(1) Kœnigs, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883. *Annales de l'École Normale supérieure*, 1884 et 1885.

Considérons l'équation algébrique *caractéristique*

$$1 - p_1(x)t - p_2(x)t^2 - \ldots - p_n(x)t^n = 0,$$

dont aucune racine n'est infinie.

1° Soit a une racine simple de cette équation; posons $a = [\varphi'(x)]^\alpha$ et supposons qu'aucune autre racine ne soit de la forme $[\varphi'(x)]^{k+\alpha}$, k étant entier; à cette racine correspond une solution de l'équation fonctionnelle; cette solution est de la forme $(z-x)^\alpha u(z)$, u étant holomorphe, non nulle au point x.

2° Si a est racine d'ordre λ, il existe λ solutions de l'équation fonctionnelle

$$(z-x)^\alpha u_1,$$
$$(z-x)^\alpha [u'_2 + u_2^2 \mathcal{L}\, B(z)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(z-x)^\alpha \left[u'_\lambda + u_\lambda^2 \mathcal{L}\, B(z) + \ldots + u_\lambda^\lambda \mathcal{L}^{\lambda-1} B(z)\right],$$

$u_1, \ldots, u_\lambda^\lambda$ étant holomorphes, $B(z)$ étant la fonction holomorphe dans le domaine du point x, qui s'annule en ce point et satisfait à l'équation

$$B(z_1) = \varphi'(x) B(z).$$

3° Si $[\varphi'(x)]^\alpha$, $[\varphi'(x)]^{\alpha+k_1}$, ..., $[\varphi'(x)]^{\alpha+k_\mu}$ sont racines de l'équation caractéristique, $k_1, \ldots, k_\mu$ étant des entiers négatifs décroissants, à ces racines correspondent les $\mu + 1$ solutions

$$(z-x)^\alpha u_1,$$
$$(z-x)^{\alpha+k} u'_2 + (z-x)^\alpha u_2^2 \mathcal{L}\, B(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(z-x)^{\alpha+k_\mu} u'_{\mu+1} + (z-x)^{\alpha+k_{\mu-1}} u_{\mu+1}^2 \mathcal{L}\, B(z) + \ldots + (z-x)^\alpha u_{\mu+1}^{\mu+1} \mathcal{L}^\mu B(z).$$

Enfin, si quelques-unes de ces racines sont multiples, la modification sera la même que celle du 2°, cette modification portant aussi sur les solutions suivantes.

III. Soient $y_1, \ldots, y_n$ n solutions entre lesquelles n'existe aucune relation identique de la forme

$$y_1 \Omega_1[b(z)] + y_2 \Omega_2[b(z)] + \ldots + y_n \Omega_n[b(z)] = 0,$$

$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ étant des fonctions périodiques de période égale à l'unité, $b(z)$ étant égale à $\frac{\mathcal{L}\,\mathrm{B}(z)}{\mathcal{L}\,\varphi'(x)}$; la solution la plus générale de l'équation fonctionnelle dans le domaine du point x sera

$$y_1\,\Omega_1[b(z)] + y_2\,\Omega_2[b(z)] + \ldots + y_n\,\Omega_n[b(z)].$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Love (A.-E.-H.). — *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Vol. I. In-8°, 336 p. London, Cambridge Warehouse. 12 sh.

Poincaré (H.). — *Leçons sur la théorie de l'élasticité*. Rédigées par MM. Emile Borel et Jules Drach. In-8°, 213 p. Paris, Carré.

Amigues (E.). — *La théorie des ensembles et les nombres incommensurables*. In-4°, 10 p. Paris, Masson.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de M. le contre-amiral Mouchez. *Observations* (1884). In-4°, IX-738 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

Appell .... — *Leçons sur l'attraction et la fonction potentielle, professées à la Sorbonne en* 1890-1891. In-8°, 64 p. avec figures. Paris, Carré. 2 fr.

Hadamard (J.). — *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*. In-4°, 91 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

Salmon (G.). — *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*. Traduit de l'anglais par O. Chemin. 3e Partie : *Surfaces du 3e et du 4e degré; Théorie générale des surfaces*. In-8°, VIII-220 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr. 50 c.

Le Danctec (L.-M.). — *Nouvelle analyse physique des vibrations lumineuses, basée sur la Mécanique de l'élasticité et conduisant logiquement à l'explication de tous les phénomènes de l'Optique*. In-8°, 156 p. avec fig. Paris, Michelet.

Poincaré (H.). — *Elektricität und Optik. Vorlesungen Autoris.*

Deutsche Ausgabe, von W. Jaeger u. E. Gumlich. 2. Bd. *Die Theorien von Ampère u. Weber. Die Theorie von Helmholtz u. die Versuche von Hertz*. Gr. in-8°, VII-222 S. m. 15 Fig. Berlin, Springer. 7 M.

LODGE (O.). — *Les théories modernes de l'électricité. Essai d'une théorie nouvelle*. Traduit de l'anglais par E. Meylan. In-8°, XIII-217 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

WALLENTIN (J.-G.). — *Einleitung in das Studium der modernen Elektricitätslehre*. Gr. in-8°, XII-560 S. m. 253 Holzschnitten. Stuttgart, Enke. 12 M.

1re Part

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Felix KLEIN. — Vorlesungen ueber die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervolständigt von Dr *Robert Fricke*. Erster Band : Grundlegung der Theorie. Gr. in-8°, VIII-764 p. Leipzig, 1890.

1. Dans la Préface de ses *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig, 1884), M. Klein présentait son Ouvrage comme le premier d'une série dont les autres parties devaient comprendre la théorie des fonctions modulaires elliptiques, puis la théorie générale des fonctions uniformes qui admettent toutes les substitutions linéaires d'un groupe. Le livre que nous avons aujourd'hui devant nous est le second volume de la série annoncée; comme on voit, il n'a pas été écrit par M. Klein lui-même, mais par un de ses élèves, M. Robert Fricke, auquel chacun saura certainement gré de la peine qu'il a prise de faire un travail aussi considérable. Un second Volume sur le même sujet est d'ailleurs annoncé, qui contiendra encore des développements théoriques et les applications, sans doute le problème de la transformation des fonctions elliptiques.

Dans l'*Icosaèdre,* M. Klein a fait l'étude des groupes finis de substitutions, des fonctions uniformes qui admettent les substitutions d'un tel groupe et de leurs fonctions inverses; les travaux de différents géomètres, et, en première ligne, ceux de M. Poincaré, ont créé la théorie des groupes illimités (discontinus) de substitutions, des fonctions uniformes qui s'y rattachent et de leurs fonctions inverses. La théorie des fonctions modulaires, telle qu'elle est présentée dans le livre qui nous occupe, est l'échelon intermédiaire entre ces degrés extrêmes : on y étudie le *groupe modulaire,* formé par les substitutions

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

où α, β, γ, δ sont des nombres entiers, les fonctions uniformes qui admettent les substitutions de ce groupe ou celles d'un sous-groupe quelconque en lui contenu, et leurs fonctions inverses. Elle est exposée sous la forme qu'elle a acquise à la suite des travaux

de M. Klein, particulièrement de ceux publiés en 1878 et 1879 dans les *Mathematische Annalen;* elle est basée non seulement sur les résultats acquis par M. Klein lui-même, mais aussi sur ceux obtenus par un grand nombre d'autres géomètres, notamment par M. Schwarz; les idées de Riemann et de Galois y jouent d'ailleurs un rôle fondamental.

Le livre est divisé en trois Sections formées chacune de plusieurs Chapitres, et que nous allons successivement examiner.

2. La première Section a pour but de nous faire connaître en quoi consiste l'étude des fonctions modulaires elliptiques que nous allons entreprendre.

Elle s'ouvre par un Chapitre qui contient une remarquable exposition de la réduction de l'intégrale elliptique de première espèce aux différentes formes canoniques usitées; on y rencontre déjà un grand nombre des éléments du calcul qui feront la base des discussions ultérieures.

Considérons la forme binaire biquadratique

$$(1)\quad \begin{cases} f(z_1, z_2) = a z_1^4 + 4b z_1^3 z_2 + 6c z_1^2 z_2^2 + 4d z_1 z_2^3 + e z_2^4, \\ \qquad = (z_2^{(1)} z_1 - z_1^{(1)} z_2)(z_2^{(2)} z_1 - z_1^{(2)} z_2) \\ \qquad\quad \times (z_2^{(3)} z_1 - z_1^{(3)} z_2)(z_2^{(4)} z_1 - z_1^{(4)} z_2). \end{cases}$$

On peut former, si l'on ne tient pas compte du signe, six déterminants différents

$$(i, k) = z_1^{(i)} z_2^{(k)} - z_2^{(i)} z_1^{(k)};$$

en posant

$$A = (1, 2)(3, 4), \qquad B = (1, 3)(4, 2), \qquad C = (1, 4)(2, 3),$$

on obtient trois *invariants irrationnels* attachés à la forme, de poids égal à deux, et liés par la relation

$$A + B + C = 0.$$

Les quotients deux à deux de ces trois quantités sont les six rapports anharmoniques des quatre points représentés par la forme (1) : ce sont des invariants absolus, par exemple

$$\lambda = \frac{A}{B}.$$

Il y a lieu de remplacer ces trois invariants A, B, C par trois

autres de même nature

$$\mathfrak{A} = B - C, \qquad \mathfrak{B} = C - A, \qquad \mathfrak{C} = A - B \text{ (}^1\text{)}.$$

Leur introduction permet de résoudre immédiatement le problème de l'équivalence de deux formes f et f', au cas où les facteurs linéaires de même rang doivent se correspondre, et l'on rencontre ainsi une première forme canonique de (1), où l'on voit apparaître l'invariant absolu λ:

$$f = z_1(z_2 - z_1)(A z_1 + B z_2) z_2.$$

Pour le problème de l'équivalence, quand on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs linéaires, l'introduction des *invariants rationnels* est avantageuse. Comme la quantité $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ est identiquement nulle, on pose

$$G_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} = k g_2, \qquad G_3 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = k' g_3,$$

k et k' étant des facteurs numériques, et l'on retrouve ainsi les invariants connus, de poids égal à 4 et à 6, de la forme (1) :

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$g_3 = ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3.$$

Le discriminant Δ de la forme est donné par la relation

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Les relations

$$J : J - 1 : 1 = g_2^3 : 27 g_3^2 : \Delta$$

définissent l'invariant absolu J, rencontré par M. Hermite dans ses premières recherches sur les équations modulaires, retrouvé et étudié ensuite par différents géomètres (la *Valenz* de M. Dedekind), et dont M. Picard s'est servi pour la démonstration de ses belles propositions sur les fonctions entières. Il joue un rôle fondamental dans tout le reste de l'Ouvrage.

Les invariants g_2 et g_3 conduisent à une seconde forme canonique de f

$$f = z_2(4 z_1^3 - g_2 z_1 z_2^2 - g_3 z_2^3).$$

La troisième forme canonique résulte de considérations un peu différentes. Si l'on forme, avec les quatre racines de f, deux groupes de deux racines, il y a un couple de points et un seul qui

(1) Les quantités représentées ici par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont, dans le texte allemand, représentées par α, β, γ majuscules.

divise harmoniquement à la fois les deux segments déterminés par les deux racines de chaque groupe. On peut ainsi obtenir trois couples de points correspondant aux trois manières de former deux groupes avec les quatre racines. On transforme les axes de façon que, sur la sphère, ces trois couples de points soient les extrémités des trois axes d'un octaèdre régulier concentrique; on obtient alors la forme canonique

$$f = M(z_1^4 + z_2^4) + 6N z_1^2 z_2^2 = (\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2).$$

Aux trois formes canoniques obtenues pour f correspondent les trois formes canoniques usuelles de l'intégrale elliptique de première espèce :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}},$$

auxquelles l'auteur attache les noms de Riemann, de Weierstrass et de Legendre.

Les quantités λ et μ sont des invariants irrationnels, et l'on a

$$J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1-\lambda)^2,$$
$$J : J - 1 : 1 = (\mu^8 + 14\mu^4 + 1)^3 : (\mu^{12} - 33\mu^8 - 33\mu^4 + 1)^2 : 108\mu^4(\mu^4 - 1)^4.$$

3. Dans le Chapitre suivant, nous abordons l'étude des périodes de l'intégrale elliptique de première espèce, considérées comme fonctions de J.

Une telle période est la valeur de l'intégrale quand l'intégration est faite le long d'un contour fermé, tracé sur la surface de Riemann qui correspond à $\sqrt{f}$, ce contour ne pouvant être réduit à un point. Deux contours qui, considérés comme coupures, rendent la surface simplement connexe, donnent un couple primitif de périodes. Deux couples primitifs (ω_1, ω_2), (ω'_1, ω'_2) sont liés par les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{cases} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

α, β, γ, δ étant des nombres entiers.

Une période ω est un *invariant transcendant* de la forme f, de poids égal à -1. Elle ne dépend que de g_2 et de g_3, ou, si l'on

veut, de $\frac{g_3}{g_2}$ et de J. En posant

$$\Omega = \omega\sqrt{\frac{g_3}{g_2}},$$

Ω ne dépend plus que de J.

L'étude de cette fonction Ω de J est entreprise au moyen de l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elle satisfait

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\Omega = 0,$$

et, pour cela, il suffit d'étudier deux solutions particulières Ω_1, Ω_2 formant un système fondamental, et qui sont, au facteur $\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$ près, un couple primitif ω_1, ω_2 de périodes de l'intégrale elliptique.

De la nature même de l'équation différentielle, il résulte que les seuls points singuliers sont 0, 1, ∞. L'étude de chacune des deux fonctions Ω_1, Ω_2 est faite pour chacun de ces points, et, de cette étude, se déduit chaque fois la substitution que subissent ces fonctions, quand la variable J décrit un contour fermé autour de l'un de ces points. Ces résultats se transportant immédiatement à ω_1 et ω_2, on arrive à cette proposition qui met en évidence le caractère essentiel de ces fonctions de J : *L'ensemble des couples primitifs* (2) *de périodes se divise en deux classes suivant que* $\alpha\delta - \beta\gamma$ *est égal à* $+1$ *ou à* -1. *Tous les couples d'une même classe peuvent être considérés comme les valeurs des branches de deux fonctions analytiques associées de la variable* J ; *mais il n'est pas possible de passer, par la continuation analytique, de l'un des systèmes de deux fonctions à l'autre.*

Des propriétés des fonctions ω_1 et ω_2 se déduisent celles du rapport $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Il satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{\omega'''}{\omega'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(1-J)^2} + \frac{23}{72J(1-J)},$$

qui n'est qu'un cas particulier de la célèbre équation du troisième ordre étudiée en particulier par M. Schwarz dans ses travaux sur la série hypergéométrique, et à laquelle satisfont aussi les invariants irrationnels λ et μ.

4. Avec le troisième Chapitre se rencontrent les premiers exemples des méthodes géométriques qui se retrouveront dans la presque totalité du livre et qui sont basées sur la représentation conforme.

Considérons l'une ou l'autre des fonctions algébriques $\lambda(J)$, $\mu(J)$ définies précédemment. Cette fonction est uniforme sur une certaine surface de Riemann qui n'a d'autres points de ramification que les points 0, 1, ∞.

Coupons cette surface le long de l'axe réel, elle se trouve décomposée en un certain nombre de demi-plans. La représentation conforme de l'un quelconque de ces demi-plans, au moyen de la branche correspondante de la fonction de J considérée, conduit à un triangle dont les côtés sont des arcs de cercles et les angles des parties aliquotes de π. L'ensemble de ces triangles qui sont la représentation conforme de toute la surface de Riemann forme un damier qui recouvre tout le plan, ce qui correspond à ce fait que la fonction inverse J de la fonction considérée est uniforme.

Deux triangles qui sont la représentation conforme de deux demi-feuillets nord, ou de deux demi-feuillets sud de la surface de Riemann se correspondent par une substitution linéaire.

Si l'on forme la figure inverse de l'un quelconque des triangles par rapport à l'un de ses côtés, on obtient le triangle adjacent le long de ce côté. Ces deux triangles, qui sont dits *symétriques*, représentent un demi-feuillet nord et un demi-feuillet sud reliés entre eux par l'un des segments $(-\infty —— 0)$, $(0 —— 1)$ ou $(1 —— +\infty)$, qui correspond au côté commun.

Ainsi un triangle quelconque peut se déduire d'un triangle déterminé, soit par une substitution linéaire (*direkte Kreisverwandschaft*), soit par une inversion suivie d'une substitution linéaire (*indirekte Kreisverwandschaft*).

Ces propriétés de notre damier résultent seulement de ce fait que les angles sont des parties aliquotes de π, et leur généralisation est immédiate. Soit un triangle dont les côtés sont des arcs de circonférence et dont nous représenterons les angles par $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$; par des inversions successives, nous pouvons obtenir une division de la totalité ou d'une partie du plan en triangles. Il existe une fonction $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$ qui donne la représentation conforme du demi-plan nord J sur le triangle initial, les points $1, 0, \infty$

correspondant aux sommets des angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$; de la *loi de symétrie*, il résulte que les autres triangles seront les représentations conformes données par les diverses branches de la fonction s. Dès lors, chaque branche se déduit évidemment d'une autre quelconque par une substitution linéaire.

Les fonctions $\lambda(J)$, $\mu(J)$ sont des cas particuliers de la fonction s, et aussi la fonction $\omega(J)$, car la fonction s satisfait à l'équation du troisième ordre de M. Schwarz qui comprend, comme cas particuliers, celles auxquelles satisfont les trois fonctions considérées.

Si les triangles construits sur le plan n'empiètent pas les uns sur les autres, la fonction inverse J de la fonction s est uniforme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que α, β, γ soient de la forme $\frac{1}{\nu_1}$, $\frac{1}{\nu_2}$, $\frac{1}{\nu_3}$, où ν_1, ν_2, ν_3 sont des nombres entiers. De là résulte la classification suivante :

1° $\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}>1$; *fonctions s de première espèce*. Il y a alors un nombre fini de triangles; tout le plan est recouvert; ces fonctions sont au nombre de quatre; elles sont algébriques : ce sont les *irrationnelles des polyèdres réguliers*. Les fonctions $\lambda(J)$ et $\mu(J)$ appartiennent à cette classe.

2° $\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=1$; *fonctions s de seconde espèce*. Il y a une infinité de triangles et tout le plan est recouvert. Ces fonctions sont au nombre de trois. Les fonctions doublement périodiques et l'intégrale elliptique de première espèce s'y rattachent.

3° $\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}<1$; *fonctions s de troisième espèce*. Il y a alors une infinité de triangles, mais ils ne recouvrent qu'une partie du plan. Il y a une *limite naturelle*. Ces fonctions sont en nombre illimité; c'est à cette classe qu'appartient la fonction $\omega(J)$:

$$\omega(J)=s\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{\infty};J\right).$$

5. Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour apercevoir en quoi va consister notre théorie des fonctions modu-

laires; c'est l'objet du quatrième Chapitre que d'arriver à l'énoncé des deux problèmes fondamentaux qu'elle comporte.

Puisque, en effet, $\omega(J)$ est une fonction s, au même titre que les irrationnelles des polyèdres réguliers, nous sommes conduit à faire l'étude de ω en nous guidant sur la façon dont celle de ces irrationnelles a été faite dans les *Leçons sur l'icosaèdre*. C'est la fonction icosaédrique $\zeta(J)$ qui est employée comme terme de comparaison :

$$\zeta(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; J\right).$$

Le Chapitre débute par l'établissement de quelques formules destinées à rendre plus manifestes les analogies cherchées entre les deux fonctions $\zeta(J)$ et $\omega(J)$: on y trouve la relation de Legendre; les expressions des invariants rationnels g_2, g_3, Δ en fonction de ω_1 et ω_2; l'étude des déterminants fonctionnels pour chacune de ces fonctions, déterminants qui, à des facteurs constants près, les reproduisent; celle des périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce comme fonctions de ω_1 et ω_2; la démonstration que g_2 n'est autre que le déterminant hessien de $\log\Delta$.

Puis nous arrivons à la comparaison entre les fonctions $\zeta(J)$ et $\omega(J)$: les deux divisions du plan en triangles, au nombre de 120 dans le premier cas, en nombre illimité dans le second, sont rappelées; les fonctions inverses $J(\zeta)$, $J(\omega)$ sont uniformes, la première étant une fonction rationnelle $R(\zeta)$, la seconde une transcendante $F(\omega)$; les équations

$$R(\zeta) - J = 0, \qquad F(\omega) - J = 0$$

sont, la première, l'*équation icosaédrique*, la seconde, l'*équation modulaire*. Ces équations, en introduisant une variable d'homogénéité, sont

$$J : J - 1 : 1 = H^3(\zeta_1, \zeta_2) : -T^2(\zeta_1, \zeta_2) : 1728 f^5(\zeta_1, \zeta_2),$$
$$J : J - 1 : 1 = g_2^3(\omega_1, \omega_2) : 27 g_3^2(\omega_1, \omega_2) : \Delta(\omega_1, \omega_2);$$

H, T, f sont les trois *formes icosaédriques* liées par la relation

$$1728 f^5 = T^2 + H^3;$$

g_2, g_3, Δ sont les trois *formes modulaires* liées par la relation

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2;$$

c'est $\log\Delta$ qui correspond à la forme icosaédrique f : les formules établies au début du Chapitre sont destinées à faire ressortir davantage le parallélisme qui existe entre les propriétés de ces deux séries de formes.

C'est le groupe de l'équation qui, dans les *Leçons sur l'icosaèdre,* a servi de base à l'étude de l'équation icosaédrique; il y a donc lieu d'introduire aussi le *groupe* de l'équation transcendante modulaire. Ce groupe comporte une infinité de substitutions : ce sont celles que subissent les racines ω quand la variable J décrit dans le plan tous les contours qui, partant d'un point donné, y reviennent en enlaçant des points critiques. Il est simplement transitif.

Voici dès lors les deux problèmes fondamentaux à résoudre :

1° Étudier le groupe modulaire au point de vue des sous-groupes qui y sont contenus et de leur classification. L'indice d'un sous-groupe dont les substitutions sont $1, v_1, v_2, v_3, \ldots$ est le nombre des substitutions $1, V_1, V_2, V_3, \ldots$ du groupe qu'il faut considérer pour que l'ensemble des substitutions $v_i V_k$, où i et k prennent toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... constitue le groupe modulaire. Les sous-groupes d'indice fini sont particulièrement intéressants, et seront, à peu près, exclusivement étudiés.

2° Former les résolvantes de l'équation modulaire qui correspondent aux sous-groupes obtenus. Ce problème se subdivise lui-même en deux autres : étant donné un sous-groupe, il s'agit d'abord de former une fonction uniforme de ω qui admette toutes les substitutions de ce sous-groupe et celles-là seulement; une telle fonction est une *fonction modulaire elliptique*. En second lieu, il faut former l'équation à laquelle satisfait cette fonction uniforme, équation qui est une résolvante correspondant au sous-groupe considéré. Si l'indice du sous-groupe est fini, cette équation est algébrique; sinon, elle est transcendante, comme l'équation modulaire elle-même.

6. Le cinquième Chapitre, qui est le dernier de la première

Section, n'est qu'un bref résumé de la théorie des fonctions elliptiques. Il contient, avec une notation qui diffère peu de celle de M. Weierstrass, les formules les plus importantes : les différentes formes analytiques de pu et $p'u$, les développements de g_2 et g_3 en suites infinies à simple et à double entrée, enfin les formules relatives aux fonctions σ et θ.

Transcrivons seulement l'équation modulaire sous forme explicite

$$J : J - 1 : 1 = \left(\frac{1}{12} + 20\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3 e^{2mi\pi\omega}}{1 - e^{2mi\pi\omega}}\right)^3 : 27\left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5 e^{2mi\pi\omega}}{1 - e^{2mi\pi\omega}}\right)^2$$
$$: e^{2i\pi\omega}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - e^{2mi\pi\omega})^{24}.$$

7. Les deux Sections restantes de l'Ouvrage sont consacrées chacune au traitement de l'un des problèmes fondamentaux énoncés précédemment. Celle dans laquelle nous entrons maintenant s'ouvre par l'étude générale des substitutions linéaires

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

a, b, c, d étant des constantes réelles ou imaginaires quelconques. Ces substitutions sont classées d'après la nature des points doubles. Si ceux-ci sont confondus, elles sont dites *paraboliques;* sinon, en désignant par z_1 et z_2 les points doubles distincts, la substitution peut s'écrire

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

et alors la substitution est *hyperbolique, elliptique* ou *loxodromique,* selon que k est réel et positif, ou imaginaire avec un module égal à l'unité, ou enfin ne rentrant ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux cas.

Les variables z' et z étant supposées figurées sur le même plan, la substitution peut être regardée comme le résultat d'une *déformation continue* de ce plan, et l'on distingue alors les *trajectoires* et les *lignes de niveau;* on obtient une image particulièrement lumineuse en dessinant une suite de lignes de niveau telles

que l'effet de la substitution soit d'amener chacune d'elles sur celle qui la suit.

Ces considérations sont d'abord appliquées aux trois espèces de fonctions s; puis aux substitutions modulaires. Celles-ci se divisent alors en quatre classes formées : la première, de substitutions elliptiques ayant une période égale à deux ; la seconde, de substitutions elliptiques ayant une période égale à trois; la suivante, de substitutions paraboliques ayant pour points doubles confondus tous les *points rationnels* de l'axe des x et le point à l'infini; la dernière enfin, de substitutions hyperboliques ayant pour points doubles distincts tous les couples de *points irrationnels* de l'axe des x.

C'est ici que sont introduites les deux notions capitales de l'*équivalence* et de la *région fondamentale,* que M. Poincaré a prises pour bases de ses recherches sur les groupes de substitutions linéaires.

Étant donné un groupe quelconque de substitutions linéaires, on dit que deux points du plan sont *équivalents relativement à ce groupe* (¹) si l'une des substitutions du groupe transforme l'un de ces points en l'autre. Une *région fondamentale* est une portion du plan telle, que si l'on figure sur le plan tous les points équivalents à un point quelconque de ce plan, un de ces points et un seul appartienne à la région considérée.

Des régions fondamentales sont construites pour les groupes cycliques engendrés par une substitution elliptique périodique, hyperbolique ou parabolique; puis, les quatre classes de substitutions modulaires sont passées en revue. La fin du Chapitre est consacrée à l'étude, à ce même point de vue, des substitutions

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

où $\bar{z}$ est la quantité imaginaire conjuguée de z, et qui correspondent à une inversion suivie d'une substitution linéaire.

8. Le second Chapitre contient l'application au groupe modu-

(¹) M. Poincaré se sert du mot *congruent*.

laire des considérations précédentes, et, avant tout, la recherche d'une région fondamentale.

Une région fondamentale d'un groupe quelconque doit évidemment se trouver entièrement contenue dans une région fondamentale correspondant à un sous-groupe quelconque du groupe considéré. Partant de là, si l'on considère, d'une part, le sous-groupe cyclique engendré par la substitution $S(\omega) = \omega + 1$, et qu'on adopte pour région fondamentale la portion du plan comprise entre les deux parallèles à l'axe des y à la distance $\frac{1}{2}$ de cet axe; d'autre part, le sous-groupe cyclique engendré par la substitution $T(\omega) = -\frac{1}{\omega}$, et qu'on adopte pour région fondamentale la portion du plan extérieure à la circonférence de rayon égal à l'unité et ayant l'origine pour centre, on devra chercher une région fondamentale du groupe modulaire dans la portion du plan commune à la fois à ces deux régions.

Cette portion elle-même est région fondamentale pour le groupe modulaire, car deux points quelconques de cette portion ne sauraient être équivalents, et l'on peut toujours trouver, dans la région considérée, un point qui soit équivalent à un point donné quelconque du plan.

Une seule substitution du groupe permet de passer du point ω à un point équivalent ω', si le point de la région fondamentale qui est équivalent à chacun de ces deux points est différent des points i et ρ, ρ désignant la racine cubique $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ de l'unité; s'il est i, il y a deux substitutions; s'il est ρ, il y en a trois.

De la façon même dont a été obtenue la région fondamentale, il résulte que toute substitution du groupe modulaire peut être composée avec les deux substitutions S et T, qui constituent ainsi un système de *substitutions génératrices* (¹) du groupe. Si l'on transforme la partie nord de la région fondamentale au moyen de ces substitutions, on obtient une division du demi-plan nord en une infinité de triangles juxtaposés : tout point équivalent à i appartient à deux triangles, tout point équivalent à ρ, à trois

(¹) *Erzeugende Substitutionen, substitutions fondamentales* de M. Poincaré.

triangles; tout point qui n'est équivalent ni à i, ni à ρ, n'appartient qu'à un seul triangle.

Des considérations analogues aux précédentes et relatives au groupe modulaire *prolongé* au moyen d'inversions occupent le reste du Chapitre.

Signalons encore le dernier paragraphe qui contient une très curieuse transformation du damier modulaire en une division en triangles *rectilignes* de la surface d'une ellipse, division qui peut être obtenue ensuite par de simples considérations de Géométrie synthétique et qui sert ainsi de lien entre deux ordres de faits très différents.

9. Le troisième Chapitre est consacré à une très intéressante étude des formes quadratiques binaires de la théorie des nombres. La forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est représentée par (a, b, c), son *déterminant* $b^2 - ac$ par D, son *diviseur* par σ. Les substitutions modulaires sont des substitutions qui transforment une telle forme en une autre équivalente; par cette transformation, la valeur du déterminant n'est pas altérée. Il s'agit de résoudre ces deux problèmes : étant données deux formes de même déterminant, reconnaître si elles sont équivalentes; étant données deux formes que l'on sait être équivalentes, former toutes les substitutions qui transforment l'une des formes en l'autre. Ces deux problèmes sont traités successivement pour les formes à déterminant négatif et pour les formes à déterminant positif.

Étant donnée la valeur du déterminant supposé négatif d'une forme positive $a\omega^2 + 2b\omega + c$, elle peut être regardée comme tout à fait définie par la connaissance du point $\frac{-b + \sqrt{D}}{a}$ du demi-plan nord. Dès lors, on dit qu'une telle forme est réduite si le point correspondant appartient au triangle générateur du damier modulaire, et le problème de l'équivalence se trouve immédiatement résolu : deux formes sont équivalentes si les points du triangle générateur équivalents aux points qui correspondent à ces deux formes sont confondus; si l'on compose la substitution qui permet de passer de l'un de ces deux points au point équivalent du triangle générateur, avec la substitution qui permet de passer de ce dernier point au second des deux points, on a une

substitution linéaire modulaire qui transforme l'une des formes en l'autre. D'ailleurs cette substitution est la seule qui effectue cette transformation, si le point du triangle générateur n'est ni le point i, ni le point ρ; s'il est i, il y a deux telles substitutions, s'il est ρ, il y en a trois. On peut immédiatement voir sur une forme si elle est réduite ou non; elle est, en effet, réduite lorsque a, b, c satisfont aux inégalités

$$-a < 2b \leqq a, \qquad a \leqq c,$$

b devant toutefois être positif ou nul dans le cas où $a = c$. On conclut immédiatement de là cette importante proposition que *le nombre des classes des formes quadratiques à déterminant négatif est fini.*

Pour les formes à déterminant positif, les choses se passent moins simplement; on fait intervenir, pour parvenir à leur représentation géométrique, la demi-circonférence décrite sur le segment déterminé par les deux racines réelles de la forme, cette demi-circonférence étant, en outre, munie d'un sens; la solution du problème de l'équivalence d'une forme avec elle-même, puis avec une autre forme, s'appuie alors sur la considération des solutions entières de l'*équation de Pell*

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2;$$

il est encore démontré que le nombre des classes est fini.

La fin du Chapitre est consacrée à l'étude facile, et dans laquelle interviennent les résultats précédents, de l'*homologie* (*Gleichberechtigung*) des substitutions du groupe modulaire considérées isolément, et de l'homologie des sous-groupes cycliques.

10. Le Chapitre suivant nous offre un exemple de la méthode générale qui sera appliquée à la solution du problème qui fait l'objet de la deuxième Section. Cet exemple est donné par l'étude du sous-groupe Γ' formé par les substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

du groupe modulaire Γ dans lesquelles β et γ sont pairs; α et δ sont alors nécessairement impairs. On considère en même temps

le groupe plus général $\overline{\Gamma}'$ obtenu en adjoignant à ses substitutions celles que l'on en déduit en remplaçant ω par $-\overline{\omega}$.

Le polygone fondamental de $\overline{\Gamma}'$ s'obtient de suite; il est, dans le demi-plan nord, limité par les demi-droites $x = -1$, $x = 0$ et la demi-circonférence qui a le segment $(-1 \text{———} 0)$ de l'axe des x pour diamètre. On conclut de là que

$$a(\omega) = -\overline{\omega}, \qquad b(\omega) = -\overline{\omega} - 2, \qquad c(\omega) = \frac{\overline{\omega}}{2\overline{\omega} - 1}$$

est un système de substitutions génératrices de $\overline{\Gamma}'$, et, ensuite, que

$$s(\omega) = \omega + 2, \qquad t(\omega) = \frac{\omega}{2\omega + 1}$$

est un tel système pour le groupe Γ'; de là, se déduit la région fondamentale de ce dernier groupe.

Cette région fondamentale n'est autre qu'un assemblage de six *doubles-triangles* (*Doppeldreiecke*) ou de douze *triangles élémentaires* du damier modulaire. En choisissant convenablement ces douze triangles, on peut faire en sorte que six points équivalents quelconques de ces triangles se correspondent par les substitutions

$$\omega_0 = \omega_0, \qquad \omega_1 = \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0}, \qquad \omega_2 = \frac{-1}{\omega_0 - 1},$$

$$\omega_3 = \omega_0 + 1, \qquad \omega_4 = \frac{-1}{\omega_0}, \qquad \omega_5 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + 1}.$$

Soient $V_0 = 1$, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ces six substitutions, et 1, v_1, v_2, ... les substitutions du sous-groupe Γ' : les substitutions du groupe modulaire Γ sont données par le Tableau

1,	v_1,	v_2,	v_3,	....
V_1,	$v_1 V_1$,	$v_2 V_1$,	$v_3 V_1$,	....
...,	.....,	.....,	.....,	....
V_5,	$v_1 V_5$,	$v_2 V_5$,	$v_3 V_5$,	....

On en conclut que Γ' est d'indice égal à six, d'où la notation Γ_6 pour le sous-groupe considéré. Le calcul direct montre que ce

sous-groupe est un *sous-groupe invariant* [1] dans le groupe Γ et dans le groupe $\bar{\Gamma}$.

Au sous-groupe Γ_6, on fait correspondre un groupe du sixième ordre G_6, en considérant comme une *même opération* l'une quelconque des substitutions qui composent une des six lignes du Tableau précédent : deux substitutions quelconques appartenant à deux lignes données produisent, en effet, quand on les compose, toujours une substitution appartenant à une même troisième ligne. Les groupes Γ et G_6 sont ainsi isomorphes, mais l'isomorphisme est mériédrique, puisque, à une substitution de Γ, correspond une seule opération de G_6, tandis qu'à une opération de G_6 correspondent une infinité de substitutions de Γ.

Le groupe G_6 contient quatre sous-groupes auxquels correspondent alors quatre sous-groupes du groupe isomorphe Γ, à savoir : un sous-groupe invariant d'indice égal à deux, Γ_2, et trois sous-groupes homologues d'indices égaux à trois, Γ_3, Γ'_3, Γ''_3. Les régions fondamentales pour chacun de ces sous-groupes s'obtiennent aisément.

La région fondamentale F_6 qui correspond au groupe Γ_6 peut être déformée de façon que les côtés homologues viennent se souder les uns aux autres en leurs points correspondants ; on obtient ainsi un plan (une surface simplement connexe, $p = 0$) divisé en douze triangles élémentaires : c'est une *division diédrique,* d'où la qualification de *régulière* donnée à la surface F_6 ; cette régularité est d'ailleurs l'apparence géométrique de ce fait que Γ_6 est un sous-groupe invariant dans Γ. La surface F_6 est aussi *symétrique,* ce qui correspond à ce fait que Γ_6 est un sous-groupe invariant dans $\bar{\Gamma}$. Les régions fondamentales F_3, F'_3, F''_3, qui correspondent aux sous-groupes Γ_3, Γ'_3, Γ''_3, sont symétriques sans être régulières.

11. Le Chapitre suivant n'est que la généralisation de ce qui vient d'être dit : étant donné un sous-groupe Γ_μ d'indice μ, on obtient une région fondamentale F_μ pour ce sous-groupe en appliquant au triangle générateur du damier modulaire μ substitutions

---

[1] A l'exemple de M. Sophus Lie, nous nous servons du mot *invariant* au lieu du mot *distingué* (*ausgezeichnet*).

convenables du groupe Γ; les substitutions par lesquelles se correspondent, deux à deux, les côtés de la région fondamentale sont un système de substitutions génératrices du sous-groupe Γ_μ.

Si Γ_μ est un sous-groupe invariant dans Γ, il lui correspond un groupe fini G_μ qui sert de base à la recherche de sous-groupes de Γ.

Par déformation du polygone F_μ et accolement des côtés correspondants, on obtient une surface fermée F_μ dont le genre est dit le *genre du sous-groupe* Γ_μ; il existe entre la division en doubles-triangles de cette surface et celle du plan qui correspond au sous-groupe Γ_μ une correspondance univoque non réciproque : à un double-triangle du plan correspond un double-triangle de F_μ; à un double-triangle de F_μ correspondent une infinité de doubles-triangles du plan, équivalents relativement aux substitutions de Γ_μ. La surface Γ_μ peut être régulière et symétrique, ou partiellement régulière et symétrique.

Le Chapitre se termine par quelques applications numériques de la formule qui donne le genre de la surface F_μ.

12. Au surplus, cette surface F_μ joue le rôle fondamental dans le Chapitre qui vient ensuite où elle sert à la définition de tous les sous-groupes de groupe modulaire. Cette surface porte 2μ triangles élémentaires ayant chacun pour sommets trois points a, b, c correspondant respectivement aux points i, ρ, $i\infty$ du plan; tout sommet a est commun à deux ou à quatre triangles, tout sommet b à deux ou à six triangles, enfin tout sommet c à un nombre pair quelconque de triangles.

Supposons-nous maintenant donnée *a priori* une surface fermée F_μ, de genre quelconque et portant un réseau de triangles satisfaisant aux conditions précédentes; en faisant correspondre un triangle déterminé du réseau à un triangle déterminé du damier modulaire, on établit aisément une correspondance univoque et réciproque entre les triangles du réseau et les 2μ triangles élémentaires d'un polygone F_μ du damier. Ce polygone F_μ est alors la région fondamentale d'un sous-groupe Γ_μ, d'indice μ, qui se trouve défini par un système de substitutions génératrices. En faisant correspondre deux autres triangles initiaux du réseau et du damier modulaire, on obtiendrait un sous-groupe homologue au

sous-groupe Γ_μ. La surface F_μ définit donc un système de sous-groupes, d'indice μ, homologues dans le groupe Γ.

Les divisions de la sphère qui correspondent aux polyèdres réguliers offrent des exemples immédiats de surface F_μ, de genre zéro; il leur correspond des sous-groupes Γ_6, Γ_{12}, Γ_{24}, Γ_{60} de Γ; les régions fondamentales et les systèmes de substitutions génératrices sont donnés pour chacun d'eux : ce sont les seuls sous-groupes de genre zéro, invariants dans Γ.

Le Chapitre se termine d'ailleurs par d'autres applications; après avoir établi, pour un sous-groupe, la notion de *classe*, basée sur la considération de l'*amplitude* des substitutions paraboliques qu'il renferme, l'auteur étudie un sous-groupe invariant de la sixième classe et d'indice égal à 72, puis un sous-groupe invariant de la septième classe et d'indice égal à 168.

13. Ces applications, basées sur des considérations géométriques, ne peuvent d'ailleurs être poussées bien loin, à cause de la complication extrême que ne tardent pas à présenter les polygones F_μ, dès que μ devient un peu considérable; aussi les trois Chapitres qui terminent la deuxième Section sont-ils conçus dans une méthode entièrement différente et purement arithmétique. Ils sont consacrés à l'étude d'une classe particulière de sous-groupes auxquels M. Klein a donné le nom de *groupes de congruences* (*Congruenzgruppen*).

Un *groupe principal de congruence* (*Hauptcongruenzgruppe*) du $n^{\text{ième}}$ degré est composé des substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

qui satisfont aux conditions

$$\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n}.$$

Nous en avons vu, dans la définition de Γ_6, un exemple où le degré est égal à deux. Le groupe principal de congruence du $n^{\text{ième}}$ degré est d'ailleurs un sous-groupe commun à une série d'autres sous-groupes de Γ, qui se laissent caractériser par des congruences de module égal à n et qui sont alors les *groupes de congruences* du $n^{\text{ième}}$ degré.

Quelques sous-groupes particuliers sont complètement étudiés, d'après les travaux de Serret et de M. Gierster.

14. Avec la troisième Section de l'Ouvrage, nous abordons l'étude du second des deux problèmes fondamentaux.

Les deux premiers Chapitres sont consacrés à une très belle exposition de la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, par l'emploi des surfaces de Riemann.

Étant donnée une fonction algébrique w, définie par l'équation

$$f(w, z) = 0$$

de degré μ en w, il lui correspond une surface de Riemann à μ feuillets; toute fonction rationnelle de w et de z est une fonction uniforme sur cette surface de Riemann et est une fonction algébrique de z; réciproquement, toute fonction de z qui a les caractères des fonctions algébriques, et qui est uniforme sur la surface de Riemann est exprimable rationnellement en fonction de w et de z. Les intégrales abéliennes qui correspondent à la surface et les périodes sont ensuite définies, puis enfin les potentiels.

La question inverse est ensuite traitée : étant donnée, *a priori*, une surface de Riemann, établir l'existence de potentiels, d'intégrales abéliennes de première et de seconde espèce correspondant à cette surface, et nous avons une courte esquisse du principe de Dirichlet, d'après les travaux de MM. Neumann et Schwarz [1]. L'existence de fonctions algébriques correspondant à la surface de Riemann considérée est alors établie; les cas de $p = 0$, $p = 1$ et $p > 1$ sont successivement examinés.

Dans le cas de $p = 0$, l'existence est établie d'une fonction algébrique principale (*Hauptfunction*) w, au moyen de laquelle z s'exprime rationnellement, en sorte que l'ensemble des fonctions algébriques attachées à la surface n'est autre que l'ensemble des fonctions rationnelles de w; il y a ∞^3 telles fonctions principales exprimables linéairement par l'une quelconque d'entre elles.

Dans le cas de $p = 1$, toutes les fonctions algébriques de la

(1) M. Jules Riemann a repris dans sa Thèse la méthode de M. Schwarz en la complétant.

surface sont exprimables rationnellement au moyen de deux d'entre elles, p et p', liées par la relation

$$\mathrm{p}'^2 = 4\mathrm{p}^3 - g_2\mathrm{p} - g_3,$$

et, réciproquement, toute fonction rationnelle de p et de p' est une fonction algébrique attachée à la surface.

Enfin, si p est supérieur à 1, deux cas sont à distinguer, suivant qu'il existe un *élément* hyperelliptique ou non. Dans le premier cas, toutes les fonctions algébriques s'expriment rationnellement au moyen d'une fonction z et du radical hyperelliptique $\sqrt{f(z)}$ dans le second cas elles; s'expriment rationnellement au moyen de p fonctions linéairement indépendantes φ, qui sont les dérivées, par rapport à z, d'un système de p intégrales indépendantes de première espèce.

15. Dans le troisième Chapitre, nous revenons à la théorie des fonctions modulaires, et c'est encore la surface F_μ qui joue le rôle fondamental.

Imaginons, en effet, que cette surface F_μ qui a été obtenue par la déformation d'un polygone générateur du sous-groupe Γ_μ, polygone que nous représenterons par $F_\mu^{(\omega)}$, porte, en chacun de ses points, la valeur correspondante de la fonction $J(\omega)$; sur la surface, J acquiert μ fois une valeur donnée quelconque, sauf, peut-être, les valeurs particulières 1, 0, ∞ qui correspondent aux points a, b, c de F_μ. Au moyen de ces valeurs de J, nous pouvons alors représenter la surface F_μ sur le plan J, et l'on obtient manifestement ainsi une surface de Riemann à μ feuillets reliés entre eux aux seuls points 1, 0, ∞. Cette surface de Riemann est, si l'on veut, la représentation conforme du polygone $F_\mu^{(\omega)}$ par la fonction $J(\omega)$; nous la nommerons $F_\mu^{(J)}$; elle est de genre p, comme la surface F_μ, et la nature de la connexion des différents feuillets aux points 1, 0, ∞ nous est connue : au point 1, un feuillet quelconque est isolé ou appartient à un cycle de deux feuillets; au point 0, un feuillet quelconque est isolé ou appartient à un cycle de trois feuillets; enfin, au point ∞, les feuillets peuvent offrir toutes les dispositions de cycles possibles. Mais, réciproquement, il est évident qu'une surface de Riemann $F_\mu^{(J)}$ de cette nature, pouvant être déformée et ramenée à une surface fermée F_μ, puis développée sur le plan ω

en un polygone $F_\mu^{(\omega)}$, elle définit un système de sous-groupes homologues Γ_μ de Γ, d'indice μ et de genre p.

A un contour fermé tracé sur la surface $F_\mu^{(J)}$ correspond évidemment, dans le plan ω, un chemin allant d'un point à un point équivalent relativement au sous-groupe Γ_μ, en sorte que, J décrivant le contour fermé, $\omega(J)$ subit une substitution linéaire du sous-groupe Γ_μ; réciproquement, si ω va, dans son plan, d'un point à un point équivalent relativement au sous-groupe Γ_μ, on obtient sur la surface de Riemann $F_\mu^{(J)}$ un contour fermé, un contour de période s'il ne peut être réduit à un point, et la fonction $J(\omega)$ reprend sa valeur primitive.

Considérons maintenant une fonction algébrique $z(J)$ et une intégrale abélienne de première espèce $j(J)$ attachées à la surface de Riemann $F_\mu^{(J)}$; quand J décrit un contour de période, $z(J)$ reprend sa valeur primitive, $j(J)$ s'accroît d'une période; si donc on regarde maintenant J comme une fonction de ω, on arrive à cette conclusion que, quand ω va d'un point à un point équivalent relativement au sous-groupe Γ_μ, $z(\omega)$ reprend sa valeur primitive, et $j(\omega)$ varie d'une quantité constante, qui ne dépend que de la substitution par laquelle on passe de l'origine du chemin décrit par ω à son extrémité.

Ainsi, $z(\omega)$ est une fonction uniforme de ω qui admet toutes les substitutions du sous-groupe Γ_μ; c'est une fonction modulaire relative à ce sous-groupe : c'est une fonction modulaire *algébrique*. La fonction $j(\omega)$, qui est finie sur toute la surface de Riemann, et qui varie d'une quantité constante, quand on effectue sur ω l'une des substitutions de Γ_μ, est dite une fonction modulaire *transcendante* relative au sous-groupe Γ_μ.

Observons enfin que, sur la surface de Riemann $F_\mu^{(J)}$, J acquiert μ fois la même valeur; supposons que, sur cette surface, z acquiert m fois une même valeur quelconque; alors les deux fonctions $z(\omega)$ et $J(\omega)$ sont manifestement liées par une équation algébrique irréductible de degré μ par rapport à J et m par rapport à z

$$f(z, J) = 0.$$

Toute autre fonction modulaire relative au sous-groupe Γ_μ est exprimable rationnellement en fonction de z et de J, et l'équation

précédente est la résolvante de l'équation modulaire qui correspond à la fonction modulaire z.

Le choix de fonctions algébriques particulières fait, dans l'étude des surfaces de Riemann, pour les trois cas de $p = 0$, $p = 1$ et $p > 1$, permet de toujours ramener la résolvante modulaire à la forme

$$J : J - 1 : 1 = \Phi : X : \Psi,$$

les arguments des polynômes Φ, X, Ψ étant ces fonctions particulières.

Les considérations précédentes sont ensuite développées davantage pour les sous-groupes symétriques, les sous-groupes homologues et les sous-groupes invariants.

Enfin les Chapitres restants sont consacrés aux applications; des exemples numériques sont complètement traités, dans les trois cas de $p = 0$, $p = 1$ et $p > 1$.

16. Nous n'avons pu donner, dans les courtes pages qui précèdent, qu'une idée très imparfaite de la richesse des matières qu'embrasse le livre de M. Fricke; il a su donner à la pensée de l'illustre maître de Gœttingue, un développement digne de son ampleur; pris dans son ensemble, le livre, en raison du nombre des théories qui y sont complètement étudiées ou simplement touchées, représente certainement tout un vaste côté de la Science mathématique, rendu plus intéressant encore par le caractère des puissantes méthodes dont il est pénétré, caractère qui se retrouve, à des degrés divers, dans les travaux de tous ceux qui se rattachent à l'école de M. Klein. Il sera d'autant plus lu et goûté en France, que, par ses magnifiques travaux, M. Poincaré s'étant, d'un seul coup, élevé jusqu'au faîte de l'édifice à la base duquel sont les fonctions modulaires elliptiques, l'étude approfondie de celles-ci apparaît bien comme le meilleur moyen de parvenir jusqu'à ces hauts sommets.

Henri Padé.

MÉLANGES.

SUR UNE INTÉGRALE D'EULER;

Par M. LERCH.

L'importance que joue la formule d'Euler

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

justifie d'en chercher une démonstration élémentaire qui n'emprunte rien à des théories étrangères au Calcul intégral. A cet effet, je suppose a réel et alors contenu entre zéro et l'unité, et en partant de l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}\,dz}{1 - ze^{i\varphi}},$$

je me borne d'abord à prouver qu'elle ne dépend point du paramètre réel φ supposé entre o et 2π. Posons, pour abréger,

$$f(\varphi, z) = \frac{e^{ai\varphi} z^{a-1}}{1 - ze^{i\varphi}},$$

$$f'(\varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial\varphi} = ie^{ai\varphi} z^{a-1}\left(\frac{a}{1 - ze^{i\varphi}} + \frac{ze^{i\varphi}}{(1 - ze^{i\varphi})^2}\right),$$

et observons que

$$f'(\varphi, z)\,dz = ie^{ai\varphi}\,d\,\frac{z^a}{1 - ze^{i\varphi}},$$

où la différentielle est prise par rapport à z. Si l'on applique la règle de la différentiation sous le signe somme, on a évidemment

$$\frac{d\mathrm{J}}{d\varphi} = \int_0^\infty f'(\varphi, z)\,dz = ie^{ai\varphi}\int_0^\infty d\,\frac{z^a}{1 - ze^{i\varphi}}$$

ou bien

$$\frac{d\mathrm{J}}{d\varphi} = 0.$$

Cette équation prouve que l'intégrale J ne varie pas avec φ, comme nous l'avons affirmé. Mais la rigueur exige une considération plus profonde en ce qui concerne l'égalité que nous venons

d'employer

$$(a)\qquad \frac{d}{d\varphi}\int_0^\infty f(\varphi, z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\varphi} f(\varphi, z)\,dz.$$

Pour l'établir, décomposons l'intégrale en la série suivante

$$J = \int_0^\infty f(\varphi, z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} f(\varphi, z)\,dz;$$

les termes de cette série sont des fonctions continues de la variable φ, supposée entre o et 2π, et admettent la différentiation sous le signe somme, à savoir

$$\frac{d}{d\varphi}\int_n^{n+1} f(\varphi, z)\,dz = \int_n^{n+1} f'(\varphi, z)\,dz.$$

Si nous prouvons alors que la série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} f'(\varphi, z)\,dz$$

est uniformément convergente lorsque φ est contenu dans un intervalle $(\varepsilon, \ldots, 2\pi-\varepsilon)$, où ε est une quantité positive inférieure à $\frac{\pi}{2}$, nous aurons l'égalité

$$S = \frac{dJ}{d\varphi},$$

comme il résulte d'un théorème bien connu concernant la différentiation des séries, et puisque la série S n'est autre chose que l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(\varphi, z)\,dz,$$

il s'ensuit que l'égalité (a) sera mise hors de doute. Or la convergence de la série S découle de l'inégalité

$$|f'(\varphi, z)| < z^{a-1}\left|\frac{a}{\sqrt{(1-z\cos\varphi)^2+z^2\sin^2\varphi}} + \frac{z}{(1-z\cos\varphi)^2+z^2\sin^2\varphi}\right|,$$

qui donne en effet

$$\left|\int_n^{n+1} f'(\varphi, z)\,dz\right| < \int_n^{n+1}\left(\frac{a z^{a-1}}{\sqrt{1-2z\cos\varphi+z^2}} + \frac{z^a}{1-2z\cos\varphi+z^2}\right)dz.$$

ce qui prouve que les modules des termes de la série S sont inférieurs à des termes correspondants de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\left(\frac{a z^{a-1}}{\sqrt{1-2z\cos\varphi+z^2}}+\frac{z^a}{1-2z\cos\varphi+z^2}\right)dz$$
$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{a z^{a-1}}{\sqrt{1-2z\cos\varphi+z^2}}+\frac{z^a}{1-2z\cos\varphi+z^2}\right)dz,$$

termes qui ne dépendent pas de φ. La convergence de S est donc absolue et uniforme par rapport à φ; l'égalité (a) est alors établie et le raisonnement développé plus haut est donc légitime.

Cela étant, prenons dans l'intégrale J une fois $\varphi=\pi$ et l'autre $\varphi=\frac{\pi}{2}$; nous aurons

$$\mathrm{J}=e^{ai\pi}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}=e^{\frac{1}{2}ai\pi}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1-iz},$$

d'où

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1-iz}=e^{\frac{1}{2}ai\pi}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}.$$

En égalant les parties réelles, nous aurons

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z^2}=\cos\frac{a\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}\,dz}{1+z},$$

ou bien, en transformant le premier membre par la substitution $z^2=x$,

$$(b)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{a}{2}-1}\,dx}{1+x}=2\cos\frac{a\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

Si nous posons alors

$$\varphi(a)=\sin a\pi\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

l'équation (b) s'écrira $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\varphi(a)$, et il s'ensuit

$$\varphi(a)=\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=\varphi\left(\frac{a}{4}\right)=\varphi\left(\frac{a}{8}\right)=\ldots=\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),$$

d'où enfin

$$\varphi(a)=\lim_{n=\infty}\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

Si la fonction $\varphi(a)$ est finie et continue au point $a=0$, cette limite-ci sera évidemment égale à $\varphi(0)$, de manière que nous aurons

$$(c) \qquad \varphi(a) = \varphi(0).$$

Mais on a

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

et puis

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \left(x^{a-1} - \frac{x^a}{1+x}\right)dx,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{1}{a} - \int_0^1 \frac{x^a\,dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{1}{a} + f(a).$$

en représentant par $f(a)$ les deux autres termes qui figurent au second membre et qui sont des fonctions finies et continues au point $a=0$. Nous aurons alors

$$\varphi(a) = \frac{\sin a\pi}{a} + \sin a\pi\, f(a),$$

ce qui met en évidence la continuité de la fonction $\varphi(a)$ au point $a=0$ et donne en même temps $\varphi(0)=\pi$; l'égalité (c) devient alors

$$\varphi(a) = \pi$$

ou bien

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

L'équation à laquelle nous sommes ainsi parvenu

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1-ze^{i\varphi}} = \frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi}, \qquad 0 < \varphi < 2\pi$$

est d'une grande importance, puisqu'elle donne presque immédiatement un développement bien connu qui contient plusieurs

formules fondamentales de l'Analyse et a rendu de grands services dans quelques belles études de M. Kronecker (¹).

Cette intégrale peut s'écrire en effet

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1}\,dz}{1-ze^{i\varphi}} + \int_1^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1-ze^{i\varphi}}$$

ou, en transformant le second terme à l'aide de la substitution $z=\frac{1}{x}$,

(3) $$\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{e^{-i\varphi}x^{-a}}{1-xe^{-i\varphi}} \right) dx = \frac{\pi e^{a(\pi-\varphi)i}}{\sin a\pi},$$

d'où l'on tire, en employant les développements,

$$\frac{1}{1-xe^{-i\varphi}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} x^\nu e^{-\nu i\varphi} + \frac{x^n e^{-ni\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}},$$

la formule suivante

$$\frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{\nu i\varphi}}{a+\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-(\nu+1)i\varphi}}{a-\nu-1}$$
$$+ \int_0^1 \left(\frac{x^{n+a-1}e^{ni\varphi}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{x^{n-a}e^{-(n+1)i\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}} \right) dx;$$

en passant à la limite de n infini, on voit aisément que la dernière intégrale disparaît, de sorte qu'il vient l'équation demandée

$$\frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu i\varphi}}{a-\nu},$$

qui recevra une forme plus élégante en écrivant $2\pi-\varphi=2u\pi$, à savoir

(4) $$2\pi i\,\frac{e^{2au\pi i}}{e^{2a\pi i}-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu u\pi i}}{a-\nu},$$

où il faut ajouter la condition nécessaire $0<u<1$.

Dans le cours de la démonstration, nous avons supposé qu'aussi

(¹) *Voir* notre remarque publiée dans le *Journal de M. Teixeira*, t. X, p. [illegible] (1892).

la quantité a était réelle et entre o et 1, mais, puisque les deux membres de l'équation (4) sont des fonctions analytiques uniformes de a, cette équation subsistera pour chaque valeur de la variable complexe.

Parmi les conséquences auxquelles conduit la formule (4) nous signalerons la suivante; en comparant les parties réelles, il vient

$$\frac{\pi \cos a\pi(2u-1)}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a \cos 2\nu u\pi}{a^2-\nu^2};$$

le second membre étant uniformément convergent par rapport à u, il est permis de passer à la limite de $u=1$, ce qui donne

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-\nu^2}$$

ou bien

$$(5) \qquad \pi \cot a\pi = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{a-\nu}.$$

2. Cette formule conduit aisément à la formule d'Euler

$$(6) \qquad \int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz = \pi \cot a\pi;$$

si nous voulons l'obtenir sans employer les développements en séries, il suffit d'employer la formule (2)

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\, dz}{1-z e^{i\varphi}} = \frac{\pi e^{ai(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi}$$

et la suivante, qui s'en déduit en remplaçant a par $1-a$,

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{-a}\, dz}{1-z e^{i\varphi}} = \frac{\pi e^{i(1-a)(\pi-\varphi)}}{\sin a\pi}.$$

En retranchant, il vient

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z e^{i\varphi}}\, dz = \frac{\pi}{\sin a\pi} \left[e^{ai(\pi-\varphi)} - e^{i(1-a)(\pi-\varphi)} \right];$$

ici il est permis de passer à la limite de $\varphi = 0$, ce qui donne

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz = \frac{\pi}{\sin a\pi} \left(e^{ai\pi} - e^{(1-a)i\pi} \right) = 2\pi \cot a\pi$$

En décomposant l'intégrale en

$$\int_0^1 - \int_1^\infty,$$

et en écrivant $z = \frac{1}{x}$ dans la seconde partie, nous aurons

$$2\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx = 2\pi \cot a\pi,$$

ce qui est bien la formule (6).

Une seconde voie conduit aussi directement aux valeurs des intégrales (1) et (6). L'intégrale J considérée plus haut, qui peut s'écrire, comme nous avons remarqué,

$$J = e^{ai\varphi}\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-xe^{i\varphi}} - \frac{e^{-i\varphi}x^{-a}}{1-xe^{-i\varphi}}\right)dx,$$

a pour valeur

$$J = e^{ai\pi}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x},$$

car nous avons fait voir qu'elle ne dépend pas de φ. En passant à la limite de $\varphi = 0$, on trouve après une digression que nous avons développée en détail dans une Note tchèque publiée dans le *Časopis pro pěstování Mathematiky a Fysiky*, que l'on a

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx - \pi i.$$

On a ainsi l'égalité

$$e^{ai\pi}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} - \pi i,$$

et la comparaison des parties réelles et des parties imaginaires donne

$$\cos a\pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx,$$

$$\sin a\pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \pi,$$

ce qui donne immédiatement les équations (1) et (6).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BACHMANN (P.). — *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen.* Gr.-8°, x-151 S. Leipzig, Teubner. 4 M.

BALL (W.-W.-R.). — *Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times.* 2e édit. Post-8°, 236 p. London, Macmillan. 7 sh.

CANTOR (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 2 Bd. von 1200-1668. 2. Thl. Gr. 8°, m. Fig. Leipzig, Teubner. 10 M.

GREENHILL (A.-G.). — *The applications of Elliptic Functions.* 8°, 350 p. London, Macmillan. 12 sh.

KRUG (A.). — *Zur linearen Differentialgleichung.* 3. Ordnung. Gr.-8°, 81 S. Prag, Dominicus. 2 M.

PARAF (A.). — *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre.* In-4°, 80 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

VESSIOT (E.). — *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires.* In-4°, 93 p. Paris, Gauthier-Villars.

WENZEL (L.). — *Logische Operationen in der Mathematik u. beim mathem. Unterrichte* (Fortsetzg.). Prog. Gr. 8°, 22 S. m. 2 fig. Klagenfurt, v. Kleinmayr. 1 M.

FONTENÉ (G.). — *L'hyperespace à (n — 1) dimensions, propriétés métriques de la corrélation générale.* In-8°, XVIII-133 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

HUNTER (H. St. J.). — *Decimal Approximations : a Chapter on Arithmetic.* 18°, 56 p. London Macmillan. 1 sh. 6 d.

KRAZER (A. u. F. PRIM.). — *Neue Grundlagen einer Theorie de rallgemeinen Thetafunctionen.* Gr. 4°, XI-133 S. Leipzig, Teubner 7 M. 20 Pf.

LAGRANGE. — *Œuvres de Lagrange.* Publiées par les soins de M. J.-A. Serret et de M. Gaston Darboux. T. XIV et dernier. In-4°, XII-349 p. avec fig. et planches. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

MARCEL (G.). — *Note sur une sphère terrestre en cuivre faite à Rouen à la fin du* XVIe *siècle.* In-4°, 10 p. Rouen, imp. Cagniard.

RIEMANN'S (B.). — *Gesammelte mathematische Werke und wissen-*

schaftlicher Nachlass. Herausgeg. von H. Weber. 2 Aufl. bearb. von H. Weber. gr. 8°, x-558 S. m. Bildniss. Leipzig, Teubner. 18 M.

Sturm (R.). — *Die Gebilde* 1. *und* 2. *Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.* 1. Thl. *Der lineare Complex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Complex.* Gr. 8°, xiv-386 S. Leipzig, Teubner. 12 M.

Autonne (L.). — *Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.* In-8°, 124 p. Paris, Masson. 9 fr.

Demartres. — *Cours d'Analyse.* 2e Partie : *Propriété des fonctions analytiques.* In-4°, 172 p. avec fig. Paris, Hermann.

Hoüel (J.). — *Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des logarithmes d'addition et de soustraction ou logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles.* Nouvelle édit. In-8°, xlviii-119 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Bergbohm (J.). — *Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- u. Numeralrechnung. Die rationalen algebr. und die goniometr. Integrale.* Gr. 8°, vi-66 S. Leipzig, Teubner. 1 M.

Flammarion (C.). — *La planète Mars et ses conditions d'habitabilité. Synthèse générale de toutes les observations.* Gr. in-8°, 600 p. avec 580 dessins télescopiques et 23 cartes. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.; cartonné 15 fr.

Klein (F.). — *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke.* 2. Bd. *Fortbildung und Anwendung der Theorie.* Lex.-8°, xv-712 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. 24 M.

Reye (Th.). — *Geometrie der Lage.* Vorträge. 2. u. 3. Abthlg. 3. Aufl. Gr.-8s. Leipzig, Baumgärtner. 15 M.

Bachmann (P.). — *Die Elemente der Zahlentheorie.* Gr. 8°, xii-264 S. Leipzig, Teubner. 6 M. 40 Pf.

Haas (A.). — *Lehrbuch der Differentialrechnung.* 2. Thl. : *Die vollständige Differentiation entwickelter u. nicht entwickelter Functionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmt Formen, Maxima und Minima. Bearb. nach System Kleyer.* Gr. 8°, viii-322 S. m. 78 Fig. Stuttgart, Maier. 8 M.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung. 1. Bd.

1890-1891. *Herausgeg. im Auftrage des Vorstandes* von G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Gr. 8°. Berlin, G. Reimer. 7 M. 60 Pf.

Inhalt : Die Chronik der Vereinigung, 1898-91. Bericht über die auf der Versammlung in Halle 1891 gehalt. Vorträge, sowie ein ausführl. Bericht über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert, von W.-F. Meyer. IV, 292 S.

Laisant (C. A.). — *Recueil de problèmes de Mathématiques. Géométrie analytique à deux dimensions (et Géométrie supérieure).* In-8°, x-311 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 50 c.

Maillet. — *Recherches sur les substitutions et en particulier sur les groupes transitifs.* In-4°, 125 p. Paris, Gauthier-Villars.

Molien (Th.). — *Ueber Systeme höherer complexer Zahlen.* Dissert. gr. 8°, 74 S. Dorpat, Karow. 2 M.

Müller (F.). — *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik u. Astronomie bis zum J.* 1500, *mit Hinweis auf die Quellenliteratur.* Gr. 8°, iv-103 S. Leipzig, Teubner. Geb. 2 M. 40 Pf.

Perchot (J.). — *Sur les mouvements des nœuds et du périgée de la Lune, et sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons,* In-4°. 99 p. Paris, Gauthier-Villars.

Reuleaux (F.). — *Die sogenannte Thomas'sche Rechenmaschine. Für Mathematiker, Astronomen, Ingenieure, etc.* 2. Aufl. Gr. 8°, viii-60 S. u. 1 Taf. Leipzig, Felix. 2 M.

Saalschutz (L.). — *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Secanten-Coefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen.* Gr. 8°, viii-208 S. Berlin, Springer. 5 M.

Scheffler (H.). — *Die quadratische Zerfällung der Primzahlen.* Gr. 8°, iii-169 S. Leipzig, Foerster. 3 M.

Vicaire (E.). — *Mémoire sur les propriétés communes à toutes les courbes qui remplissent une certaine condition de minimum ou de maximum.* In-4°, 24 p. Paris, Impr. nationale.

Minchin (G.-M.). — *Hydrostatics and Elementary Hydrokinetics.* Post.-8°, 420 p. London, Frowde 10 sh. 6 d.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XVI.

TABLES



DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XVI; 1892. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XVI.

18115 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVI. — ANNÉE 1892.

(TOME XXVI DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.



SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA.

4e série, t. VII; 1886-87.

Beltrami (*E.*). — Sur l'interprétation mécanique des formules de Maxwell. (3-38).

Les formules en question sont les suivantes :

$$X_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,$$

$$Y_y = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,$$

$$Z_z = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,$$

$$Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dy}\frac{dV}{dz},$$

$$Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dz}\frac{dV}{dx},$$

$$X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dy},$$

étant

$$\Delta_1 V = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2.$$

C'est par elles que Maxwell définit le système des pressions capables de déterminer dans un milieu élastique un champ de force représenté par la fonction

potentielle newtonienne V. Les X_x, X_y, ... sont les composantes de ces pressions suivant la notation de Kirchhoff. L'auteur suppose que le milieu soit homogène et isotrope, et il conclut qu'il n'est pas possible en général de reproduire le système de pressions définies par les formules de Maxwell, au moyen des déformations d'un milieu isotrope.

Saporetti (*A.*). — Méthode universelle pour découvrir aisément les instants du lever et du coucher de la Lune en un lieu quelconque d'Italie; avec douze Tables numériques. (55-65).

Pincherle (*S.*). — Études sur quelques opérations fonctionnelles. (393-442).

On entend par opération fonctionnelle toute opération qui, appliquée à une fonction analytique, donne une fonction analytique. Soient φ la première fonction et ψ la seconde; l'auteur se borne aux relations de la forme suivante

$$(1) \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} A(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

supposant que c soit une ligne fermée. La correspondance est caractérisée par la fonction $A(x, y)$ (fonction caractéristique).

Dans la première Partie de son Mémoire il étudie quelques opérations du type (1). Dans la seconde il s'occupe de l'opération (1) en général, pour le cas où $A(x, y)$ est une fonction rationnelle, et la courbe c est une circonférence, et étudie la manière de varier de ψ lorsqu'on fait varier x dans les diverses régions du plan; il retrouve ainsi le théorème de M. Hermite. Puis il étudie la variation éprouvée par ψ lorsqu'on fait varier la circonférence d'intégration. Il déduit de la relation (1) quelques développements en série, qui ont la propriété d'être des *continuations* l'un de l'autre, comme les développements en série de puissances d'une fonction analytique. Enfin il traite le problème de l'inversion de l'opération (1), c'est-à-dire la recherche d'une fonction φ, liée à la fonction donnée ψ par la relation (1).

Righi (*A.*). — Études sur la polarisation rotatoire magnétique. (443-547, 1 pl.).

Retali (*V.*). — Observations analytico-géométriques sur la projection imaginaire des courbes du deuxième ordre. (601-632).

Soit K^2 une conique donnée et A un point de son plan; soient M, N les intersections de K^2 avec la polaire de A. Si B, C sont les intersections de K^2 avec un rayon mobile autour de A, les deux points (MB, NC) et (MC, NB) décrivent une même conique K_A^2. Ces deux coniques K^2 et K_A^2 sont appelées par l'auteur des coniques *conjuguées*. Il étudie dans ce travail comment l'espèce de K_A^2 dépend de la position du point A, et quelques autres questions relatives à ces coniques. Entre autres, il détermine les points pour lesquels les coniques conjuguées sont des cercles, et donne des constructions simples pour ces cercles lorsqu'ils sont réels, et pour leurs représentations idéales lorsqu'ils sont imaginaires.

Benetti (*J.*). — Théorie générale des pompes centrifuges. (655-699, 1 pl.).

Ruffini (*F.-P.*). — Sur les coniques polaires inclinées pour l'angle zéro, principalement en relation avec les coniques conjuguées. (753-772).

La théorie des polaires inclinées a été donnée en 1878 dans ce *Bulletin* (2e série, t. II) par M. le général Dewulf, alors commandant du Génie. La polaire inclinée d'un point P par rapport à une courbe C^n de l'ordre n et pour l'angle φ est le lieu d'un point M tel que sa droite polaire par rapport à C^n soit inclinée de l'angle φ sur le rayon PM.

M. Ruffini se borne au cas des coniques, et plus spécialement à celui de $\varphi = 0$, ou des polaires *parallèles*. Il donne les relations entre les polaires parallèles prises par rapport aux coniques de certaines séries, les relations entre les polaires parallèles par rapport à des coniques conjuguées, et quelques autres propriétés.

Tome VII; 1887-88.

Razzaboni (*C.*). — Sur la manière de déduire les équations générales du mouvement des fluides et celles particulières relatives au mouvement rectiligne des liquides. (41-48).

Saporetti (*A.*). — Méthode analytique pour développer un arc circulaire en fonction trigonométrique d'un autre, en connaissant le quotient de leurs tangentes trigonométriques. (57-62).

Établissement de la formule

$$y = x - \theta \sin 2x + \tfrac{1}{2}\theta^2 \sin 4x - \tfrac{1}{3}\theta^3 \sin 6x + \ldots,$$

x et y étant deux arcs de cercle, et

$$\theta = \frac{1-m}{1+m},$$

où

$$m = \frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x}.$$

Riccardi (*P.*). — Sur une méthode ancienne pour déterminer le semi-diamètre de la Terre. (63-68, 1 pl.).

C'est la méthode de Maurolicus modifiée par Wright, suivant laquelle on déduit la longueur du rayon terrestre de la dépression de l'horizon à une hauteur connue. L'auteur propose d'employer cette méthode dans certaines recherches pratiques et montre aussi comment on pourrait s'en servir pour déterminer les axes du sphéroïde terrestre.

Dainelli (*U.*). — Sur le mouvement d'un point matériel libre soumis à une force dirigée constamment à une droite fixe. (91-101).

La vitesse est inversement proportionnelle à la distance du point mobile M à la droite fixe et au cosinus de l'angle que le plan P passant par cette droite et par la direction de la force fait avec la normale en M à la trajectoire.

La force est proportionnelle au sinus de l'angle que le plan P fait avec le plan osculateur; inversement proportionnelle au rayon de courbure, au carré de la distance du point mobile à la droite fixe et au cube du cosinus de l'angle que le plan P fait avec le plan normal à la trajectoire.

Pincherle (*S.*). — Sur la transformation de Laplace et sur quelques-unes de ses applications. (125-143).

C'est la transformation suivante par laquelle on passe d'une fonction analytique quelconque $\varphi(y)$ à une autre $f(x)$

$$f(x) = \int e^{xy}\,\varphi(y)\,dy,$$

l'intégrale étant étendue à une ligne du plan de y. L'auteur considère cette transformation comme une opération fonctionnelle et montre qu'on peut en déduire plusieurs classes de fonctions transcendentales, et particulièrement de fonctions entières, et qu'on peut en déduire aussi toute la théorie de Neumann et Heine sur les fonctions cylindriques.

Beltrami (*E.*). — Sur quelques problèmes de propagation de la chaleur. (291-326).

L'auteur étudie le cas d'une sphère où la température varie par couches concentriques. Il considère une fonction U définie par l'expression

$$U = \int k(\xi, \eta, \zeta)\,\psi(r, t)\,\frac{dS}{r},$$

étant

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

dS étant un élément de volume autour du point ξ, η, ζ de l'espace d'intégration S, et ψ s'annulant pour $r = 0$. En prenant

$$(1) \qquad \psi = r\,t^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2t}},$$

on obtient une fonction

$$U = t^{-\frac{3}{2}} \int k(\xi, \eta, \zeta)\,e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\,dS,$$

satisfaisant dans tout l'espace à l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta_2 U\,;$$

c'est la fonction qui exprime la température d'un espace indéfini lorsqu'on

connait la température initiale en chaque point. En prenant

$$\psi = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}},$$

qui ne s'évanouit pas pour $r = 0$, on a

$$(3) \qquad \mathrm{U} = t^{-\frac{1}{2}} \int h(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \frac{dS}{r},$$

fonction qui ne satisfait à l'équation (2) que pour les points extérieurs à S. Mais on peut en déduire une fonction satisfaisant à (2) en tout l'espace, en étendant l'intégrale à une *surface* quelconque σ. Cette fonction correspond à un état initial où la température est supposée nulle dans l'espace limité par la surface σ. C'est sur cette seconde fonction que l'auteur s'appuie plus spécialement dans ses développements.

Pour le cas d'une sphère, il trouve que la température d'un point intérieur est donnée par

$$\mathrm{U} = \frac{2\pi \mathrm{R}}{r\sqrt{t}} \int_{\mathrm{R}-r}^{\mathrm{R}+r} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}} d\rho,$$

R étant le rayon, r la distance du centre au point considéré; la température initiale étant nulle en tout point, et la surface limite $r = \mathrm{R}$ étant maintenue à une température variable suivant la loi

$$\mathrm{U}' = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} \int_0^{2\mathrm{R}} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}} d\rho.$$

L'auteur se propose ensuite un problème plus général : déterminer l'expression u de la température en un point quelconque, dans l'hypothèse que la température à la surface varie avec le temps suivant une loi *quelconque*. Il trouve

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} u = \frac{2\mathrm{R}}{r\sqrt{\pi}} \Bigg\{ & \int_{\frac{\mathrm{R}-r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left[t - \frac{(\mathrm{R}-r)^2}{4a^2 s^2}\right] e^{-s^2} ds \\ & - \int_{\frac{\mathrm{R}+r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left[t - \frac{(\mathrm{R}+r)^2}{4a^2 s^2}\right] e^{-s^2} ds \Bigg\}, \end{aligned} \right.$$

et la variation de la température à la surface est vraiment arbitraire, puisqu'elle est représentée par l'expression

$$(5) \qquad u' = f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\mathrm{R}}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{\mathrm{R}^2}{a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds,$$

renfermant la fonction arbitraire f. Après cela, et en vue des applications de la formule (4), l'auteur s'occupe de la résolution de l'équation fonctionnelle (5) par rapport à f; c'est-à-dire que, étant donnée une fonction $\mathrm{F}(t)$, il détermine la forme de $f(t)$ de manière à avoir

$$f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\mathrm{R}}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{\mathrm{R}^2}{a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds = \mathrm{F}(t).$$

Pour cette résolution, qui est bien remarquable, il emploie l'intégrale

$$H = \int_a^b e^{-\frac{A^2}{x-a} - \frac{B^2}{b-x}} [(b-x)(x-a)]^{-\frac{3}{2}} dx,$$

a et b étant des constantes réelles ($b > a$), et A, B des constantes réelles et positives. Par une méthode très élégante, il obtient

$$H = \frac{(A+B)\sqrt{\pi}}{AB} e^{-\frac{(A+B)^2}{b-a}} (b-a)^{-\frac{3}{2}},$$

et, en appliquant ce résultat, il trouve la forme cherchée de $f(t)$

$$f(t) = F(t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{B}{a\sqrt{t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{B^2}{a^2 s^2}\right) \sum_1^{\infty} n e^{-n^2 s^2} ds.$$

Dans ce qui suit l'auteur complète la solution du problème, c'est-à-dire la détermination de la température variable à l'intérieur d'une sphère dans les conditions suivantes :

1° Que la température initiale soit nulle en tout point;

2° Que la température à la surface varie avec le temps suivant une loi donnée $F(t)$.

Puis il considère, comme application, le cas où $F(t) = 1$, et le cas où l'espace sphérique a une température initiale $G(r)$.

Riccardi (P.). — Essai d'une bibliographie euclidienne. (401-523).

Première Partie. — Euclide et ses écrits.

Deuxième Partie. — Liste chronologique des éditions des Œuvres d'Euclide.

Saporetti (A.). — Nouvelle analyse pour démontrer la validité de la méthode pratique usuelle des imaginaires, et théorie plus générale que celle qu'on donne ordinairement, sur les relations entre les coefficients des fonctions algébriques entières à une variable et les facteurs linéaires, autant fonctionnels que propres, des équations. (555-571).

Ruffini (F.-P.). — Sur quelques propriétés de la représentation sphérique de Gauss. (661-680).

Les propriétés données par l'auteur ont trait plus spécialement aux courbes dont les tangentes font un angle constant avec les tangentes aux points correspondants de leurs images.

Tome IX; 1888-89.

Pincherle (*S.*). — Sur la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x),$$

à coefficients constants. (45-71).

L'auteur trouve

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\chi(t) e^{-xt}\, dt}{\Sigma h_\nu e^{-\alpha_\nu t}},$$

ayant posé

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

et

$$\chi(t) = \sum \frac{k_n t^n}{n!}.$$

Il traite aussi d'autres questions qui se rattachent à ce problème.

Pincherle (*S.*). — Sur la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\Sigma h_\nu \varphi(x + \alpha_\nu) = f(x),$$

à coefficients rationnels. (181-204).

Dans ce second Mémoire, l'auteur traite le problème précédent pour le cas où les h_ν sont des fonctions rationnelles entières de x

$$h_\nu(x) = \sum_{k=0}^{m} q_{k,\nu}(x + a_\nu)^k.$$

Il rencontre dans cette étude l'équation différentielle linéaire à coefficients transcendants

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s (q_{s,0} + q_{s,1} e^{\alpha_1 t} + q_{s,2} e^{\alpha_2 t} + \ldots + q_{s,p} e^{\alpha_p t}) \psi^{(s)}(t) = \chi(t),$$

où les fonctions ψ et χ proviennent de ce qu'on a posé

$$\varphi(x) = \int e^{xt} \psi(t)\, dt,$$
$$f(x) = \int e^{xt} \chi(t)\, dt,$$

et il étudie la manière dont les intégrales de cette équation se comportent à l'infini.

Retali (*V.*). — Recherche sur l'imaginaire en Géométrie. (259-277, 1 pl.).

L'auteur traite quelques problèmes du premier et du deuxième degré où entrent des éléments imaginaires isolés. Il emploie la méthode de Staudt en la rendant plus facile par la considération de certaines coniques conjuguées.

Riccardi (*P.*). — Essai d'une bibliographie euclidienne. (321-343).

Troisième Partie. — Classification des éditions euclidiennes indiquées dans la liste chronologique (*voir* ci-dessus).

Donati (*L.*). — Sur le travail de déformation des systèmes élastiques. (345-367).

Ruffini (*F.-P.*). — Sur quelques propriétés des coniques conjuguées. (499-536).

On dit que deux coniques sont conjuguées lorsque l'une est sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre. Elles ont un double contact. Si A est le pôle de leur corde de contact, elles sont deux coniques *conjuguées par rapport au point* A suivant la définition que nous avons reportée ci-dessus dans la revue du t. VII (voir *Retali*). L'auteur démontre analytiquement plusieurs propriétés relatives à ces coniques.

Pirondini (*G.*). — Sur les enveloppes de plans et de sphères. (641-683).

Saporetti (*A.*). — Deuxième méthode analytique pour la détermination de l'équation du temps. (685-689).

Razzaboni (*A.*). — Sur les surfaces sur lesquelles deux séries de géodésiques forment un système conjugué. (765-776).

M. Razzaboni donne un criterium différent de celui de Voss pour reconnaître si une surface a la propriété énoncée dans le titre de ce Mémoire, et en l'appliquant aux surfaces minima, il démontre qu'il n'y a que l'hélicoïde réglé qui ait cette propriété.

La détermination des surfaces ayant la propriété en question se réduit, comme Voss l'a démontré, à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)=0;$$

l'auteur substitue à cette équation cette autre plus facilement intégrable

$$\frac{\partial^2 \overline{\mathrm{M}}}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{\tau}\,\frac{\partial^2 \tau}{\partial u\,\partial v}\,\overline{\mathrm{M}}=0;$$

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome C; 1887 (1).

Kummer (E.-E.). — *De generali quadam æquatione differentiali tertii ordinis.* (1-9).

Ce Mémoire est la réimpression d'un travail qui a paru en 1834 dans le *Programme du gymnase de Liegnitz,* et qui contient déjà les notions fondamentales du beau Mémoire de l'auteur sur la série hypergéométrique qui fut publié en 1836 dans le tome 15 du *Journal de Crelle.* Jacobi avait établi l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfont toutes les équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques. En observant les propriétés remarquables de cette équation, M. Kummer fut engagé à considérer la forme plus générale

$$(1)\qquad 2\frac{d^3z}{dz\,dx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2 - Z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + X = 0,$$

où Z et X dénotent des fonctions quelconques de x et z. L'intégration de (1) revient d'abord à celle de deux équations linéaires du second ordre

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{d^2v}{dz^2} + P\frac{dv}{dz} + Qv = 0,$$

où p et P peuvent être des fonctions quelconques de x et z, tandis que q et Q se déterminent par les équations

$$q = \frac{1}{4}\left(2\frac{dp}{dx} + p^2 - X\right), \qquad Q = \frac{1}{4}\left(2\frac{dP}{dz} + P^2 - Z\right).$$

Soient $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ deux intégrales particulières de (2), $\psi(z)$ et $\psi_1(z)$ respectivement de (3); alors l'intégrale de (1) sera

$$\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} = \frac{A\,\varphi(x) + B\,\varphi_1(x)}{C\,\varphi(x) + D\,\varphi_1(x)},$$

et l'on aura en même temps

$$y = \omega v, \qquad \omega^2 = c\,e^{\int P\,dz - \int p\,dx}\,\frac{dx}{dz}.$$

L'auteur en tire deux applications. En premier lieu, il pose

$$X = -\left[\frac{1-x\ldots}{x(1-x\ldots)}\right], \qquad Z = -\left[\frac{1\ldots}{z(1-z\ldots)}\right].$$

(1) Voir *Bulletin*, t. XIV, p. [illegible].

Dans ce cas $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première espèce, respectivement aux modules x et $\sqrt{1-x^2}$, tandis que $\psi(z)$ et $\psi_1(z)$ deviennent l'analogue pour les modules transformés z et $\sqrt{1-z^2}$, et w, qui est le multiplicateur de la transformation, s'exprime par la relation

$$w^2 = c\,\frac{z(1-z^2)\,dx}{x(1-x^2)\,dz}.$$

En second lieu, on a mis

$$X = \frac{Ax^2+Bx+C}{x(1-x^2)}, \qquad \frac{A'z^2+B'z+C'}{z(1-z^2)}.$$

Les équations auxiliaires (1) et (2) se transforment ici en équations différentielles auxquelles satisfont les séries hypergéométriques; l'intégration de (1) s'achève donc à l'aide de ces séries. Enfin l'auteur s'occupe de quelques cas particuliers où l'équation (1) possède des intégrales algébriques en nombre infini.

Kummer (*E.-E.*). — Deux nouvelles démonstrations des lois générales de réciprocité entre les résidus et non résidus des puissances dont le degré est un nombre premier. (10-50).

Ce travail a été publié en 1861 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* à Berlin. Pour ouvrir le *centième volume* du *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* avec des Mémoires du vieillard vénérable qui en a fait une gloire des plus brillantes, mais qui s'est décidé lui-même depuis plusieurs ans à mettre fin à son Œuvre scientifique, on a choisi les deux Mémoires dont nous venons de transcrire les titres, comme représentant les branches de Mathématiques qui ont été le plus enrichies par ses découvertes.

Une remarque de M. Kronecker (p. 16) sert à élucider un raisonnement qui pourrait être soumis à des objections, sous la forme du Mémoire original.

Il ne nous a pas paru nécessaire d'analyser en détail ce travail qui a paru, il y a trente ans, dans un Recueil académique bien connu.

Hermite (*Ch.*). — Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. (51-65).

Soit $F(n)$, pour tous les entiers $n \equiv 3 \pmod 4$, le nombre des classes de déterminant $-n$ où l'un au moins des coefficients extrêmes est impair. La première remarque se rapporte à la formule

$$\sum \frac{q^{\frac{1}{4}(a^2+2a-c^2)}}{1-q^a} = \sum F(n)\,q^{\frac{1}{4}n},$$

établie par M. Hermite dans le Mémoire : *Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'Arithmétique* [*Journal de Liouville*, (2), VII]. On en tire une expression pour la somme $S = F(3)+F(7)+\ldots+F(4m-1)$.

Les autres remarques concernent l'application à l'Arithmétique, d'autres fonctions doublement périodiques de troisième espèce d'où il résulte une expression intéressante pour le nombre des décompositions d'un entier en trois et en cinq

carrés. La considération des fonctions doublement périodiques de troisième espèce étend donc le champ des applications arithmétiques qui a été découvert par Jacobi dans le § 40 des *Fundamenta*.

Lipschitz (*R.*). — Sur une formule de M. Hermite. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite). (66-70).

Conséquences arithmétiques de la formule

$$\vartheta_3(0)\,\vartheta_0^3(0) = 1 + \sum_1^{\infty} n\,\frac{q^{n^2+2n}}{(1-q^{2n})^2} - 4\sum_1^{\infty} n\,\frac{(1-q^n)\,q^{n^2}}{1-q^n},$$

où

$$\vartheta_3(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \qquad \vartheta_0(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}.$$

et nouvelle démonstration de cette équation, due à M. Hermite, à l'aide de considérations arithmétiques.

Picard (*Émile*). — Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales. (71-78).

Les seules surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales sont les surfaces réglées unicursales et la surface du quatrième degré de Steiner. L'auteur avait énoncé ce théorème et indiqué sommairement la démonstration en 1878 (*Bull. Soc. Philom.*). Maintenant, il donne tous les développements qu'il a faits pour le prouver.

Kronecker (*L.*). — Un théorème sur les formes discriminantes. (79-82).

1° La forme discriminante de tout genre formable des différentes racines d'une équation est contenue dans une puissance du discriminant de l'équation même. 2° La forme discriminante d'un genre (ξ_1) peut être élevée à une puissance assez haute pour qu'elle devienne divisible par la forme discriminante de tout genre formable des différents *conjugués* de ξ_1. Soient $F(x)$ et $G(y)$ des fonctions entières irréductibles d'un même domaine et dont les coefficients des puissances les plus élevées de x et de y sont l'unité. L'une des deux équations $F = 0$, $G = 0$ ne peut devenir réductible après l'adjonction d'une racine de l'autre que lorsqu'un certain genre de fonctions rationnelles des racines de l'une convient avec un genre analogue de l'autre. De là, il suit : *La forme discriminante de ce genre est diviseur commun des discriminants de* F *et de* G. Ce théorème embrasse comme cas particulier la proposition : le facteur de $x^m - 1$ qui ne s'évanouit que pour les $m^{\text{ièmes}}$ racines primitives de l'unité est irréductible quand même on adjoindrait une racine d'une équation à coefficients entiers dont le discriminant est premier avec m.

Teixeira (*F.-G.*). — Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation. (83-86).

Généralisation d'une formule de M. Hermite publiée dans le tome LXXXIV du même journal.

Cayley (*A.*). — Note sur une formule relative à la valeur zéro d'une fonction thêta. (87-88).

Lipschitz (*R.*). — Contribution à la théorie du mouvement d'un fluide élastique. (89-120).

Dans le Mémoire sur la propagation d'ondes planes aériennes à amplitude finie d'oscillation, Riemann a indiqué une méthode par laquelle le système d'équations non linéaires aux dérivées partielles, qui régit le mouvement d'un fluide élastique, revient à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et s'intègre complètement pourvu que le mouvement initial ait partout la même direction et que la vitesse et la pression soient constantes en toute direction normale à celle-là. Le mouvement dont l'étude a ainsi réussi avec un si brillant succès est tel que le régime hypothétique de l'état initial du fluide se maintient pendant la durée du mouvement. En se mettant sous ce dernier point de vue, M. Lipschitz a été conduit à étudier les conditions d'un mouvement plus général d'un fluide élastique. Partageons par un faisceau de surfaces l'espace occupé par le fluide, supposons que la vitesse initiale soit dirigée partout normalement aux surfaces, de plus que la pression et la vitesse ne varient qu'en passant d'une surface à une autre, enfin que le même régime se maintienne pendant la durée du mouvement. La discussion du système corrélatif d'équations aux dérivées partielles fait voir que les surfaces du faisceau demandé doivent être des surfaces parallèles et en même temps des surfaces de niveau, et encore qu'il est permis d'admettre une force accélératrice dépendante d'une fonction de force qui ne change pas de surface à surface. Une considération poursuivie révèle que la double condition imposée au faisceau de surfaces est seulement satisfaite, si chacun des deux rayons de courbure principale est constant dans tout point d'une même surface. Après cela, il n'existera que trois faisceaux différents de surfaces conformes aux exigences du problème : le faisceau de plans parallèles adopté par Riemann, un faisceau de cylindres coaxiaux à base circulaire et un faisceau de sphères concentriques.

Les systèmes de deux équations non linéaires aux dérivées partielles, qui appartiennent aux trois hypothèses signalées tout à l'heure, peuvent être réunis sous une forme unique où il faut attribuer l'une des valeurs 1, 2, 3 à un nombre indéterminé. Encore ces trois systèmes sont-ils remarquables par différentes propriétés communes. On parvient à trouver des cas où il est possible de les réduire à un système d'équations linéaires aux différentielles partielles : à cet effet, on étudie les conditions qui laissent la densité invariable en tout lieu pendant le cours du mouvement. Pour un faisceau de plans parallèles, ce régime est possible quand il n'y a pas de force accélératrice (hypothèse de Riemann), ou quand la force actuelle est constante et normale aux plans parallèles, telle que la gravité par rapport à un faisceau de plans horizontaux. Ce dernier problème a fait l'objet des études de MM. Guldberg et Mohn (*Programme de l'Université de Christiania,* 1876). Pour un faisceau de surfaces cylindriques coaxiales ainsi que de surfaces sphériques concentriques, on peut aussi achever la réduction mentionnée, en adoptant la loi de Mariotte et en faisant certaines hypothèses sur la nature de la force accélératrice.

Königsberger (*Léo*). — Démonstration de l'impossibilité de l'existence d'un autre théorème fonctionnel que de celui d'Abel. (121-136).

D'après le théorème d'Abel, un nombre arbitraire d'intégrales de fonctions algébriques peut être réuni en un nombre fixe d'intégrales de même nature dont les limites se composent algébriquement des limites des intégrales données, et pour les fonctions à une ou à plusieurs variables, qui résultent de l'inversion de ces intégrales, les théorèmes d'addition découlent immédiatement de ce théorème. Dans l'étude des intégrales d'équations différentielles algébriques et des fonctions inverses de celles-ci, c'est une question importante que d'apprendre s'il existe pour elles un théorème fonctionnel analogue. Après avoir terminé les investigations auxiliaires dans ses travaux antérieurs publiés dans le même recueil périodique, dans les *Acta mathematica*, et dans le Livre : *Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen* (voir *Bulletin*, VII_1, p. 5-14), l'auteur aborde maintenant la question principale qu'il énonce dans ces expressions : « Y a-t-il, outre les intégrales de fonctions algébriques et leurs inverses, encore d'autres fonctions dont les valeurs, pour n arguments indépendants l'un de l'autre, sont en liaison algébrique avec moins de n valeurs de cette même fonction pour des arguments dépendant algébriquement de ces n variables et avec ces arguments mêmes? »

L'étude de cette question s'étend d'abord aux fonctions d'une variable, puis aux fonctions de plusieurs variables. La suite et fin du travail a été insérée dans le tome CI du même journal où l'auteur parvient à la conclusion : « Les seules fonctions pour lesquelles il existe des théorèmes fonctionnels dans le sens indiqué ci-dessus sont les intégrales abéliennes et leurs fonctions inverses, ainsi que les fonctions qu'on en déduit par des transformations algébriques. » Cette importante étude a été publiée en même temps en entier à l'occasion du retour du centenaire de la fondation de l'Université, à Heidelberg, en 1886. Un résumé succinct se trouve dans les *Sitzungsberichte der mathematisch physikalischen Klasse der k. bayer. Akad. d. Wiss.*, Heft IV; 1885.

Helmholtz (*H. von*). — Sur l'importance en Physique du principe de la moindre action. (137-166, 313-3[illegible]).

Soient :

F l'énergie potentielle d'un système matériel;
L sa force vive;
E son énergie totale.

Alors on a

$$E = F + L \quad \text{et} \quad H = F - L.$$

H (la fonction principale de Hamilton) sera la fonction dont l'intégrale, prise suivant le temps, deviendra minimum entre les positions limites pour le mouvement normal. Cette fonction est dénommée *potentiel cinétique* et avec ce terme, M. von Helmholtz énonce le principe de la moindre action dans ces mots : « La valeur moyenne, calculée pour des éléments égaux de temps, du potentiel cinétique est minimum dans la trajectoire actuelle du système (respectivement une valeur limite pour des routes plus longues), en comparaison

de tous chemins voisins qui mènent dans la même durée de temps de la position initiale à la finale ». Dans le cas du repos l'énergie potentielle doit donc être simplement un minimum pour l'équilibre.

L'introduction du Mémoire sert à mettre en évidence l'importance fondamentale du principe de la moindre action pour les branches diverses de la Physique. Nous lui empruntons ce passage : « A l'heure que nous sommes, il est déjà très probable qu'il faut considérer ce principe comme la loi générale de tous les procès réversibles de la nature, et quant aux irréversibles tels que la génération et la conductibilité de la chaleur, leur irréversibilité ne semble pas dériver de la nature de la chose, mais plutôt de la défectuosité de nos moyens, de l'impossibilité où nous sommes de remettre en ordre des mouvements d'atomes dérangés, ou de faire exactement rétrograder le mouvement de tous les atomes qui exécutent le mouvement calorique. »

Dans le § 1, on a développé le théorème du minimum pour le potentiel cinétique, en laissant la plus grande liberté possible à la fonction H, et l'on en a déduit les équations dynamiques de Lagrange. On a discuté les éliminations par lesquelles ces formes plus générales peuvent aussi se produire pour des systèmes de corps pondérables.

Dans le § 2, la constance de l'énergie se tire de notre forme du principe, et l'on apprend à calculer la valeur de l'énergie de la valeur du potentiel cinétique, à savoir

$$E = H - \Sigma_{\mathfrak{a}}\left(q_{\mathfrak{a}}\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right),$$

où les $q_{\mathfrak{a}}$ dénotent les vitesses. Tout à la fois il résulte que l'inverse n'est pas vrai en tout cas, c'est-à-dire, lorsque la constance de l'énergie est assurée, le principe de la moindre action n'a pas toujours lieu. Ce dernier principe affirme donc plus que le premier, et ce sera notre tâche de trouver ce plus de chose qu'il affirme. En même temps, on entre dans le détail de quelques procès de Mécanique et de Physique pour être à même de les avancer comme exemples explicatifs, aussi bien pour le contenu des deux premiers paragraphes que pour celui des suivants, et d'illustrer ainsi la portée du principe.

Le § 3 s'occupe du problème inverse de déduire H de E. A cet effet, il faut recourir à l'intégration de l'équation différentielle donnée ci-dessus, et ce procédé introduit des constantes arbitraires d'intégration qui doivent être des fonctions homogènes linéaires des $q_{\mathfrak{a}}$. Cette démarche aura son importance en tant qu'il sera alors possible de trouver le potentiel cinétique et, par conséquent, l'ensemble des lois dynamiques du système quand on connaît complètement la dépendance où est l'énergie des coordonnées et des vitesses, supposé que le principe de la moindre action ait lieu. Les termes linéaires dans les $q_{\mathfrak{a}}$, qui correspondent à des *mouvements latents*, pourront être trouvés le plus souvent sans difficulté sensible.

Le § 4 sert à étudier les relations mutuelles entre les forces que le système exerce à la fois suivant des directions différentes, et ses accélérations et vitesses. Ces relations embrassent une suite des liaisons les plus intéressantes de phénomènes en Physique, telles que celles entre les lois électromagnétiques et électrodynamiques d'Ampère d'une part, et la loi d'induction de l'autre; une série de lois thermodynamiques, telle que la relation entre l'augmentation par élévation de température, de la pression d'une masse renfermée et l'élévation

de la température par compression; le régime corrélatif dans les procès thermo-électriques et électrochimiques. Réciproquement, on peut aussi démontrer que le principe de la moindre action a toujours lieu quand il subsiste les relations mutuelles des forces énumérées au § 4. Mais cette démonstration a été réservée à une nouvelle communication.

Dans le § 5, on a résumé succinctement les théorèmes de Hamilton pour la forme générale, et dans le § 6 on a donné les lois de réciprocité qui en découlent pour les changements des mouvements direct et rétrograde par suite de petites impulsions après l'écoulement d'un temps déterminé. Les réciprocités que l'auteur a signalées lui-même pour le son et la lumière dans des travaux antérieurs y sont aussi comprises.

Enfin, dans le § 7 on introduit les moments de mouvement au lieu des vitesses; de là, il résulte une autre forme du problème de variation et, outre les représentations changées connues des valeurs des forces, une autre loi de réciprocité du mouvement direct et rétrogarde.

Thomé (*L.-W.*). — Sur la convergence et divergence de la série potentielle sur le cercle de convergence. (167-178).

Soit $F(x) = \sum_1^\infty c_a x^a$ une fonction possédant un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence et qu'on peut continuer, comme fonction analytique uniforme et continue, au delà du cercle de convergence dans un domaine fini qui ne contient pas de points singuliers. Supposons de plus que, dans le voisinage d'un de ces points critiques (a), la fonction possède un développement sous la forme d'une intégrale, dépendant de $x - a$, d'une équation différentielle linéaire et homogène. Alors, si, dans les développements autour des points singuliers du cercle de convergence, la partie réelle la plus basse de l'exposant de $x - a$ est supérieure à -1, la série potentielle convergera vers la valeur de la fonction génératrice dans tous les points non singuliers du cercle de convergence et dans ceux d'entre les points singuliers où, après le retranchement du terme constant du développement, la partie réelle de l'exposant $x - a$ est plus grande que zéro.

Quant à la divergence, on trouve cette proposition : « Si dans le voisinage d'un point a du cercle de convergence, $F(x)$ a un développement sous la forme d'une intégrale régulière, dépendant de $x - a$, d'une équation différentielle homogène et lineaire où la partie réelle la plus basse de l'exposant est inférieure ou égale à -2, tandis qu'il n'est pas nécessaire de faire une supposition sur la marche de $F(x)$ tendant vers d'autres points du cercle de convergence, le module du terme général de la série ne restera pas fini sur le cercle de convergence et la série divergera donc dans tous les points de ce cercle. » Ces théorèmes de convergence et de divergence ont encore lieu pour les cercles de convergence d'un domaine entre deux cercles concentriques où il subsiste le développement

$$F(x) = \sum_0^\infty c_a x^a + \sum_1^\infty c_a x^a.$$

Frobenius (*G.*). — Nouvelle démonstration du théorème de Sylow. (179-181).

Si l'ordre d'un groupe est divisible par la puissance p^ν d'un nombre premier p, le groupe contient lui-même un sous-groupe d'ordre p^ν. M. Frobenius démontre ce théorème par un procédé élémentaire très simple; il achève, par la voie de l'induction, son raisonnement en deux pages.

Stern (*M.-A.*). — Quelques observations sur la congruence $\frac{r^p - r}{p} \equiv a \pmod{p}$. (182-188).

L'auteur démontre quelques propositions dues à Eisenstein et à M. Sylvester, en développe certaines modifications et montre le lien qui les attache l'une à l'autre.

Fuchs (*L.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre. (189-200).

Soient dans la surface de Riemann définie par l'équation algébrique irréductible $F(s, z) = 0$, $f(s, z)$ et $\varphi(s, z)$ des fonctions du lieu formant un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + G(s, z)\frac{dy}{dz} + H(s, z)y = 0,$$

où G et H désignent des fonctions rationnelles de s et z. Il s'agit de déterminer les conditions en vertu desquelles les deux équations, à signes correspondants

$$f(s_1, z_1)\,dz_1 \pm f(s_2, z_2)\,dz_2 = 0, \qquad \varphi(s_1, z_1)\,dz_1 \pm \varphi(s_2, z_2)\,dz_2 = 0,$$

sont satisfaites simultanément par chaque couple de points liés par l'équation

$$f(s_1, z_1)\,\varphi(s_2, z_2) - f(s_2, z_2)\,\varphi(s_1, z_1) = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sont celles-ci : I. Si le genre p de $F(s, z) = 0$ est supérieur à zéro, il faut que la surface correspondante de Riemann soit représentable sur une surface de Riemann à deux feuilles par une substitution rationnelle et uniformément réversible, de telle sorte que l'on a

$$z = \psi_1\left[u, \sqrt{S(u)}\right], \quad s = \psi_2\left[u, \sqrt{S(u)}\right], \quad u = \varpi_1(s, z), \quad \sqrt{S(u)} = \varpi_2(s, z),$$

où u^2 dénote une fonction uniforme du quotient ζ de deux intégrales formant un système fondamental de l'équation différentielle que l'on obtient par la substitution appliquée à (1); $S(u)$ est une fonction rationnelle entière de u et ψ_1, ψ_2, ϖ_1, ϖ_2 sont des fonctions rationnelles de leurs arguments. Enfin, les coefficients de l'équation différentielle sont tenus à remplir deux équations, dont la forme change à mesure que u est fonction uniforme ou biforme de ζ. — II. Si l'on a $p = 0$, l'équation à coefficients rationnels en t, transformée de (1) par la substitution $x = \varepsilon_1(t)$, $s = \varepsilon_2(t)$, doit jouir de la propriété que t^2 soit une fonction uniforme du quotient de deux intégrales formant un système fondamental. Enfin, si l'on fait

$$-\frac{1}{2}G(s, z)\frac{dz}{dt} = \Omega(t), \qquad P(s, z) = H(t), \qquad \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} = \varepsilon'_1(t),$$

il faut que les équations aient lieu

$$\Omega(t) + \Omega(-t) = \frac{d \log}{dt}\left[\frac{\varepsilon'_1(-t)}{\varepsilon'_1(t)}\right], \qquad \frac{\Pi(-t)}{\Pi(t)} = \left[\frac{\varepsilon'_1(t)}{\varepsilon'_1(-t)}\right]^2.$$

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur les analogies en Mécanique de la deuxième loi de la Thermodynamique. (201-212).

Parmi tous les systèmes purement mécaniques pour lesquelles il subsiste des équations analogues à celles qui résultent de la deuxième loi de la Thermodynamique, les systèmes traités par Maxwell et M. Boltzmann semblent jouer le rôle le plus important. L'analogie avec les équations thermodynamiques ne subit pas d'exceptions pour tous ces systèmes, et la plupart des autres systèmes qui montrent une analogie indubitable sous des formes réalisables en Mécanique, s'arrangent comme cas spéciaux sous ceux considérés par les deux savants. Dans son dernier travail sur ce sujet (*Bulletin*, XIV_2, p. 29), M. Boltzmann n'avait fait qu'énoncer le théorème le plus général relatif à la transformabilité de l'énergie intérieure en travail extérieur de ces systèmes. Il comble maintenant cette lacune en le prouvant.

Mertens (*F.*). — Démonstration du théorème qui dit que tous les invariants et covariants d'un système de formes binaires sont des fonctions entières d'un nombre fini de formations de ce genre. (223-230).

Démonstration générale et indépendante des auxiliaires des symboles.

Schroeter (*H.*). — Sur le pentaèdre et l'hexaèdre et la configuration kummérienne liée avec eux. (231-257).

Les figures étudiées par M. Schroeter sont formées par cinq ou six plans généraux, c'est-à-dire, tels que trois quelconques d'entre eux ne passent pas par la même droite, ni quatre par un même point : il s'agit de trouver les relations générales qui subsistent entre les éléments de ces figures, nommées en allemand *Fünfflach* et *Sechsflach*, termes que nous avons simplement traduits en nous servant des notations évidemment équivalentes de *pentaèdre* et *hexaèdre*.

Dans un Mémoire inséré au tome LXXXVI du même Journal, M. Reye a déjà enseigné à déduire, par une voie synthétique, la construction qui, partant de six points quelconques de l'espace, mène à la configuration remarquable des seize points nodaux et des seize plans singuliers d'une surface kummérienne de quatrième degré, relation qui a été signalée pour la première fois par M. Weber dans le tome LXXXIV du même Journal [voir *Bulletin*, (2), III_2, p. 113, et (2), IV_2, p. 42]. La déduction de M. Reye repose sur les propriétés d'un système nul de l'espace et ne laisse rien à désirer de la part de l'élégance et de la brièveté; cependant la construction elle-même est d'une nature tout à fait élémentaire : on pourra donc s'attendre à la tirer des ressources élémentaires de la Stéréométrie, sans en appeler aux propriétés plus reculées d'un système nul. Tel est le but des investigations de M. Schroeter, et, en effet, sa méthode élémentaire et génétique réussit à faire ressortir la configuration

complète de l'espace sous sa forme définitive, elle en montre le caractère dualiste et conduit à quelques propriétés du pentaèdre et de l'hexaèdre (de même qu'à celles des figures dualistes) qu'on ne semble pas encore avoir énoncées.

Hermès (*O.*). — L'hexaèdre général. (258-285).

L'hexaèdre de l'auteur se compose de six plans quelconques : en les combinant, une fois pour toutes, deux à deux, on obtient trois couples de *plans opposés*. Prenons deux couples de ces plans opposés et nous aurons un tétraèdre : deux de ses arêtes opposées sont les intersections des couples de plans opposés, les deux autres couples d'arêtes opposées sont en même temps arêtes opposées de l'hexaèdre. Il y a ainsi trois *tétraèdres latéraux* contenus dans l'hexaèdre. L'auteur étudie les relations entre la position des arêtes et des diagonales de l'hexaèdre, et la liaison des tétraèdres latéraux avec la figure générale. L'investigation n'embrasse pas les cas particuliers où l'un de ces tétraèdres, ou deux ou tous les trois se réduisent à des points. Pour ces questions spéciales, l'auteur renvoie à un Mémoire publié comme programme du Köllnischen Gymnasium, à Berlin (1886). Enfin, M. Hermès attire l'attention des géomètres sur un Mémoire de l'année 1858 (tome LVI du même Journal) où il a signalé l'homologie quadruple des tétraèdres diagonaux d'un hexaèdre dont les couples de plans opposés se coupent suivant des droites d'un plan. Cette recherche a échappé à M. Stéphanos lorsqu'il créa le nom de *systèmes desmiques* de trois tétraèdres [*Bulletin*, (2), III_1, p. 424].

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des équations différentielles linéaires. (286-295).

L'auteur introduit la nouvelle variable $z = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ et cherche le développement en séries des m intégrales de l'équation transformée, mais il ne prend pas soin de discuter la convergence de ses séries. Les résultats ne sont donc pas à l'abri de toute objection.

Weingarten (*J.*). — Sur les déformations d'une surface flexible et inextensible. (296-310).

Dans le tome XXII des Mémoires de l'Académie royale d'Irlande (1853), M. Jellett a fait une belle remarque sur les déformations des surfaces : une surface flexible et inextensible, dont la mesure de courbure est partout positive, n'est pas déformable quand on fixe dans elle invariablement un segment d'une courbe, tandis qu'une surface dont la mesure de courbure est partout négative permet d'être déformée après la fixation d'une de ses lignes asymptotiques. Mais le raisonnement de Jellett n'est pas concluant, et l'argumentation de M. Lecornu (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XLVIII), qui sert à développer quelques propriétés géométriques de la déformation, n'est pas non plus exempte des mêmes inexactitudes. Car on peut envisager les déformations infiniment petites d'une surface sous deux points de vue différents dont le premier est plus vaste et embrasse le second, mais non réciproquement. C'est pourquoi l'auteur s'est proposé de développer les théorèmes de Jellett en prenant un autre point de départ que la notion des déformations

infiniment petites. Dans cette occasion il tire en même temps de ses recherches les formules de la Communication qu'il a présentée à l'Académie royale de Berlin et qui se rapporte à la théorie des déformations infiniment petites des surfaces flexibles et inextensibles.

Rosanes (*J.*). — Pour la théorie de certains groupes ponctuels dépendants dans l'espace. (311-316).

Suite de trois Mémoires publiés dans les tomes LXXXVIII, XC, XCV du même Journal [voir *Bullettin*, (2), V_2, p. 107; VII_2, p. 11; XI_2, p. 65].

Segre (*Corrado*). — Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux. (317-330).

Cette Note a pour but d'établir, par les raisonnements de la Géométrie pure de position, une suite de théorèmes en partie nouveaux sur les homographies dans les formes géométriques de première espèce. L'auteur ne s'appuie, en général, que sur les propriétés les plus élémentaires des homographies et des involutions, qu'on trouve par exemple dans la *Geometrie der Lage* de von Staudt. Ainsi, il exclut absolument de ses considérations les éléments imaginaires. Il introduit les symboles de la théorie des opérations (et, en particulier, des substitutions) pour les homographies, avec le seul but d'abréger le langage; mais on pourrait immédiatement, si on le voulait, ôter ces symboles, et remplacer quelques petits calculs où ils entrent, par des raisonnements qui les exprimeraient en paroles. Les homographies peuvent, dans la plupart des propositions, être considérées entre deux formes géométriques différentes, tandis que, dans quelques-unes, il faut qu'elles soient entre les éléments d'une même forme. Pour tous les problèmes du premier degré que l'on rencontre, les constructions auxquelles parvient M. Segre sont linéaires. La simplicité de l'objet du travail a poussé l'auteur à employer une certaine concision dans les démonstrations.

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur le degré de convergence des séries variables et sur le degré de continuité des fonctions de deux arguments. (331-358).

Considérons la série infinie

$$U(x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p(x),$$

dont les termes sont des fonctions de x; sa valeur sera la limite vers laquelle tend la grandeur $U_n(x) = \sum_{p=1}^{n} u_p(x)$, dépendant de x et de n, lorsque n tend vers l'infini. Posant $n = \frac{1}{\varepsilon}$ et $U_n(x) = \varphi(x, \varepsilon)$, on peut dire que l'étude de la série $U(x)$ revient à la recherche de la fonction $\varphi(x, \varepsilon)$ dépendant de deux arguments x et ε. A cet effet, l'argument ε discontinûment variable peut être figuré comme continûment variable, si pour les valeurs de ε entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$,

on attribue à la notation $\varphi(x, \varepsilon)$ une signification convenable. Fixons cette signification par la relation

$$\varphi(x, \varepsilon) = \mathrm{U}_n(x) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - n\right)[\mathrm{U}_{n+1}(x) - \mathrm{U}_n(x)],$$

pour $\frac{1}{n} > \varepsilon > \frac{1}{n+1}$.

Alors on aura, en général,

$$\varphi(x, \varepsilon) = \int_0^y \psi(y)\, dy \qquad \left(y = \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

où $\psi(y)$ désigne la fonction qui est égale à u_{n+1} pour $n \leq y < n+1$. L'intégrale de Laplace sert encore à représenter les fonctions $\psi(y)$ et $\varphi(x, \varepsilon)$ sous une forme explicite. D'ailleurs, en partant de la fonction $\varphi(x, \varepsilon)$, on passe à la série infinie au moyen des formules

$$u_1 = \varphi(x, 1), \qquad u_p = \varphi\left(x, \frac{1}{p}\right) - \varphi\left(x, \frac{1}{p-1}\right),$$

$$\varphi\left(x, \frac{1}{n}\right) = \mathrm{U}_n(x), \qquad \varphi(x, 0) - \varphi\left(x, \frac{1}{n}\right) = \mathrm{R}_n(x),$$

$\mathrm{R}_n(x)$ étant le reste $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p(x)$ de la série. Analoguement l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x, y)\, dy$$

peut être mise en rapport avec une fonction de deux arguments

$$\varphi(x, \varepsilon) = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x, y)\, dy.$$

La question dont il s'agit dès lors sera d'établir pour les séries l'analogue des notions et des théorèmes dans la théorie des fonctions de deux variables. Il n'est guère possible de résumer ici succinctement toutes les investigations de l'auteur; contentons-nous donc de transcrire les titres des paragraphes.

I. Remarques préliminaires. II. Les premières analogies entre la continuité de la fonction de deux variables et la convergence de la série. III. Sur le degré de continuité des fonctions. IV. Sur le degré de convergence des séries. V. Sur le reste de la série de Fourier. VI. Sur la continuité de la somme de la série.

Lampe (*E.*). — Sur l'analogue, dans l'espace, d'un mouvement particulier hypocycloïdal. (359-363).

Considérons trois diamètres conjugués d'une sphère fixe S ayant le rayon a et une sphère mobile s ayant le rayon $\frac{1}{2}a$ et touchant S intérieurement; la sphère s coupera les trois diamètres respectivement en A, B, C. Soient α, β, γ trois masses constantes qu'on pose respectivement en A, B, C. Le centre de gravité de ces trois points décrira un ellipsoïde, dont les demi-axes seront $\frac{a\alpha}{\sigma}$, $\frac{a\beta}{\sigma}$, $\frac{a\gamma}{\sigma}$, où l'on a mis $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$. Tous les ellipsoïdes ont pour enveloppe la surface astroïdale $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Lampe (*E.*). — Trisection approchée d'un angle à l'aide du cercle et de la ligne droite. (364).

Hauck (*Guido*). — Sur les figures réciproques de la Statique graphique. (365-389).

Un système de forces extérieures appliquées aux points nodaux d'un réseau polyédral de tiges est en équilibre, si les forces sont proportionnelles aux aires et normales aux plans des faces d'un polyèdre, dont les arêtes sont dans des plans qu'on peut faire passer par un point fixe O perpendiculairement aux tiges du réseau. Les tensions de celles-ci sont alors proportionnelles aux aires triangulaires qui projettent de O les arêtes du polyèdre et qui sont perpendiculaires aux tiges respectives. C'est à ce théorème, dû à M. Rankine, que Maxwell chercha à réduire les figures planes réciproques de la Statique graphique au moyen du système polaire de la sphère en considérant un réseau plan de tiges conjointement avec les forces appliquées au réseau, comme la projection d'un système corrélatif dans l'espace. Cependant il ne réussit pas à faire fructifier cette idée en toute généralité, parce qu'il se voyait forcé de restreindre son étude à un système de forces qui passent par un même point. Cette tentative de Maxwell, de lier le système polaire de la sphère au théorème de Rankine, a été maintenant renouvelée avec un plein succès par M. Hauck. Il montre par la méthode synthétique que le système polaire de la sphère et, plus généralement, de toute surface de rotation de second ordre remplit, ainsi que le système nul, les conditions en vertu desquelles le système de tiges et le système de forces peuvent être envisagés généralement comme projections de figures polyédrales réciproques. La démonstration s'achève à l'aide de la projection réciproque définie par l'auteur. Encore met-on en rapport le système plan de tiges avec le système de tiges dans l'espace, et l'on révèle la connexion qui subsiste entre le théorème de Rankine et les figures planes réciproques de la Statique graphique.

§ 1. Introduction. § 2. La projection réciproque. § 3. Relation entre la projection parallèle orthogonale, la projection réciproque par rapport à une surface de rotation de second ordre et la projection par rapport à un système nul. § 4. Les figures réciproques de la Statique graphique. § 5. Théorème de la pyramide des forces. § 6. Le réseau de tiges. § 7. Cas particulier du polygone funiculaire. § 8. Les forces appliquées au réseau de tiges dans l'espace. Le théorème de Rankine. § 9. Exemple pratique.

Hamburger (*M.*). — Application, à l'intégration d'équations aux différentielles partielles, d'une certaine relation de déterminants. (390-404).

Après avoir établi plusieurs relations entre certains déterminants qu'on peut former avec les éléments d'une matrice donnée, l'auteur les applique à l'étude de l'intégration des équations aux différentielles partielles et parvient ainsi à ce théorème :

« Supposons que la solution générale d'une équation aux différentielles partielles entre p variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_p$ et un nombre quelconque

n de variables dépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soit donnée par l'équation

$$\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_p) = 0,$$

où φ désigne une fonction arbitraire des fonctions f_α qui sont des fonctions déterminées des x_β et des u_α. Pour que cette solution existe, il est nécessaire et suffisant que l'équation aux différentielles partielles ait la forme

$$0 = \left| m_{\rho,\sigma} + \sum_{h=1}^{m} m_{\rho,p+h} \frac{\partial u_h}{\partial x_\sigma} \right| \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, p)$$

(les $m_{\rho,\sigma}$ dénotant des fonctions des x et u), et que le système d'équations aux différentielles totales

$$\sum_{\sigma=1}^{m} m_{\rho,\sigma}\, dx_\sigma + \sum_{h=1}^{n} m_{\rho,p+h}\, du_h = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p),$$

soit intégrable sans restriction. » Pour le cas d'une seule variable indépendante ($n = 1$), on en déduit la liaison connue qui a lieu entre une équation linéaire aux différentielles partielles et un système complet d'équations aux différentielles totales.

Caspary (*F.*). — Sur la génération de courbes algébriques par des figures variables. (405-412).

Les lecteurs du *Bulletin* ont été initiés aux idées de l'auteur par deux Mémoires plus étendus, qu'il a publiés sur le même sujet dans les tomes XI_1 (p. 222) et XIII_1 (p. 202).

Gundelfinger (*S.*). — Pour la théorie des formes binaires. (413-424).

Dans les *Göttinger Nachrichten* (avril 1883), M. Gundelfinger a établi une suite de théorèmes qui tendent à résoudre le problème de donner pour les formes binaires une représentation canonique admissible sans restriction dans tous les cas. Les démonstrations qu'il avait employées alors sont de nature purement algébrique, et quelquefois, pour être succinct dans ses développements, il en avait seulement indiqué la marche. Maintenant il s'occupe à montrer que ces théorèmes découlent, sans aucun calcul, de la théorie des équations différentielles linéaires au moyen de considérations toutes élémentaires. Un lemme qu'il signale à cette occasion ramène généralement la théorie des translations (*Ueberschiebungen*) de deux formes binaires à l'étude d'un genre particulier d'équations différentielles linéaires contenues, comme cas spécial, dans celles que M. Fuchs a étudiées aux tomes LXVI et LXVIII du même journal.

Runge (*C.*). — Sur les solutions en nombres entiers d'équations à deux variables. (425-435).

L'auteur résume le résultat de ses recherches comme suit : Une équation

irréductible $f(x,y)=0$ ne peut être satisfaite par un nombre infini de couples de valeurs entières x, y que lorsqu'elle jouit de ces propriétés : 1° Il faut que les puissances les plus élevées de x et de y qui se présentent dans $f(x, y)$ appartiennent à des termes isolés ax^m et by^n. 2° La fonction algébrique y, définie par l'équation $f(x, y) = 0$, doit devenir infinie d'ordre $x^{\frac{m}{n}}$, comparée à x. Si x^ρ et y^σ se trouvent multipliées l'un par l'autre dans $f(x, y)$, il faut avoir

$$\rho + \sigma \frac{m}{n} \leqq m$$

ou bien

$$n\rho = m\sigma \leqq mn.$$

3° Il faut que la somme des termes, pour lesquels on a

$$n\rho + m\sigma = mn,$$

puisse se mettre sous la forme

$$b\Pi(y^\lambda - d^{(\beta)}x^\mu) \qquad \left(\beta = 1, 2, \ldots, \frac{n}{\lambda}\right),$$

où $\Pi(u - d^{(\beta)})$ désigne la puissance d'une fonction entière irréductible de u. Cependant quoique ces caractères soient nécessaires, ils ne sont pourtant pas suffisants pour que l'équation $f(x, y) = 0$ soit satisfaite par un nombre infini de couples de valeurs entières.

Netto (*E.*). — Un théorème sur les valeurs conjuguées d'une fonction rationnelle à n variables. (436-441).

Dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie de Berlin* du [illegible] mars 1879, M. Kronecker a prouvé qu'il n'y a pas de fonctions de plus de quatre variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour lesquelles toutes les fonctions conjuguées, engendrées par les permutations des x_α, ont une même permutation en commun, c'est-à-dire restent invariables par une même substitution. La question générale sous laquelle tombe ce théorème est la suivante : Quel est l'effet exercé par les permutations de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur les transpositions des valeurs conjuguées d'une fonction rationnelle de la variable x? Les recherches de M. Netto qui s'en occupent font voir qu'il ne peut pas exister, parmi les fonctions conjuguées, certaines transpositions simples, par exemple en particulier des transpositions cycliques.

Rudio (*F.*). — Sur le mouvement de trois points dans une droite. (442-446).

Dans le tome IV des *Œuvres de Jacobi*, M. Wangerin a publié un Mémoire posthume de ce géomètre, sur le mouvement dans une droite de trois points qui s'attirent avec des forces inversement proportionnelles au cube de la distance. Cette publication a poussé M. Rudio à faire imprimer un travail qu'il avait déjà terminé en 1881 et qui traite la même question. En s'appuyant sur des réflexions empruntées aux Leçons sur la Dynamique de Jacobi, l'auteur trouve les coordonnées en fonctions du temps et d'une fonction φ qui dépend du temps. La forme définitive du résultat subit quelques changements par une correction insérée au tome CII, page 8.

Schering (*Ernst*). — Remarque concernant la théorie des nombres. (447-448).

Extrait d'une lettre datée du 14 mai 1863, et adressée à M. Kronecker.

Minkowski (*Hermann*). — Sur la notion arithmétique de l'équivalence et sur les groupes finis de substitutions linéaires en nombres entiers. (449-458).

Dans sa *Festschrift* [voir *Bulletin* (2), VIII$_1$, p. 145], M. Kronecker demande que la définition rationnelle de la notion arithmétique de l'équivalence de formes entraîne, comme conséquence intrinsèque, la densité uniforme des classes différentes de formes et un nombre aussi petit que possible des classes, et dans son Mémoire sur les formes bilinéaires à quatre variables (*Abhandlungen der Berliner Akademie,* 1883), il fait voir comment on peut satisfaire à ces demandes pour les formes quadratiques définies à deux variables. En se mettant sous ce point de vue, on est conduit à considérer une circonstance qui semble être très essentielle : si l'on fait abstraction des transformations identiques et négativement identiques, ces formes ne sont pas susceptibles d'admettre des transformations propres en elles-mêmes qui soient congrues à la transformation identique *modulo* 2. M. Minkowski s'étudie à montrer comment on peut satisfaire aux demandes de M. Kronecker pour toutes les formes homogènes et entières à un nombre quelconque de variables qui n'admettent qu'un nombre fini de transformations linéaires, en nombres entiers, en elles-mêmes, par exemple pour toutes les formes quadratiques essentiellement positives (ou négatives) de déterminant non évanouissant.

Busche (*E.*). — Sur une formule de M. Hermite. (459-464).

Il s'agit de la formule

$$S = 2\sum\left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2 \qquad (x = 1, 2, \ldots, [\sqrt{n}]),$$

signalée par M. Hermite dans les *Acta mathematica,* tome II, page 299 [voir *Bulletin,* (2), VIII$_2$, p. 161], où S dénote le nombre de tous les diviseurs des nombres 1, 2, 3, ..., n et le symbole $[a]$ représente le plus grand entier contenu dans a. M. Busche en donne une nouvelle démonstration et tire de ses formules plusieurs conséquences intéressantes : il gagne une nouvelle détermination du signe de Jacobi $\left(\frac{p}{q}\right)$ pour deux nombres positifs p et q premiers l'un à l'autre et dont le dernier est impair, et il établit une expression pour le nombre total des classes de formes quadratiques aux déterminants -1, -2, -3, ..., $-n$.

Sylvester (*J.-J.*). — Sur la transformation dite *de Tschirnhausen.* (465-486).

L'auteur rappelle un travail de W.-R. Hamilton qui a été publié en 1837 et où le géomètre anglais a amplement étudié la méthode employée par Jerrard



pour transformer les équations. Le problème fondamental à résoudre est celui-ci :

Soient données h_1 équations homogènes du premier degré, h_2 équations homogènes du deuxième degré, h_t du $t^{\text{ième}}$ degré entre m quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$; déterminer les rapports de ces m quantités sans que l'élimination fasse monter les degrés. Quel est la limite inférieure pour m où le problème soit résoluble?

On aborde le problème en mettant $a_k = a'_k + a''_k$ et en décomposant le nouveau système d'équations en trois systèmes, dont l'un sert à déterminer les rapports des a'_k, l'autre ceux des a''_k, tandis que le troisième, constitué par une équation de $t^{\text{ième}}$ degré, fournit le rapport $a'_1 : a''_1$. Les deux premiers systèmes contiennent chacun une équation du plus haut degré de moins que le système proposé. On continue à opérer de cette manière jusqu'à ce qu'on rencontre des systèmes qui se composent d'équations linéaires et d'une seule équation de degré supérieur. Le nombre des variables doit donc être assez grand pour qu'elles puissent satisfaire à toutes ces équations par des valeurs qui ne s'évanouissent pas toutes à la fois. M. Sylvester emploie cette méthode pour établir une *formule d'oblitération* : désignons par $[h_t, h_{t-1}, \ldots, h_1]$ le nombre des variables qu'il faut avoir, il trouve

$$[h_t, h_{t-1}, \ldots, h_1]$$
$$= [h_{t-1}, h_t + h_{t-1}, h_t + h_{t-1} + h_{t-2}, \ldots, h_t + h_{t-1} + h_{t-2} + \ldots + h_1] + 1,$$

et cette relation conduit à établir le *triangle d'oblitération* où l'on trouve le nombre cherché. [*Voir* la Note de M. Sylvester dans les *Comptes rendus hebdomadaires*, etc., t. CIV, p. 1228-1231, *Bulletin*, (2), XII$_2$, p. 189]. Mais cette méthode ne laisse pas d'influencer le résultat. Si, en décomposant les systèmes, on admet aussi ceux où non seulement des équations linéaires sont combinées avec une seule équation de degré supérieur, mais où l'élimination ne mène pas à des équations de degré supérieur à t, le nombre des variables nécessaires deviendra plus petit.

D'après M. Sylvester, ce n'est pas Tschirnhaus qui a inventé cette méthode de transformation, ni encore Jerrard, mais plutôt E.-S. Bring qui l'a publiée dans une dissertation à Lund, en 1786 (*Meletemata quædam mathematica circa transformationem æquationum algebraicarum; voir* aussi F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 143, Leipzig; 1884). Au commencement de son travail, M. Sylvester prouve encore qu'en appliquant cette méthode à l'équation générale du cinquième degré pour la réduire à la forme

$$z^5 + az + b = 0,$$

on ne pourra obtenir les coefficients restants sous forme réelle que lorsque l'équation possède tout au plus une racine réelle.

Reye (Th.). — Construction linéaire du huitième point d'intersection de trois surfaces du second ordre. (187-189).

On sait que les huit points d'intersection et deux autres points quelconques peuvent toujours être liés par une surface du second ordre. C'est de ce théorème que M. Reye fait découler une solution très simple et différente de celles données par MM. Caspary et Schroeter dans le même Journal, tome [illegible] [*Voir Bulletin*, (2), XIV, p. 219].

Kronecker (*L.*). — Un théorème fondamental de l'Arithmétique générale. (490-510).

En traitant les quantités algébriques selon la méthode arithmétique, on est forcément poussé à étendre la notion, due à Gauss, de la congruence, de telle sorte que les *systèmes de modules* remplacent le simple module de la congruence. De là résulte en même temps le progrès important qui réduit l'étude des quantités algébriques à celle des fonctions rationnelles de variables. Ces idées de la dernière importance ont été développées par M. Kronecker d'abord dans sa *Festschrift*, et depuis dans une suite de Mémoires, dont il suffit de rappeler avant tout celui qui a été inséré au tome IC du même Journal et porte comme titre : *Sur quelques applications des systèmes de modules à des questions algébriques élémentaires* [voir *Bulletin*, (2), XIV_2, p. 225]. Ces recherches tendaient à éliminer par les systèmes de module le concept des quantités algébriques irrationnelles, à les remplacer en principe par des quantités rationnelles. Ce but se trouve être atteint par le présent Mémoire qui enseigne à déterminer, pour toute fonction entière proposée, un système de modules premiers par rapport auquel la fonction se prête à être représentée comme produit de fonctions linéaires.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des quantités entières appartenant au domaine naturel de rationalité $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(n-1)})$ et posons

$$F(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots \mp c_n;$$

soient de plus $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ définies par

$$\mathfrak{F}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \ldots \mp \mathfrak{f}_n,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dénotent des variables indéterminées. On aura immédiatement

$$F(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \equiv \mathfrak{F}(x)$$
$$(\text{mod. } \mathfrak{f}_1 - c_1, \mathfrak{f}_2 - c_2, \ldots, \mathfrak{f}_n - c_n).$$

Mais ce système de modules n'est pas un système de modules premiers de $n^{\text{ième}}$ degré, et c'est sur la détermination d'un tel système qu'il faut insister : elle provient de deux manières différentes. Comme premier résultat, il suit que, faisant

$$G(z, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n) = \Pi(z - u_1 x_{i_1} - u_2 x_{i_2} - \ldots - u_n x_{i_n}),$$

tout facteur irréductible de la fonction de Galois G fournit un module premier ayant la propriété demandée. En second lieu, il résulte que le système de modules premiers

$$(\mathfrak{f}_1 - c_1, \ldots, \mathfrak{f}_n - c_n; \mathfrak{g}' - c', \mathfrak{g}'' - c'', \ldots)$$

rend les mêmes services pourvu que $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \ldots$ forment un système fondamental du genre d'affection et que ces fonctions prennent les valeurs rationnelles c', c'', ... En employant des systèmes de modules de cette nature, on peut toujours se passer d'introduire les quantités algébriques quand il n'est pas requis d'isoler les différentes racines d'une équation irréductible. Dans la théorie arithmétique des formes décomposables, ce théorème nous dispense donc de quitter jamais le domaine absolu de rationalité des nombres naturels.

Table des matières des tomes XCI-C.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. Inhalt und Namen-Verzeichniss der Bände I.-C., 1826-1887. Berlin, 1887, Georg Reimer, 252 pages, in-4°.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XI; 1888 [1].

Picard (Emile). — Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique. (1-12).

Le théorème dont il s'agit peut s'énoncer ainsi : « Si entre deux fonctions analytiques uniformes, ayant un point singulier essentiel isolé, il existe une relation algébrique, le genre de cette relation ne peut dépasser un. » L'auteur en donne deux démonstrations essentiellement différentes; la première qui s'appuie sur une proposition empruntée à la théorie des fonctions fuchsiennes est la reproduction à peu près exacte de celle qu'il avait déjà donnée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, VII_2. Dans la seconde, d'un caractère plus élémentaire, on démontre d'abord le théorème pour une relation hyperelliptique. Le procédé de démonstration ne paraît pas s'étendre au cas général; mais une ingénieuse remarque de M. Hurwitz permet de ramener le cas général à ce cas particulier.

Comme conclusion de son travail, M. Picard fait remarquer qu'il est impossible d'obtenir des fonctions uniformes plus simples que les fonctions fuchsiennes pour exprimer les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique de genre quelconque.

Strauss (Emil). — Une généralisation de la numération décimale, avec application à la théorie des fonctions. (13-18).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ des nombres entiers supérieurs à un, et ω un nombre quelconque; $[x]$ désignant le plus grand nombre entier non supérieur à x, soit

$$[\alpha_1 \omega] = a_1, \quad \ldots, \quad \alpha_1 \omega = a_1 + \omega_1,$$
$$[\alpha_2 \omega_1] = a_2, \quad \ldots, \quad \alpha_2 \omega_1 = a_2 + \omega_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\alpha_\nu \omega_{\nu-1}] = a_\nu, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu \omega_{\nu-1} = a_\nu + \omega_\nu.$$

Les nombres entiers $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ seront respectivement plus petits que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ et l'on déduit des identités précédentes

$$\omega = \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_1 \alpha_2} + \ldots + \frac{a_\nu}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu} + \frac{\omega_\nu}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, XIV_2, p. [illegible].

Si un des nombres ω_i est nul, tous les nombres suivants le seront aussi; sinon, ω sera représenté par la somme d'une série convergente

$$\omega = \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \frac{a_\nu}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu} + \ldots,$$

car le terme complémentaire $\frac{\omega_\nu}{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} < \frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ tend vers zéro lorsque ν augmente indéfiniment.

Soit k un nombre entier positif non carré parfait. Prenons

$$\alpha_1 = k, \qquad \alpha_2 = 2k, \qquad \alpha_\nu = \nu k, \qquad \ldots,$$

et soit ω une irrationnelle quelconque telle que $\omega < 1$, $\omega\sqrt{k} < 1$; on aura, pour ω et $\omega\sqrt{k}$ deux développements en séries convergentes

$$\omega = \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \frac{a_\nu}{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} + \ldots,$$

$$\omega\sqrt{k} = \frac{b_1}{\alpha_1} + \frac{b_2}{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \frac{b_\nu}{\alpha_1\ldots\alpha_\nu} + \ldots.$$

Les deux fonctions entières à coefficients rationnels

$$F(x) = a_1 x^2 + \frac{a_2}{1.2} x^4 + \ldots + \frac{a_\nu}{\nu!} x^{2\nu} + \ldots,$$

$$G(x) = b_1 x^2 + \frac{b_2}{1.2} x^4 + \ldots + \frac{b_\nu}{\nu!} x^{2\nu} + \ldots$$

vérifient les relations

$$F\left(\pm\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega, \qquad G\left(\pm\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \omega\sqrt{k}.$$

Par suite, en posant

$$H(x) = F(x) - x\,G(x),$$

on aura

$$H\left(+\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 0, \qquad H\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2\omega;$$

la fonction entière à coefficients rationnels $H(x)$ admet donc *une seule* racine de l'équation algébrique *irréductible* $kx^2 - 1 = 0$.

Lerch (*M.*). — Note sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k i\pi x}}{(w+k)^s}$. (19-24).

En appliquant un raisonnement dû à Riemann, l'auteur montre que cette série est une fonction entière de s, et il établit une relation curieuse entre

$$\mathfrak{K}(w, x, 1-s), \qquad \mathfrak{K}(x, -w, s), \qquad \mathfrak{K}(1-x, w, s).$$

Bruns (*H.*). — Sur les intégrales du problème des n corps. (25-39).

L'auteur établit que le problème ne comporte pas d'intégrales algébriques (ne contenant pas le temps) par rapport aux coordonnées des points et aux composantes de leurs vitesses, en dehors de celles qui sont connues, c'est-à-dire, de celles qui résultent des théorèmes généraux sur le mouvement du centre de gravité, sur les aires et la force vive.

Karl Heun. — Sur la théorie des fonctions multiformes, plusieurs fois ramifiées linéairement. (97-118).

Ces recherches se rattachent aux travaux de M. Poincaré sur les groupes des équations linéaires. L'auteur recherche en particulier quel est le nombre de paramètres dont dépendent les équations d'une même famille, c'est-à-dire celles dont les intégrales sont ramifiées de la même manière.

Schwering (K.). — Une propriété du nombre premier 107. (119-120).

Suite du travail publié dans le tome X des *Acta*.

Thomson (Sir William). — Sur les divisions de l'espace avec le minimum des surfaces de séparation. (121-134).

Les surfaces qui répondent à cette condition de minimum doivent être, comme on sait, à courbure moyenne constante. De plus, si l'on considère plusieurs surfaces, se coupant suivant une certaine courbe, les plans tangents doivent être tels que des forces égales situées dans ces plans et perpendiculaires à la ligne d'intersection se fassent équilibre. L'illustre physicien étudie certains modes de division que l'on peut réaliser physiquement.

Goursat (E.). — Sur un mode de transformation des surfaces minima. (135-186; 257-264. Deux Mémoires).

A toute courbe minima correspond une surface minima réelle parfaitement déterminée; si la courbe minima subit un déplacement *réel*, la surface minima correspondante éprouve le même déplacement. Mais, si l'on fait subir à la courbe minima un déplacement imaginaire, on obtient des surfaces minima tout à fait différentes de la première. L'étude des surfaces que l'on peut ainsi déduire d'une surface minima *donnée* et des relations qu'elles ont avec la première constitue le principal objet de ce travail.

Tout déplacement se ramenant à une translation et à une rotation, et une translation ne changeant pas la surface, il suffit d'étudier l'effet d'une rotation. L'auteur démontre ensuite que toute rotation imaginaire est équivalente à une suite de deux rotations : 1° une rotation réelle; 2° une rotation imaginaire autour d'un axe réel; ceci permet de se borner à considérer des rotations autour d'axes réels. L'axe de rotation étant pris pour axe des z, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point de la surface primitive S, x_0, y_0, z_0 celles du point correspondant de la surface adjointe S_0, on trouve sans difficulté pour les coordonnées d'un point de la nouvelle surface S_1

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = x \cos h\,\xi - y_0 \sin h\,\xi, \\ y_1 = y \cos h\,\xi + x_0 \sin h\,\xi, \\ z_1 = z, \end{cases}$$

ξ désignant une constante réelle.

Ces formules permettent de construire S_1, quand on connaît S et S_0. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à S, α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs de la normale à S_1, ds, ds_1 les éléments linéaires des deux surfaces, on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & ds_1 = (\cos h\varphi - \gamma \sin h\varphi)\, ds, \\ & \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\gamma \cos h\varphi + \sin h\varphi} = \frac{1}{\cos h\varphi - \gamma \sin h\varphi}, \\ & d\alpha_1\, dx_1 + d\beta_1\, dy_1 + d\gamma_1\, dz_1 = (d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz). \end{aligned} \right.$$

De ces formules on déduit sans difficulté les propriétés les plus simples de la surface S_1. Ainsi les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S_1 correspondent aux lignes de courbure et aux lignes asymptotiques de S, toute ligne de courbure plane se change en une ligne de courbure plane, etc. Si l'on applique cette transformation à l'alysséide on obtient les surfaces à lignes de courbure plane de M. Bonnet. Quand une surface minima admet une ligne de courbure plane ou une ligne asymptotique hélicoïdale, les deux nappes de la surface se déduisent l'une de l'autre par une transformation de la nature précédente.

Étant donnée une courbe minima quelconque, si on lui applique la transformation homographique la plus générale qui conserve le cercle de l'infini, on obtient une famille de surfaces minima réelles dépendant en général de *huit* paramètres, sauf pour certaines courbes minima particulières. Les cas où ce nombre s'abaisse sont déterminés au § 10. Les paragraphes suivants contiennent l'extension de ces recherches aux surfaces minima imaginaires, quand on fait subir aux deux courbes minima, à l'aide desquelles on peut définir la surface, des déplacements quelconques.

La fin du Mémoire est consacrée à l'examen de la question suivante : Étant données deux surfaces, on prend les sections des deux surfaces par des plans variables parallèles à un plan fixe et on fait correspondre les points des deux sections où les tangentes sont parallèles; dans quels cas obtient-on une application conforme des deux surfaces, l'une sur l'autre, par ce mode de correspondance? Les surfaces S, S_1 des numéros précédents fournissent une solution du problème, si le plan variable est perpendiculaire à l'axe des z. Il en est de même des surfaces de révolution dont les méridiennes ont respectivement pour équations

$$x = \varphi(z), \qquad x = \psi(z),$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{1 + \varphi'^2(z)}{\varphi^2(z)} = \frac{1 + \psi'^2(z)}{\psi^2(z)}.$$

Des calculs assez compliqués conduisent à cette conclusion qu'il n'y a pas d'autres solutions que ces deux-là.

Dans le second Mémoire, l'auteur traite la question suivante, à laquelle on est amené par les résultats précédents. Soient

$$x_1 = f(x, y, z; x_0, y_0, z_0),$$
$$y_1 = \varphi(x, y, z; x_0, y_0, z_0),$$
$$z_1 = \psi(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$$

trois fonctions des six variables indépendantes x, y, z ; x_0, y_0, z_0. Supposons

que x, y, z désignent les coordonnées d'un point d'une surface minima quelconque S, x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point correspondant de la surface adjointe S_0; le point des coordonnées x_1, y_1, z_1 décrira une certaine surface S_1. Quelles sont les fonctions f, φ, ψ les plus générales, telles que la surface S_1 soit aussi une surface minima, quelle que soit la surface minima S?

Des propriétés connues des surfaces minima, on déduit que les fonctions f, φ, ψ peuvent s'obtenir au moyen d'une transformation ponctuelle

$$X = F(x, y, z), \qquad Y = \Phi(x, y, z), \qquad Z = \Psi(x, y, z),$$

changeant toute courbe minima en une courbe maxima, c'est-à-dire satisfaisant à la relation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

on sait que toutes les transformations de cette nature peuvent être obtenues par une suite d'inversions et ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres.

Hurwitz (A.). — Sur le développement des quantités complexes en fraction continue. (187-200).

Soit (S) un système de nombres complexes tel que la somme, la différence, le produit de deux nombres quelconques du système appartiennent encore au système; supposons en outre que, dans une région finie du plan, il n'existe qu'un nombre fini de quantités faisant partie du système, ce qui exige en particulier qu'il n'y ait aucun nombre du système, sauf o, de module inférieur à un. L'unité est toujours considérée comme un nombre du système. De toute quantité complexe on déduit une suite d'équations

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ appartenant au système (S). Si cette suite se poursuit indéfiniment, elle conduit à représenter x_0 par une fraction continue illimitée

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}).$$

Soit $\frac{p_n}{q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite, la différence $x_0 - \frac{p_n}{q_n}$ peut s'écrire

$$x_0 = \frac{p_n}{q_n} - \frac{\Theta_n}{q_n^2}.$$

M. Hurwitz suppose que l'on a choisi les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$, de telle façon que Θ_n reste fini tandis que q_n augmente indéfiniment avec n. Grâce à cette hypothèse, on peut étendre à ces nouvelles fractions continues la plupart des propriétés connues des fractions continues ordinaires : 1° lorsque n augmente indéfiniment, la fraction converge et a pour somme x_0; 2° si la fraction se poursuit indéfiniment, la somme x_0 ne peut être égale au quotient de deux nombres du système (S); 3° si la quantité x_0 satisfait à une équation du second degré dont les coefficients sont des nombres du système (S), les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

L'auteur applique ces considérations générales au système des nombres entiers complexes $m + ni$, et au système des nombres entiers complexes $m + n$...

$\left(\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ Soit $x = u + iv$ une quantité complexe quelconque; on peut l'écrire

$$x = a + (u' + iv'),$$

a étant un nombre entier complexe de la forme $m + ni$, choisi de telle façon que

$$-\frac{1}{2} \leq u' < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} \leq v' < \frac{1}{2}.$$

De cette façon on associe à chaque quantité complexe x un nombre entier complexe a. De toute quantité complexe x_0, on peut donc déduire une suite d'équations

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad \ldots,$$

a_n désignant le nombre complexe associé à x_n. Le seul point un peu délicat est la démonstration de l'inégalité $|q_n| > |q_{n-1}|$; M. Hurwitz y parvient par l'emploi d'une représentation géométrique.

Sylow (*L.*). — Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier. (201-256).

Si l'ordre d'un groupe est divisible par une puissance d'un nombre premier, telle que p^m, sans l'être par p^{m+1}, cet ordre est de la forme $p^m \mathrm{H}(np+1)$; le groupe en contient un autre de l'ordre $p^m \mathrm{H}$; celui-ci contient à son tour un troisième groupe, de l'ordre p^m, auquel toutes ses substitutions sont permutables; enfin le nombre des groupes de l'ordre p^m contenus dans le premier groupe est $np+1$. L'auteur considère, dans le présent travail, le cas le plus simple, celui des groupes transitifs de degré p^2.

Soit G un groupe transitif de degré p^2, O son ordre qu'on suppose divisible par $p^{\alpha+2}$, mais non par $p^{\alpha+3}$, I un groupe de l'ordre $p^{\alpha+2}$ contenu dans G, H le plus grand groupe contenu dans G dont les substitutions sont permutables à I. L'ordre du groupe H sera $p^{\alpha+2}\mathrm{H}$, où H est premier avec p; on aura donc

$$\mathrm{O} = p^{\alpha+2}\mathrm{H}(np+1).$$

Dans le premier paragraphe, l'auteur détermine la forme de I, dans un deuxième celle de H. Dans les deux suivants, il s'occupe du nombre n; enfin le dernier contient quelques applications.

Schwering (*E.*). — Recherches sur la norme des nombres complexes. (265-296).

L'auteur étudie les normes de nombres complexes

$$a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1} \alpha^{\lambda-1},$$

où α est une racine imaginaire de l'équation $\alpha^\lambda - 1 = 0$. Ces recherches se rattachent à celles de Kronecker, de Reuschle, et à un Mémoire antérieur de l'auteur, publié dans le tome X de ce journal.

Söderberg (*J.-I.*). — Démonstration du théorème fondamental de Galois dans la théorie de la résolution algébrique des équations. (297-302).

Reproduction d'une démonstration publiée dans la thèse de l'auteur. L'existence du groupe de Galois est rattachée aux propositions établies par Lagrange dans son Mémoire *Réflexions sur la résolution algebrique des équations*.

Staude (*Otto*). — Sur le mouvement d'un point pesant sur une surface de révolution. (303-332).

L'auteur recherche, en particulier, les conditions pour que le mouvement soit stable, pour qu'il soit périodique, etc. Il s'appuie pour cela sur les résultats d'un Mémoire antérieur, relatif à une espèce de fonctions périodiques.

Weber (*H.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (second Mémoire). (333-390).

Ce Mémoire comprend deux Parties : la première se rapporte à la théorie de la transformation; l'auteur introduit d'abord les fonctions modulaires $j(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$ dont on a rappelé la définition dans le compte rendu de ses *Elliptische Functionen* (*Bulletin*, XV_1, p. 106); il établit leur caractère d'invariance pour la transformation linéaire, puis les équations modulaires (algébriques) dans le cas d'un degré de transformation premier ou composé. La seconde Partie se rapporte à la multiplication complexe et embrasse, pour ce qui est du calcul des nombres algébriques liés à cette multiplication, les résultats dus à M. Hermite, au P. Joubert et à M. Kronecker. Si le rapport des périodes ω est racine d'une équation du second degré $A\omega^2 + 2B\omega + C = 0$, où A, B, C sont les coefficients d'une forme quadratique proprement primitive de déterminant négatif $-m$; $j(\omega)$ est un nombre entier algébrique, qui reste invariable quand on remplace la forme (A, B, C) par une forme équivalente, et dont le degré est égal au nombre de classes, de formes proprement primitives, à déterminant $-m$; de là la notion d'invariants de classes et d'équations de classes, que M. Weber apprend à former, au moyen des principes exposés dans la première Section. Un Tableau placé à la fin de cette deuxième Partie en résume les résultats.

Lilienthal (*R.*). — Remarques sur les surfaces pour lesquelles la différence des rayons de courbure principaux est constante. (391-394).

Détermination des surfaces de révolution possédant cette propriété.

Ptaszycki (*J.*). — Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques. (395-400).

La méthode proposée repose sur le théorème suivant : « Si l'intégrale $\int \frac{z}{P}\,dx$, où P est un polynôme entier en x, et z une fonction algébrique définie par une équation irréductible d'ordre n

$$z^n + \varphi_1(x)\,z^{n-1} + \ldots = 0,$$

est algébrique, elle est de la forme

$$\int \frac{z\,dx}{P} = \frac{X_0 + X_1 z + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

les polynômes Y, X_0, X_1, ..., X_{n-1} pouvant se déduire des coefficients de P et de l'équation en z, par un calcul qui n'introduit que n constantes arbitraires.

Il suffira d'examiner si l'on peut disposer de ces n constantes de façon que l'égalité précédente soit vérifiée.

Tome XII; 1888-1889.

Appell (P.). — Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe (1-50).

L'étude du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan fixe avait été commencée par M. Resal qui avait formé deux équations simultanées aux dérivées partielles de l'intégration desquelles dépend la solution du problème. Dans le présent Mémoire, M. Appell ramène la recherche du mouvement du fil à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, qui se prête facilement à la résolution de plusieurs problèmes importants.

Soit α l'angle que fait à l'instant t, la tangente au fil en un point avec l'axe des abscisses : l'équation de la tangente sera de la forme

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = p,$$

p désignant une fonction de α et t, dont les dérivées successives par rapport à α seront appelées p', p'', ...

La méthode suivie par M. Appell consiste à prendre pour inconnue la fonction p et pour variables indépendantes α et t.

Si l'on effectue ce changement de variables dans les équations ordinaires du mouvement du fil, on obtient les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} T = m\left(\dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - m(p' - p'')\left(\Psi + \dfrac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right), \\ \dfrac{dT}{d\alpha} = m(p' - p'')\left(\Phi + \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right), \end{cases}$$

en désignant par $m\,ds$ la masse de l'élément ds, par T la tension de cet élément, et par Φ et Ψ les composantes tangentielle et normale de la force extérieure rapportée à l'unité de masse.

Les équations précédentes sont deux équations simultanées définissant T et p

en fonction de α et t. En éliminant T entre ces équations, on obtient une équation de quatrième ordre

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[m\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - m(p'+p'')\left(\Psi-\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right)\right] + m(p'+p'')\left(\Phi-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 0,$$

qui définit p en fonction de α et t.

A toute intégrale particulière de cette équation correspond un mouvement possible du fil, à condition que la valeur de la tension T fournie par la première des équations (1) soit positive.

Après avoir montré comment les équations (1) peuvent être déduites de celles que donne M. Resal dans son *Traité de Mécanique générale* (t. I, p. 321 et suivantes), M. Appell applique les résultats précédents à quelques problèmes.

Supposant que la force extérieure appliquée à un élément du fil dépende uniquement de la position de cet élément, est-il possible que le fil affecte une ligne de repos apparent dans l'espace? Il suffit de chercher à satisfaire à l'équation (2) par une intégrale particulière de la forme

$$p = A + \Theta,$$

où A dépend de α seulement et Θ de t seulement.

Si l'on suppose le fil homogène (cas examiné par M. Léauté), on trouve immédiatement que Θ est une fonction du second ou du premier degré en t.

Le problème précédent est un cas particulier du suivant considéré par M. Routh : « Chercher s'il existe un mouvement du fil pouvant se représenter par le glissement du fil le long d'une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de translation, et déterminer ce mouvement du fil s'il existe. »

Il suffira, pour résoudre cette question, de chercher une intégrale de (2) de la forme

$$p = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha + A + \Theta,$$

A étant une fonction de α seul, ξ, η, Θ des fonctions de t seul.

M. Appell termine son Mémoire en montrant que l'équation (2) se prête facilement à l'étude des oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable.

Lerch (*M.*). — Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques. (51-55).

Méthode directe et simple pour obtenir le développement en série trigonométrique de la fonction

$$\frac{\vartheta(x+u)}{\vartheta(u)},$$

où

$$\vartheta(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu\pi, \quad q = [illegible]$$

Guichard (*C.*). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. (57-61).

Soit

$$(1) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + R_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + R_n z = 0$$

une équation différentielle linéaire et homogène, où les R_i sont des fonctions rationnelles de deux variables x, y liées par une équation algébrique

$$(2) \qquad F(x, y) = 0.$$

Soit $x = a$, $y = b$ un point de ramification d'ordre m de la courbe (2). Supposons que, pour $x = a$, $y = b$, R_1, R_2, ..., R_n restent finis.

M. Guichard établit le théorème suivant :

« Si la variable x tourne m fois autour du point a, les n intégrales de l'équation (1) reprennent leur valeur initiale. »

Vries (*J. de*). — Sur certaines configurations planes. (63-81).

Une figure plane composée de p points et de g droites, chaque point étant le point de départ de γ droites et chaque droite le support de π points, est une *configuration* que l'on désigne par le symbole (p_γ, g_π) lorsque γ et π sont différents et par le symbole p_π lorsque γ et π sont égaux.

M. de Vries développe les propriétés de quelques-unes des configurations (p_4, g_3) et de quelques autres configurations qui leur sont intimement liées.

Brioschi (*F.*). — Sur l'équation du sixième degré. (83-101).

M. Brioschi, après avoir rappelé les résultats relatifs aux invariants d'une forme binaire du sixième degré et le lien qui existe entre les recherches de Malfatti sur l'équation du cinquième degré et celles de Jacobi et de M. Cayley, on tire quelques conséquences et montre comment on peut ramener l'équation du sixième degré à une forme normale qui se résout aisément, au moyen des fonctions thêta hyperelliptiques à deux variables.

Heun (*K.*). — Remarques sur la théorie des fonctions plusieurs fois ramifiées linéairement. (103-108).

Dans les six pages qui forment le présent Mémoire, M. Heun établit quelques additions et une rectification à ses recherches publiées au t. 11 des *Acta mathematica*.

Hacks (*J.*). — Démonstration de Schering, au moyen du symbole $[x]$ de la loi de réciprocité. (109-111).

La démonstration de Schering se trouve insérée aux *Nachrichten* de Göttingue (1879, p. 217-224) et aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXVIII, p. 1073-1075).

Horn (*J.*). — Sur un système d'équations linéaires aux dérivées partielles. (113-175).

M. Horn se propose d'étendre aux équations aux dérivées partielles les ré-



sultats contenus dans le Mémoire fondamental de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66); M. Picard avait étendu aux fonctions de deux variables le problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques et montré que certaines fonctions de deux variables indépendantes peuvent être déterminées par leurs points critiques et les exposants correspondants; ces recherches de M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 1881) et celles antérieures de M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1880 et *Journal de Liouville*, 1882) servent de point de départ à M. Horn dont le Mémoire est consacré principalement à l'étude du système

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

où les coefficients a, b, c sont des fonctions rationnelles de x et y telles que les trois équations précédentes aient trois solutions communes linéairement indépendantes.

Kowalevski (*S*). — Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. (177-232).

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener à l'intégration du système

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt} = (\mathrm{B} - \mathrm{C})qr + \mathrm{M}g(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$

$$\mathrm{B}\frac{dq}{dt} = (\mathrm{C} - \mathrm{A})rp + \mathrm{M}g(z_0\gamma - x_0\gamma''), \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt} = (\mathrm{A} - \mathrm{B})pq + \mathrm{M}g(x_0\gamma' - y_0\gamma), \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma',$$

où les constantes A, B, C, M, x_0, y_0, z_0 ont une signification bien connue : A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré relativement au point fixe; M est la masse du corps; x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de gravité du corps dans un système d'axes formés par les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe.

On n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers :

1° Le cas de Poisson (ou d'Euler) où l'on a

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0;$$

2° Le cas de Lagrange, où l'on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}, \qquad x_0 = y_0 = 0.$$

Les six quantités p, q, r, γ, γ', γ'' sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Mme Kowalevski montre que les intégrales des équations différentielles con-

sidérées ne conservent pas cette propriété, en général, mais que, outre les deux cas déjà connus, il existe un cas nouveau où la circonstance précédente se présente; c'est le cas où les constantes satisfont aux équations suivantes :

$$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$

C'est ce problème où l'on a $A = B = 2C$ et où le centre de gravité du corps se trouve dans l'équateur de l'ellipsoïde qui fait l'objet du Mémoire de Mme Kowalevski : l'intégration complète s'effectue à l'aide de la théorie des fonctions abéliennes.

Volterra (*V.*). — Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. (233-286).

M. Volterra remarque que l'on peut étendre la représentation des fonctions de trois variables indépendantes par les *fonctions des points d'un espace à trois dimensions;* on peut en effet faire correspondre à chaque ligne ou à chaque surface les valeurs d'une variable; on obtient ainsi des *fonctions des lignes* et des *fonctions des surfaces* de l'espace.

L'objet du présent Mémoire est de montrer comment les fonctions d'une ligne permettent de généraliser la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Cette généralisation s'obtient en faisant correspondre à chaque ligne fermée de l'espace les valeurs de deux variables imaginaires liées entre elles par une condition différentielle semblable à la condition de monogénéité de la théorie ordinaire.

Tchebycheff (*P.*). — Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales. (287-322).

Dans un Mémoire *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux*, inséré au t. IX des *Acta* (1), M. Tchebycheff avait montré comment, d'après les valeurs données de $2m$ intégrales,

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b x\,f(x)\,dx, \qquad \ldots, \qquad \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx,$$

(a et b réels, et $a < b$),

on pouvait trouver les limites les plus étroites de la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx,$$

lorsque la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles de x comprises entre a et b et lorsque la valeur de v reste comprise entre a et b. Ces limites sont données par les inégalités

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-0}^{v-0} F(z) \leqq \int_a^v f(x)\,dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-0}^{v+0} F(z).$$

(1) Voir *Bulletin*, XIV, p. 126.

où ω est une quantité positive infiniment petite et $F(z)$ une fonction rationnelle

$$F(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi_1(z)},$$

qui s'obtient facilement par un développement en fraction continue; ce développement donne $\Phi_0(z)$ et $\Phi_1(z)$.

Les inégalités précédentes conduisent à ce résultat que la différence entre le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi(z)}{\Phi_1(z)}$$

et l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

est au plus égale à la fraction

$$\frac{\Phi(v)}{2\Phi_1'(v)}.$$

L'étude de cette fraction et de formules qui peuvent conduire à la détermination de sa limite supérieure forme l'objet principal du Mémoire de M. Tchebycheff.

Picard (*E.*). — Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (323-338).

Ce Mémoire annonce le commencement des recherches de M. Picard relatives à la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé. On pourra voir (*Journal de Mathématiques,* 1890, et *Journal de l'École Polytechnique,* 1890) de quelle généralisation sont susceptibles les résultats particuliers que nous allons résumer.

M. Picard s'occupe ici des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, obtenues en exprimant que la variation première de l'intégrale double

$$\int\int \varphi\left(V, \frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}\right) dx\,dy$$

est égale à zéro, en désignant par φ une forme quadratique en V, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{dy}$, les coefficients étant des fonctions quelconques de x et y.

La classe d'équations ainsi obtenue jouit de diverses propriétés remarquables.

Une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \qquad a\frac{d^2V}{dx^2} + 2b\frac{d^2V}{dx\,dy} + c\frac{d^2V}{dy^2} + d\frac{dV}{dx} + e\frac{dV}{dy} + fV = 0$$

ne peut dériver d'une forme quadratique $\varphi\left(V, \frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}\right)$ par le procédé précédent que s'il existe une relation entière entre a, b, c, d, e et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre. Soit

$$F(a, b, c, \ldots) = 0$$

cette relation, F étant un polynôme. Celui-ci sera un invariant de l'équation correspondant à un changement de variables et de fonction.

Lorsque la condition $F = 0$ est remplie, il existe une infinité de formes quadratiques

$$\varphi\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

pouvant servir à engendrer l'équation linéaire aux dérivées partielles.

On peut étendre aux équations rentrant dans la catégorie précédente des résultats classiques dans la théorie de l'équation du potentiel. Si R est une région du plan à contour simple, où la forme quadratique f est définie et si A est une aire de R limitée par une courbe C, il existe une seule fonction $V(x, y)$ uniforme et continue dans A ainsi que ses dérivées partielles, et prénant sur le contour C une succession donnée de valeurs.

M. Picard, après avoir montré comment on peut tirer parti de l'indétermination des coefficients de la forme quadratique, établit que toute équation linéaire aux dérivées partielles de la classe considérée peut, par un changement convenable de variables et de fonction, être ramenée à la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + f(x, y)V = 0.$$

Cette dernière équation acquiert par là un intérêt particulier : M. Picard en reprend l'étude en se proposant particulièrement la détermination d'une intégrale au moyen de ses valeurs le long d'une courbe fermée.

Dobriner (*H.*). — Sur l'octogone formé par les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre. (339-361).

Le point de départ de M. Dobriner est un théorème de Hesse (t. 26 du *Journal de Crelle*, p. 152) qui contient une extension du théorème de Pascal et qui est relatif aux huit points d'intersection de trois quadriques; M. Dobriner, cherchant à trouver les propositions correspondantes à celles de Steiner, Kirkman, Cayley et Salmon, a été amené à faire une étude de la configuration formée par ces huit points.

Zeuthen (*H.-G.*). — Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre. (362-366).

M. Zeuthen joint quelques remarques aux recherches précédentes de M. Dobriner et il établit, en particulier, un théorème qui se déduit de la théorie des complexes linéaires de droites.

Hurwitz (*A.*). — Sur un mode particulier de développement en fractions continues des quantités réelles.

Si l'on désigne par x_0 une quantité réelle et si l'on pose

$$x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad \ldots,$$

où le nombre entier a_n est déterminé de façon que la différence $x_n - a_n$ soit

comprise entre les limites $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, on obtient pour x le développement en fraction continue

$$x_0 = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ldots}}$$

C'est ce mode de développement en fraction continue qui est étudié par M. Hurwitz; il avait déjà été considéré par M. Minnigerode dans une Note insérée en 1873 aux *Nachrichten de Göttingue*. M. Hurwitz est amené à introduire ensuite un second mode de développement en fraction continue, distinct du premier.

E. Cosserat.

BULLETINS de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 3e série (1).

Tome XV, janvier à juin 1888.

De Heen (P.). — Note sur le travail moléculaire des liquides organiques. Détermination des variations de la chaleur spécifique des liquides avec la température. (165-191).

De Heen (P.). — Détermination des variations de la chaleur spécifique des liquides au voisinage de la température critique. (522-528).

Sur la vérification expérimentale de la relation $T = CP - 2,4n =$ const. entre la chaleur spécifique moyenne C, le poids moléculaire T, et le nombre n d'atomes contenus dans la molécule, T le travail moléculaire.

Daurry. — Sur la détermination de la force du vent en grandeur et en direction. (192-197).

Houzeau et *Folie.* — Rapports. (11-15).

Comparaison de l'action du vent, agissant comme un courant, sur deux pendules, dont la plaque oscillante est, pour l'un perpendiculaire, pour l'autre oblique à la direction du vent.

Van der Mensbrugghe. — Quelques mots sur ma théorie du filage de l'huile. (263-272).

Exposition plus précise de cette théorie.

---

(1) Voir *Bulletin*, XV, p. 5-10.

Le Paige (*C.*) et *Deruyts* (*F.*). — Sur les théorèmes fondamentaux de la Géométrie projective. (335-347).

Démonstration basée sur les propriétés des triangles homologiques et sur la définition suivante : « Des couples de points situés sur une droite sont en involution lorsque, par trois couples arbitraires, on peut faire passer les couples de côtés opposés d'un quadrangle. »

Folie (*F.*) et *Lagrange* (*Ch.*). — Rapports sur un Mémoire de M. *Ronkar*, intitulé : *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système.* Application au sphéroïde terrestre. (489-500).

M. Ronkar a levé une grande difficulté que l'on rencontre dans la théorie de la nutation diurne de M. Folie, au moyen du théorème suivant : « Dans les mouvements à très longue période, le sphéroïde terrestre se meut sensiblement comme si la croûte et le noyau ne formaient qu'une seule masse; dans les mouvements à très courte période, au contraire, le noyau et la croûte se meuvent indépendamment l'un de l'autre; dans les mouvements à période moyenne, on peut considérer les deux parties comme s'entraînant partiellement, et il y a en outre, généralement, une variation de phase dans l'action des forces. » Ce théorème n'est pas toutefois établi avec une rigueur absolue.

Deruyts (*J.*). — Sur la théorie des formes algébriques à un nombre quelconque de variables. (951-980).

Le Paige. — Rapport. (935-937).

Mémoire important, mais difficile à analyser brièvement, où l'auteur étend aux formes à un nombre quelconque de variables la théorie des semi-invariants et des semi-covariants (étudiée seulement jusqu'à présent pour les formes binaires).

Tome XVI, juillet à décembre 1888.

Catalan (*E.*). — Rapport sur le Mémoire : *Sur quelques formules de Calcul intégral*, par J. Beaupain. (15-19).

Réduction aux fonctions gamma des intégrales de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos q x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin q x \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^t x \cos q x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^t x \sin q x \, dx.$$

le plus souvent, en remplaçant la fonction à intégrer par un développement suivant les sinus ou cosinus des multiples de x.

Goedseels (*E.*). — De la longueur d'une ligne. (86-92).

Mansion (*P.*). — Rapport. (20-24).

L'auteur établit autrement que Scheeffer, dont la démonstration n'est pas générale (*Acta mathematica*, t. V, p. 49-82; 1884) et M. Jordan (*Cours d'Analyse*, t. III, Note, n° 46-51) le théorème suivant : « Tous les polygones variables, à côtés indéfiniment décroissants, inscrits dans une courbe continue, ont leurs périmètres tendant vers une limite unique finie ou infinie ». *Voir* un commentaire de cette petite Note, dans *Mathesis*, t. VIII, p. 262-264.

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur les moyens d'évaluer et de combattre l'influence de la capillarité dans la densimétrie. (31-42).

De Heen (*P.*). — Détermination des variations que le coefficient de frottement des solides éprouve avec la température. (57-62).

De Heen (*P.*). — Détermination des variations que le frottement intérieur de l'air pris sous diverses pressions éprouve avec la température. (195-206).

Le dernier travail de M. de Heen infirme les conclusions de Hirn contre la théorie cinétique des gaz.

Deruyts (*J.*). — Sur la différentiation mutuelle des fonctions invariantes. (207-215).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (149-150).

Conséquences de la remarque suivante, qui est très simple et néanmoins ne paraît pas avoir été faite. Soit une forme invariantive I telle que

$$I(Q', Q'', \ldots) = \delta^{\lambda} I(q', q'', \ldots);$$

on aura nécessairement

$$I(P', P'', \ldots) = \delta^{\lambda} I(p', p'', \ldots),$$

si les P s'expriment, à l'aide des p comme les Q au moyen des q. L'expression $I(p', p'', \ldots)$ sera une fonction invariante si les quantités comprises dans les p s'expriment en fonction entière de quantités analogues à celles qui sont comprises dans les q; si de plus les quantités P s'obtiennent, à part une puissance de δ, en remplaçant, dans les p, les quantités q par leurs transformées Q

Lagrange (*Ch.*). — Note concernant la vérification numérique d'une formule relative à la force élastique des gaz. (171-193).

Cette Note intéressante contient, outre la vérification expérimentale dont il est parlé dans le titre, un essai de démonstration de la formule suivante

$$P = \frac{f T^2 r^2}{\rho^3 - r^3} - A;$$

f est une constante indépendante du gaz, r le rayon de l'élément gazeux, ρ la demi-distance des centres élémentaires, A un terme dépendant de l'attraction moléculaire, T la température absolue, P la pression du gaz par unité de surface. L'auteur est conduit à reconnaître l'existence d'une force d'attraction universelle proportionnelle aux masses, en raison inverse du carré de la distance, d'intensité constante et se transmettant à travers la matière; puis l'existence d'une répulsion universelle proportionnelle aux surfaces, en raison inverse du cube de la distance, d'intensité variable T et interceptée par la matière. La répulsion et aussi l'attraction d'un atome sur un autre n'est pas, en général, égale à celle du second sur le premier.

Catalan (*E.*). — Sur un cas particulier de la formule du binôme. (194).

Deruyts (*J.*). — Sur quelques propriétés des transformations linéaires. (576-589).

Généralisation des résultats signalés plus haut (p. 207-215) du même Volume).

Catalan (*E.*) et *Mansion* (*P.*). — Rapports sur le Mémoire de M. J. Beaupain intitulé : *Nouvelles recherches sur quelques formules de Calcul intégral.* (543-549).

Analyse de ce Mémoire où l'auteur indique des cas nombreux de réduction aux fonctions gamma des intégrales de la forme

$$\int_0^1 x^p (1 + x)^q \, dx,$$

$$\int_0^1 x^p (1 - x)^q (1 + x)^r \, dx, \quad \int_0^1 \frac{(1 + x)^r (1 - x)^s - (1 + x)^s (1 - x)^r}{x} \, dx.$$

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Douzième année, 1887-1888. Bruxelles, F. Hayez; 1888 (A, première Partie; B, seconde Partie) (¹).

Mansion (*P.*). — Sur une Table du papyrus Rhind. (A, 44-46).

Le papyrus Rhind contient une Table de décomposition des fractions de la forme $\frac{2}{2p+1}$ (de $p=2$ à $p=49$) en quantièmes. Entre toutes les décompositions possibles, il semble que l'auteur égyptien a choisi celle qui conduit à une dernière fraction de dénominateur le plus petit, sauf dans quelques cas spéciaux, où il a préféré un dénominateur un peu plus grand, mais divisible par 6.

Mansion (*P.*). — Sur la définition des invariants et covariants. (A, 47-49).

Si une fonction F(1) des coefficients et des variables d'un système primitif de formes algébriques est toujours nulle en même temps que la même fonction F(2) des nouveaux coefficients et des nouvelles variables du système transformé de ces formes algébriques, on a

$$F(2) = T\,F(1),$$

T étant une puissance du déterminant de la transformation.

Clasen (*B.-J.*). — Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. (B, 251-281).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 50-59).

Des deux premières équations (1_1), (1_2), (1_3), (1_4), (1_5)

$$(1_i) \qquad a_i x + b_i y + c_i z + d_i u + e_i v = f_i,$$

on tire aisément, en posant $a_1 b_2 - a_2 b_1 = (ab)$,

$$(2_2) \qquad (ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v = (af),$$

puis de (1_1) et (2_2)

$$(2_1) \qquad -(ab)x + (bc)z + (bd)u + (be)v = (bf).$$

De (2_1), (2_2), (1_3), puis de (3_1) et (1_2), de (3_4) et (2_1), on déduit

$$(3_1) \qquad (abc)z + (abd)u + (abe)v = (abf),$$

$$(3_2) \qquad -(abc)y + (acd)u + (ace)v = (acf),$$

$$(3_3) \qquad (abc)x + (bcd)u + (bce)v = (bcf).$$

(¹) Voir *Bulletin*, XX₂, p. 16-18.

(abc) désignant le déterminant $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$. De (1_4), (3_1), (3_2), (3_3), on élimine aisément x, y, z et l'on trouve, en posant $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = (abcd)$

$$(4_4) \qquad (abcd)u + (abce)v = (abcf),$$

et ainsi de suite. Toutes les éliminations se font par addition et soustraction dans la recherche des équations (2_2), (3_3), (4_4), etc. Elles réussissent parce que les coefficients des inconnues à éliminer des groupes (2), (3), (4) sont égaux. L'élimination qui donne les équations (2_1), (3_1) et (3_2), (4_1), (4_2) et (4_3), etc. se fait aussi par addition et soustraction, mais, de plus, on fait disparaître, par division, un facteur inutile qui se présente dans les calculs. Pour cela, on s'appuie sur le théorème suivant :

$$(abc\ldots gkl)(abc\ldots gh) = (abc\ldots gk)(abc\ldots ghl) - (abc\ldots gl)(abc\ldots ghk).$$

Dans ce mode d'exposition de la résolution des équations linéaires, tous les calculs sont réversibles, de sorte que la vérification des valeurs finales n'est pas nécessaire comme dans le cas où l'on emploie les déterminants; la discussion des cas d'incompatibilité et d'indétermination se fait tout naturellement; au point de vue pratique, la méthode nouvelle ou *méthode des coefficients égaux* est plus expéditive que la méthode habituelle. Elle fournit d'ailleurs le moyen de calculer un déterminant quelconque, plus rapidement que par décomposition en ses mineurs. M. Clasen expose son procédé sans recourir aux déterminants, par la méthode des coefficients indéterminés.

De Sparre. — Cours sur les fonctions elliptiques professé pendant l'année 1887 à la Faculté catholique des Sciences de Lyon. (Troisième Partie, B., 1-90).

1. Réduction aux fonctions $p(u)$ des intégrales qui dépendent des fonctions elliptiques, lorsque les intégrales ont été ramenées au préalable à la forme canonique. 2. Réduction directe des intégrales dépendant des fonctions elliptiques aux fonctions $p(u)$ lorsque les racines de la quantité, sous le radical, ne sont pas en évidence. 3. Théorème d'addition pour $p(u)$. 4. Étude de $p(u)$ quand le discriminant est négatif. 5-6. Calcul du module k et du multiplicateur γ en fonction des invariants g_2 et g_3. 7. Calcul direct des périodes et des autres éléments, en fonction de γ et de k. 8. Définition des fonctions sigma. 9. Calcul du module et du multiplicateur lorsque les racines de la quantité, sous le radical, sont en évidence. 10. Applications. 1° Mouvement du pendule circulaire dans l'air, lorsque l'on suppose la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. 2° Mouvement d'un point pesant sur un cercle qui tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'un axe vertical situé dans son plan.

Gilbert (Ph.). — Sur les relations entre les coefficients calorimétriques d'un corps. (B., 91-96).

Quand on connaît la relation entre la pression, le volume et la température absolue d'un corps, on peut déterminer complètement certains coefficients calorimétriques, d'autres seulement à une fonction arbitraire près de la température absolue. L'auteur retrouve, d'une manière simple, les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les deux caloriques spécifiques et en

tire quelques conséquences dans les cas où ils ne dépendent que de la température.

Delsaux (*J.*). — Sur la tension électrique suivant les lignes de force dans les milieux diélectriques. (B., 97-104).

Démonstration du théorème de Maxwell :

« L'action mécanique, qu'un système électrisé exerce sur l'un des corps du système, est réductible à des actions élémentaires qui s'exerceraient sur les points d'une surface fermée quelconque enveloppant le seul corps considéré et liée invariablement avec lui. Pour que ces forces élémentaires soient normales aux éléments de la surface qu'ils sollicitent, il faut et il suffit que ces éléments soient normaux aux lignes de force ou tangents à celles-ci, et dans l'un et l'autre cas, elles sont égales au quotient par 8π du carré de la force électromotrice. »

Delsaux (*J.*). — Sur la théorie cinétique des phénomènes capillaires. (B., 105-120).

L'auteur établit les lois fondamentales de la capillarité, dans l'hypothèse cinétique, en s'appuyant uniquement sur le principe de l'équivalence de la force vive et du travail. Il montre ensuite que les constantes capillaires de Gauss et celles de Laplace ne diffèrent que par la forme.

Mansion (*P.*). — Sur le calcul approché d'une intégrale définie. (A., 63-65).

Les intégrales

$$I_r = \int_0^r e^{-t^2}\,dt, \qquad I_r^2 = \int_0^r dx \int_0^r dy\, e^{-x^2-y^2}$$

s'obtiennent aisément, d'une manière approximative, en observant que la seconde est comprise entre les volumes situés entre la surface $z = e^{-x^2-y^2}$, les trois plans coordonnés et les cylindres ayant pour équations

$$x^2+y^2 = r^2, \qquad \pi(x^2+y^2) = 4r^2.$$

Gilbert (*Ph.*). — Sur les différentes manières de traiter un problème de Mécanique. (A., 65-71).

« Deux points mobiles, sans frottement sur deux cercles concentriques, sont soumis à leur action réciproque, fonction de leur distance. Déterminer leur mouvement et la pression qu'ils exercent. »

L'auteur traite cette question par la considération des composantes tangentielles et normale de la force motrice, par le théorème des forces vives, par celui des aires, enfin par les équations de Lagrange. Les diverses méthodes se complètent l'une l'autre.

Baule (*A.*). — Note sur le gyroscope collimateur de M. le capitaine de vaisseau Fleuriais. (B., 121-176). Addition (177-184).

Description et théorie de cet instrument. Dans l'addition, l'auteur prouve l'existence d'une influence sensible de la rotation de la Terre sur l'instrument, et il indique comment on peut en tenir compte en pratique.

Ocagne (*D'*). — Note sur les systèmes de péninvariants principaux des formes binaires. (B., 185-189).

Complément d'une Note publiée dans le tome précédent. L'auteur indique comment on peut, dans la moitié des cas, exprimer les uns au moyen des autres, certains peninvariants principaux des formes binaires. M. Cesáro a résolu la question pour les autres cas.

Biervliet (*A. van*). — Contributions à l'étude des dilatations par la mesure du déplacement des franges d'interférences. (B., 215-250).

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion* et *J. Neuberg*. Paris, Gauthier-Villars et fils; Gand, Hoste (1).

Tome VIII; 1888.

Longchamps (*G. de*). — Sur une trisectrice remarquable. (5-10; 70).

Étude de la transformée par polaires réciproques de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Elle a pour équation

$$\rho \cos 3\omega + R = 0;$$

son aire s'obtient par les fonctions élémentaires, sa longueur par les intégrales elliptiques.

Servais (*Cl.*). — Applications de la quasi-inversion linéaire aux courbes osculatrices. (28-35).

Applications nombreuses de la transformation suivante : Étant donnés une conique S et un point fixe A de cette conique, deux points sont correspondants, s'ils sont en ligne droite avec A et conjugués par rapport à S. L'auteur prend pour S un cercle, et obtient un grand nombre de théorèmes élégants sur les coniques, puis aussi quelques propriétés de la strophoïde.

Cesáro (*E.*). — Développantes du point. (36-38).

(1) Voir *Bulletin*, XX$_2$, 11-15. Ce Recueil paraît en livraisons mensuelles de 24 pages, parfois avec supplément. Prix : 7fr,50 pour la Belgique; 9fr pour l'Union postale.

On peut obtenir l'équation cartésienne d'une courbe donnée par son équation intrinsèque $\rho = f(s)$, où s est l'arc, ρ le rayon de courbure, en se servant des relations

$$ds = \rho\, d\theta, \qquad dx = \rho \cos\theta\, d\theta, \qquad dy = \rho \sin\theta\, d\theta,$$

θ étant l'angle de la tangente avec l'axe des x. En appelant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les dérivées successives de ρ par rapport à θ, ou les rayons de courbure des développées successives, puis faisant

$$A = \rho_1 - \rho_3 + \rho_5 - \ldots, \qquad B = \rho - \rho_2 + \rho_4 - \ldots,$$

on trouve, quand ces séries sont déterminées,

$$x = A\cos\theta + B\sin\theta, \qquad y = A\sin\theta - B\cos\theta.$$

La courbe définie par ces relations est la développante d'ordre infini du point limite des centres de courbure des développées successives, lequel a pour coordonnées A et B.

Jamet (V.). — Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes. (40-44; 89-91).

1. Si $n = 2^p$, p étant entier, et si a est plus grand que l'unité, l'expression

$$a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

décroît en même temps que p croît; on a ensuite

$$a_n > 1 - \frac{1}{a};$$

par suite, a_n a une limite finie supérieure à $1 - \frac{1}{a}$. Par définition

$$\lim a_n = \log a.$$

2. On prouve aisément, sans recourir au binôme de Newton, que l'on a

$$a_n > \log a > a_n - \frac{1}{2n} a_n^2.$$

3. Les logarithmes ainsi définis jouissent des propriétés suivantes

1° $\log(ab) = \log a + \log b$.
2° $\log\infty = \infty$, $\log 0 = -\infty$.
3° $\log a$ est une fonction continue de a.
4° Si $\log x = 1$, on a

$$x = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

pour $n = \infty$.

Sylvester (J.-J.). — Sur les nombres parfaits. (57-61).

Reproduction annotée de l'article publié dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 403-405.

Ocagne (*M. d'*). — Note sur les points complémentaires. (62-63).

Bergmans (*C.*). — Théorèmes sur la parabole. (63-68).

Jeřábek, Neuberg, Fuhrmann. — Sur l'hyperbole inverse de la droite d'Euler. (81-89; 115).

Étude approfondie d'une hyperbole équilatère passant par les sommets d'un triangle, le centre du cercle circonscrit, le point de Lemoine, l'orthocentre.

Servais (*Cl.*). — Sur les nombres parfaits. (92-93; 135).

S'il existe un nombre parfait contenant n facteurs premiers, le plus petit de ces facteurs ne dépasse pas n. Il n'existe pas de nombres parfaits ne contenant que trois facteurs premiers.

Servais (*Cl.*). — Sur la théorie des transformations. (105-109).

1. Sur diverses transformations planes. 2. Génération des courbes ayant un point multiple à l'infini. 3. Transformation arguésienne de M. Saltel.

Longchamps (*G. de*). — Sur les normales aux coniques. (110-111).

Mansion (*P.*). — Méthode des infiniment petits. (149-157).

Sens exact du principe de substitution des infiniment petits.

Neuberg (*J.*). — Sur les transformations quadriques involutives. (177-183).

Étude de la transformation suivante : Deux faisceaux involutifs ont leurs centres en deux points fixes A, B; si deux rayons AM, BM se coupent en M, les rayons conjugués AM', BM' se coupent en un point M'; M et M' se correspondent réciproquement.

Cesáro (*E.*). — Moment d'inertie du triangle et du tétraèdre. (183-186).

Lemoine (*E.*). — Mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques. (217-222; 241-244).

La simplicité est mesurée par le nombre d'opérations élémentaires (faire passer une règle en *un* point, mettre la pointe d'un compas en un point; mener une droite; tracer une circonférence). En ce sens, la solution de Viète, pour la construction des huit circonférences tangentes à trois circonférences données, comporte 335 opérations; la solution de Bobilier et Gergonne, par inversion, 500 opérations; elle est donc moins simple.

Gilbert (*Ph.*). — Détermination en grandeur et en direction des axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde. (247-249).

Mansion (*P.*). — Sur la longueur d'une ligne courbe. (262-264).

Les démonstrations de Jordan et de Goedseels sont complétées par le lemme suivant : La distance entre deux points choisis arbitrairement sur tout arc de courbe sous-tendu par un côté d'un polygone à côtés suffisamment petits est inférieure à une quantité d donnée d'avance. La courbe est supposée non fermée, sans boucle, et continue.

Suppléments.

I. *Gelin* (*E.*). — La monnaie. (1-16).

II. *Le Paige* (*C.*) et *Deruyts* (*Fr.*). — Sur les théorèmes fondamentaux de la Géométrie projective. (1-15).

Voir *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 3e série, XV, 335-347.

III. *Gelin* (*E.*). — Calcul des lignes trigonométriques des arcs du premier quadrant, de trois en trois degrés. (1-7).

IV. *Gelin* (*E.*). — Questions diverses de Trigonométrie. (1-15).

V. *Goedseels* (*E.*). — De la longueur d'une ligne. (1-12).

Voir *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 3e série, XV, 20-24; 86-92.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE. — 2e série, Bruxelles, Hayez.

Tome XIV, 1888.

Deruyts (*J.*). — Sur une classe de polynômes analogues aux fonctions de Legendre. (1-15).

Étude des polynômes P_n définis par l'égalité

$$P_n = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-p}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-q}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n+p-1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+q-1}\right],$$

où a et b sont réels et non nuls, p et q positifs.

Deruyts (*J.*). — Sur certains systèmes de polynômes associés. (1-16).

Généralisation d'un travail antérieur : *Sur une classe de polynômes conjugués,* publiés tome XLVI des *Mémoires couronnés in-4° de l'Académie de Belgique.*

Deruyts (*Fr.*). — Génération d'une surface du troisième ordre. (1-12).

Deruyts (*Fr.*). — Sur quelques transformations géométriques. (1-14).

Application ou extension de recherches de M. Le Paige, sur les surfaces ou les transformations cubiques.

Studnička (*F.-J.*). — Sur l'analogue hyperbolique du nombre π. (1-12).

Le nombre $\Pi = 2 \operatorname{Arg} \operatorname{sh} + = 2 \log(1 + \sqrt{2})$, et non la valeur double, a des propriétés analogues à π.

Tome XV, novembre 1888.

Catalan (*E.*). — Mélanges mathématiques. Tome troisième. (1-275).

Réunion de 84 Notes, plus ou moins étendues, plus ou moins importantes sur presque toutes les parties des Mathématiques.

Piretti (*P.*). — Sur le calcul du résultat d'un système d'observations directes. (1-32).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (33-36).

La fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n valeurs observées d'une grandeur, qui représente le mieux la valeur de cette grandeur, doit être symétrique par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, devenir $c\varphi$, quand $x_1, \ldots, x_n$ deviennent $cx_1, \ldots, cx_n$, $\varphi + k$, quand $x_1, \ldots, x_n$ croissent de k, être égale à x_1, si $x_2, \ldots, x_n$ sont égaux à x_1. Tels sont les axiomes que l'auteur indique explicitement comme base de sa théorie.

Deruyts (*J.*). — Sur les semi-invariants de formes binaires. (Première Note, 11 pages; deuxième Note, 8 pages).

Complément de travaux antérieurs.

Le Paige (C.). — Démonstration d'un théorème de von Staudt. (8 pages).

De trois éléments donnés d'une ponctuelle, on peut déduire, par des constructions répétées de groupes harmoniques, tous les points de la ponctuelle.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CX; 1890.

Appell. — Sur les fonctions elliptiques. (31-34).

L'auteur présente des considérations qui justifient *a priori* la représentation des fonctions elliptiques par le quotient de deux fonctions Θ. Ces considérations paraissent pouvoir être étendues aux fonctions de deux variables avec quatre groupes de périodes, si l'on s'appuie sur ce théorème de M. Poincaré (*Acta mathematica,* t. II) :

Une fonction de deux variables qui se comporte à distance finie comme une fraction rationnelle peut être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction est indéterminée.

Painlevé. — Sur les intégrales rationnelles des équations de premier ordre. (34-36).

Étant donnée une équation différentielle d'ordre quelconque, on peut toujours trouver les polynômes qui vérifient cette équation, en déterminant une limite supérieure de leur degré. Mais on ne sait que dans des cas fort rares déterminer les intégrales ayant la forme de fractions rationnelles.

M. Painlevé signale un cas où l'on pourra sûrement résoudre cette question : c'est celui où l'équation différentielle a la forme

$$y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)},$$

P et Q étant des polynômes.

Soit x_0, y_0 un point commun aux deux courbes $P = 0$, $Q = 0$; on sait reconnaître si l'équation différentielle admet des intégrales holomorphes prenant pour x_0 la valeur y_0 et déterminer l'ordre de $y - y_0$ par rapport à $x - x_0$. Comme la courbe cherchée

$$y = R(x)$$

(R étant une fraction rationnelle) ne peut rencontrer la courbe $Q = 0$ qu'aux points qui lui sont communs avec $P = 0$, on déduit immédiatement de là l'ordre maximum de multiplicité du point (x_0, y_0) considéré comme point de rencontre de $y = R(x)$ et de $Q(x, y) = 0$. En faisant ce calcul pour tous les points (x_0, y_0), on obtient une limite supérieure μ du nombre des points d'intersection de ces deux dernières courbes. Soient m le degré de Q, n celui des

deux termes de R; la courbe $y = R(x)$ étant de degré $n+1$, on a

$$\mu \leq m(n+1),$$

d'où l'on déduit une limite de n. Les intégrales $R(x)$ se calculent dès lors algébriquement.

M. Painlevé indique quelques types d'équations différentielles plus compliquées, dont les intégrales rationnelles peuvent être calculées d'une manière analogue.

Picard. — Sur l'emploi des approximations successives dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles. (61-67).

Étant donnée l'équation du second ordre aux dérivées partielles

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

où A, B, C sont des fonctions connues des variables indépendantes x et y, on pourra l'intégrer de la manière suivante.

On mettra dans le second membre une fonction quelconque u_1 de x et y, et on cherchera l'intégrale u_2 de cette équation, en se donnant les conditions aux limites qui achèvent de la déterminer. Mettant ensuite u_2 dans le second membre, on cherchera l'intégrale u_3 qui satisfait aux mêmes conditions aux limites, et ainsi de suite indéfiniment.

Une distinction capitale est à faire suivant le signe de $B^2 - AC$.

Si $B^2 - AC$ est positif, les approximations successives conduiront à une intégrale de l'équation (1) prenant des valeurs données sur le contour. Toutefois on ne peut pas affirmer que cette intégrale soit unique.

Si $B^2 - AC$ est négatif, on prendra dans le plan Ox, Oy un arc de courbe quelconque C; la méthode conduira, dans une aire suffisamment petite, à une intégrale u, dont les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ prennent sur l'arc C une succession continue de valeurs assignées à l'avance, u prenant une valeur donnée en un point de C. On doit remarquer que u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ (à l'inverse de ce qui a lieu quand les caractéristiques sont imaginaires) restent continues quand on traverse l'arc C.

Il est intéressant de trouver les équations où une intégrale supposée continue ainsi que ses dérivées partielles est toujours déterminée par ses valeurs sur un contour fermé de dimensions quelconques. Telle est l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y),$$

F étant une fonction positive et croissant toujours en même temps que u.

L'application des théorèmes précédents, unie à l'emploi du procédé alterné de M. Schwarz, montre qu'il y a une intégrale unique prenant sur le contour une succession de valeurs données.

Parmi les équations rentrant dans le type précédent, M. Picard signale en y

insistant l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

où k désigne une constante positive.

Laissant de côté les intégrales holomorphes à l'intérieur du contour, il étudie celles qui ont des points logarithmiques (a, b), où l'intégrale devient infinie comme

$$m \log[(x - x)^2 + (y - b)^2].$$

Ces intégrales (lorsqu'on se donne les coefficients m) dépendent seulement d'une constante arbitraire; une pareille intégrale est donc déterminée quand on donne sa valeur en un point du plan distinct des points singuliers.

Cette conclusion est applicable non seulement au plan simple, mais encore au plan multiple, c'est-à-dire au plan recouvert d'un certain nombre de feuillets formant une surface de Riemann.

Jonquières (*de*). — Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. (110-115).

La célèbre relation trouvée par Euler (1752) entre le nombre des faces, celui des angles et celui des arêtes d'un polyèdre ne fut pendant longtemps regardée comme certaine que pour les polyèdres convexes bien que l'auteur en eût affirmé la parfaite généralité, par induction il est vrai, et sans en donner de démonstration.

En 1811, Cauchy donna de cette relation une démonstration complète, dans laquelle il prétend « être parvenu à un théorème plus général que celui d'Euler ».

Toutefois M. de Jonquières signale une restriction que l'on doit apporter à l'énoncé de cette proposition. Il faut que le polyèdre, agrégat d'autant de tétraèdres ou de polyèdres qu'on voudra, ne se compose que de tétraèdres ou polyèdres soudés l'un à l'autre par *une de leurs faces* (partielle ou totale), et non pas seulement par une de leurs arêtes ou un de leurs sommets, comme serait le polyèdre formé par deux pyramides symétriques.

Hamy. — Sur la théorie de la figure des planètes. (124-125).

On doit à M. Poincaré ce théorème :

Si une masse hétérogène, en équilibre relatif, est composée : 1° d'un noyau solide dont la constitution physique et la forme sont inconnues; 2° de deux couches fluides superposées au noyau et limitées par des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes sont homofocaux.

Voici, suivant M. Hamy, quelques conditions auxquelles la constitution du noyau doit être soumise lorsque les ellipsoïdes sont de révolution, aplatis et tournent autour de leur axe de figure :

1° Le centre de gravité de la masse M_1, formée par le noyau et par la première couche fluide, en contact avec le noyau, doit coïncider avec le centre de figure de l'ellipsoïde E_1 qui limite cette couche; et l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point doit être de révolution autour de l'axe de rotation.

2° On doit avoir l'inégalité

$$C_1 - A_1 \ [illegible] \ M_1.$$

C_1 et A_1 étant les moments principaux d'inertie de E, par rapport à la ligne des pôles et à un diamètre équatorial, $2c$ la distance des foyers de l'ellipse méridienne.

Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes. L'inégalité qui précède permet d'affirmer que le système planétaire ne présente pas d'exemple des figures imaginées par M. Poincaré.

L'auteur indique quelques propriétés des fonctions de Lamé et de Liouville qu'il a trouvées chemin faisant.

Guichard. — Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale. (126-127).

M. Lelieuvre a montré que, si les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point M d'une surface F sont exprimées en fonction des paramètres u, v des lignes asymptotiques, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v},$$

et les deux autres couples d'équations analogues pour y et z; ξ, η, ζ désignent trois solutions linéairement indépendantes d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta.$$

ρ étant une autre solution de cette dernière, M. Guichard s'en sert pour faire la transformation due à M. Moutard. Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les transformées de ξ, η, ζ; si l'on détermine un point M_1 ayant pour coordonnées

$$x_1 = x + \eta_1 \zeta - \zeta_1 \eta,$$

$$y_1 = y + \zeta_1 \xi - \xi_1 \zeta,$$

$$z_1 = z + \xi_1 \eta - \eta_1 \xi,$$

on aura

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \eta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} - \zeta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\eta_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} + \zeta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial v},$$

. . . .

Ces formules montrent : 1° que la surface F_1 lieu du point M_1 est normale en ce point à la droite dont les composantes sont ξ_1, η_1, ζ_1; 2° que les courbes de paramètre u, v sont les asymptotiques de F_1.

Enfin les expressions de x_1, y_1, z_1 font voir que la droite MM_1 est tangente aux deux surfaces F et F_1. Cette droite engendre une congruence telle que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales.

Zaremba. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. (127-129).

La détermination de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial z^2}{\partial x\, \partial y} + \varphi_1(x+y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \varphi_2(x+y)\, z = 0,$$

φ_1 et φ_2 étant deux fonctions quelconques de $x+y$, peut être ramenée, comme le montre M. Zaremba, à l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre et à des quadratures.

La solution présentée par l'auteur avait été donnée antérieurement par Riemann, mais sans démonstration et sans égard aux limites de la région où demeure valable une certaine intégrale qui y figure.

Une fois en possession de cette solution, M. Zaremba est presque immédiatement en état de résoudre ce problème posé par M. Darboux :

Réduire l'élément linéaire tracé sur une surface développable à la forme

$$ds^2 = \alpha\, du^2 + \frac{1}{\alpha}\, dv^2,$$

α étant une fonction de u et de v.

Cette forme de l'élément linéaire permet de réaliser une représentation de la développable telle qu'aux rectangles du plan, dont les côtés sont parallèles à deux droites fixes, correspondent sur la surface des rectangles de même aire.

Jonquières (de). — Sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. (169-173).

Cayley. — Sur les racines d'une équation algébrique. (174-176).

Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. Cette démonstration, autre dans la forme que celles de Gauss et de Cauchy, repose au fond sur les mêmes principes.

Appell. — Sur les fonctions de deux variables à plusieurs paires de périodes. (181-183).

L'auteur étend aux fonctions périodiques de deux variables les considérations qu'il a présentées dans sa Note précédente sur les fonctions elliptiques.

Painlevé. — Sur les transformations simplement rationnelles des surfaces algébriques. (184-186).

Cette Note a pour objet d'étendre aux transformations simplement rationnelles la méthode de M. Picard, relative aux transformations birationnelles des surfaces.

Il convient de distinguer les surfaces algébriques S en trois classes :

Soit S une surface algébrique ; p le nombre (supérieur à 1) des polynômes L linéairement distincts, p_1 le genre de la courbe d'intersection de S avec la surface Σ (où L $=$ 0).

La première classe (la plus générale) comprend les surfaces S pour lesquelles

toute surface Σ qui passe par un point de S ne passe pas par d'autres points correspondants (en dehors des points singuliers).

La deuxième classe (où M. Painlevé range les surfaces de genre $p = 3$) comprend les surfaces pour lesquelles toute surface Σ passant par un point de S passe par $(n-1)$ autres points correspondants $\left(n \leqq \frac{p_1 - 3}{p - 3}\right)$. Toute surface Σ tangente à S en un point est tangente aux points correspondants.

La troisième classe comprend les surfaces S (en particulier les surfaces de genres $p = 2$) pour lesquelles deux surfaces Σ qui ont un point commun avec S ont une ligne commune avec cette surface.

Cela posé, M. Painlevé peut aborder l'étude des transformations rationnelles des surfaces algébriques.

Soient S et S' deux pareilles surfaces et

$$(1) \qquad x = h(x', y', z'), \qquad y = k(x', y', z'), \qquad z = l(x', y', z')$$

une substitution rationnelle qui transforme S en S'.

Jamais cette transformation ne peut dépendre de deux paramètres ou d'un plus grand nombre, et dans tous les cas on a

$$p \leqq p', \qquad p_1 \leqq p'_1.$$

Si S est de première classe, il n'existe qu'un nombre fini de substitutions (1) et on les détermine algébriquement. C'est aussi par des opérations purement algébriques qu'on peut déterminer toutes les surfaces S *distinctes* de la première classe, c'est-à-dire qui correspondent rationnellement à S', mais non birationnellement. Ces surfaces S, qu'on peut toujours supposer d'un degré au plus égal à $p'_1 - p' + 3$, sont en nombre fini.

Quand la surface appartient à la seconde classe, on peut encore déterminer algébriquement toutes les substitutions (1) et, par suite, il n'en existe qu'un nombre limité. Toutes les surfaces S *distinctes* de deuxième classe qui correspondent rationnellement à S peuvent aussi être trouvées par des calculs algébriques.

Enfin, lorsque S appartient à la troisième classe (ce qui a toujours lieu si S' appartient aussi à cette classe), la transformation (1) peut présenter deux types bien différents : ou bien elle dépend d'un paramètre et de plusieurs entiers arbitraires; ou bien elle ne dépend que d'entiers arbitraires.

Cayley. — Sur les racines d'une équation algébrique. (215-218).

Mannheim. — Sur un mode de transformation en Géométrie cinématique. (220-223).

M. Mannheim indique un procédé de transformation qui permet de passer des propriétés relatives aux déplacements des points d'une droite à celles qui concernent des faisceaux de plans de grandeur invariable.

Ce procédé consiste à substituer à l'étude des déplacements de points en ligne droite celle des déplacements d'une *file de sphères* invariables dont les centres sont sur une même droite. Une pareille figure conduit aux points en ligne droite lorsque les sphères mobiles ont leur rayon nul, et aux plans parallèles à une droite lorsque les rayons de ces sphères sont infinis.

C'est ainsi que l'auteur passe de ce théorème : « Si une droite D se déplace de façon que trois de ses points restent respectivement sur des sphères dont les centres appartiennent à une droite D', les autres points de D se déplacent aussi sur des sphères dont les centres sont sur D' », au suivant : « Lorsqu'un faisceau de plans de grandeur invariable se déplace de façon que trois de ses plans restent respectivement tangents à des sphères fixes dont les centres appartiennent à une droite D', un plan quelconque du faisceau mobile reste tangent à une sphère dont le centre est sur D' » ; et de ce théorème : « Les centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite mobile sont sur une courbe gauche du sixième ordre », à celui-ci : « Les surfaces auxquelles les plans d'un faisceau de grandeur invariable restent tangents pendant les déplacements de ce faisceau ont leurs centres de courbure principaux sur une courbe gauche du sixième ordre ».

Raffy. — Détermination des surfaces harmoniques réglées. (223-226).

Les seules surfaces réglées dont l'élément linéaire soit réductible à la forme harmonique (forme de Liouville) sont applicables ou bien sur les surfaces de révolution ou bien sur les quadriques.

Painlevé. — Sur les transformations simplement rationnelles des surfaces et sur une classe d'équations différentielles. (226-229).

Le problème de la transformation rationnelle des surfaces trouve une application dans la théorie des équations différentielles du second ordre. Soit

$$(1) \qquad F[y'', y', y, (x)] = 0$$

une équation dont le premier membre est un polynôme, irréductible, en y'', y', y. Si l'on suppose que l'intégrale générale dépende algébriquement des constantes, on peut la mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$\alpha = R[y'', y', y, (x)],$$
$$\beta = R_1[y'', y', y, (x)],$$
$$\gamma = R_2[y'', y', y, (x)],$$

R, R_1, R_2 désignant des fractions rationnelles de y'', y', y, et choisir ces intégrales premières de telle façon que toute intégrale de même forme

$$\delta = R_3[y'', y', y, (x)]$$

s'exprime rationnellement en α, β, γ. Les quantités α, β, γ sont liées par une relation algébrique

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

que M. Painlevé a appelée *relation fondamentale*.

Le problème que l'auteur se pose est le suivant :

« Reconnaître si l'intégrale de (1) dépend algébriquement des constantes, la relation fondamentale correspondante étant de genre plus grand que 1. »

On reconnaît par des calculs purement algébriques s'il en est ainsi, et alors l'équation s'intègre algébriquement; ou bien l'on ramène l'équation aux équations linéaires.

Jonquières (*de*). — Note sur un Mémoire de Descartes longtemps inédit et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres. (261).

Dans un Mémoire de Descartes intitulé *De solidorum elementis,* longtemps inédit et encore peu connu, se trouvent énoncés de la manière la plus explicite deux théorèmes relatifs aux polyèdres convexes que l'on peut traduire par les formules

$$\Sigma = 4(S - 2),$$
$$\frac{\Sigma + 4F}{2} = 2A \quad \text{ou} \quad \Sigma = 4(A - F),$$

Σ désignant la somme des angles de toutes les faces, S le nombre des sommets, F celui des faces et A celui des arêtes.

Ces deux relations, rapprochées l'une de l'autre, donnent immédiatement et sans calcul la formule d'Euler

$$S + F = A + 2.$$

On ne saurait donc nier que Descartes ne connût cette dernière formule.

Stieltjes. — Sur la fonction exponentielle. (267-270).

Démonstration de l'impossibilité, pour le nombre e, de satisfaire à une équation algébrique à coefficients entiers

$$(1) \qquad N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0.$$

Cette démonstration fort simple, dont nous indiquerons brièvement le principe, repose sur les formules

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^a}{\mu!} \displaystyle\int_0^a e^{-z} F(z)\, dz = e^a P - P_1, \\ \dfrac{e^b}{\mu!} \displaystyle\int_0^b e^{-z} F(z)\, dz = e^b P - P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

où P, P_1, P_2, ..., sont des entiers et $F(z)$ le polynôme

$$F(z) = z^\mu (z - a)^{\mu + k_1} (z - b)^{\mu + k_2} \ldots (z - h)^{\mu + k_n},$$

de degré $(n + 1)\mu + k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Les formules (2) rapprochées de la relation (1) montrent que l'expression

$$N_1(e^a P - P_1) + N_2(e^b P - P_2) + \ldots + N_n(e^h P - P_n)$$

doit être un entier et que cet entier doit être zéro dès que μ dépasse une certaine limite. On doit donc pouvoir satisfaire, si l'on remplace les différences

$e^a P - P_1$, ... par leurs valeurs (2), à l'équation

$$\int_0^h (z) e^{-z} F(z)\, dz = 0,$$

la fonction (z) étant déterminée ainsi :

$$\begin{array}{ll}
\varphi(z) = N_1 e^a + N_1 e^b + \ldots + N_n e^h, & 0 < z < a, \\
\varphi(z) = N_1 e^b + \ldots + N_n e^h, & a < z < b, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\varphi(z) = N_n e^h, & g < z < h.
\end{array}$$

Cette fonction $\varphi(z)$, constante par intervalles, ne peut changer de signe que pour

$$z = a, \quad z = b, \quad \ldots, \quad z = g.$$

Dès lors, on voit aisément qu'en attribuant aux entiers arbitraires $k_1, k_2, \ldots, k_n$ soit la valeur 0, soit la valeur 1, on peut faire en sorte que l'élément différentiel $\varphi(z) e^{-z} F(z)$ ait un signe constant dans tout l'intervalle $(0, h)$.

Mannheim. — Sur un mode de transformation en Géométrie cinématique. (270-273).

Dans une Note précédente, l'auteur a montré comment on peut transformer les propriétés relatives aux déplacements d'une droite en propriétés relatives aux déplacements d'un faisceau de plans.

Il n'avait étudié que le cas où les points de la droite mobile décrivent des surfaces trajectoires. Il examine maintenant le cas où les points de la droite décrivent des lignes trajectoires.

La marche à suivre est toujours la même. On remplace d'abord la droite mobile par une file de sphères, puis on suppose que la droite des centres est rejetée à l'infini, afin de transformer les sphères en plans.

Entre autres applications de cette méthode, nous citerons la suivante. Partant de ce théorème bien connu : « Les plans normaux aux trajectoires des points d'une droite se coupent suivant une droite », et remplaçant la droite par une file de sphères, on voit que les plans des caractéristiques suivant lesquelles les sphères d'une file de sphères mobiles touchent les surfaces canaux qui sont leurs enveloppes, passent par une même droite ; et si l'on rejette la droite des centres à l'infini, les plans normaux aux plans d'un faisceau mobile de grandeur invariable menés pour une position du faisceau, respectivement par les caractéristiques de ces plans, se coupent suivant une droite.

Perrin. — Sur une généralisation du théorème d'Euler relatif aux polyèdres. (273-275).

L'auteur appelle *indice* d'une surface ouverte ou fermée l'excès (positif, nul ou négatif) du nombre n des parties, toutes simplement connexes, entre lesquelles on peut diviser la surface par un système arbitraire de sections, tant rentrantes que transverses, sur le nombre ν des sections transverses de ce système. Cet excès $I = n - \nu$ est indépendant de la disposition des sections et

dépend uniquement de la nature de la surface. Il est égal à 1 pour une aire à contour simple, à 2 pour une sphère, à 0 pour un tore, etc.

Si, sur une aire à contour simple ou sur une surface simplement connexe on trace un système arbitraire de S lignes joignant entre eux ou à des points quelconques du contour n points ou sommets pris à volonté, et si d est le nombre des points de croisement de ces lignes autres que les n sommets, on a, entre l'indice I de la surface et les indices i de diverses régions, la relation (indiquée par M. Perrin dès 1882)

$$\Sigma i = \mathrm{I} + \mathrm{S} + d - n.$$

Appliquée à un polyèdre dont toutes les faces sont simplement connexes et ont par suite pour indice l'unité, cette relation donne la formule

$$\mathrm{F} + \mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{I},$$

qui se réduit à celle d'Euler lorsque le polyèdre est sphéroïdal, $\mathrm{I} = 2$.

Plus généralement, pour tout solide limité par des surfaces fermées distinctes, d'indices respectifs I_1, I_2, ..., et découpées elles-mêmes en faces planes ou courbes d'indices $i_1, i_2, \ldots$, par un système de A lignes reliant deux à deux S points disposés d'une manière quelconque, on a

$$\Sigma i + \mathrm{S} = \mathrm{A} + \Sigma \mathrm{I}.$$

Tisserand. — Sur les mouvements des planètes en supposant l'attraction représentée par l'une des lois électrodynamiques de Gauss ou de Weber. (313-315).

Qu'arriverait-il si le système planétaire, au lieu d'être régi par la loi de Newton, l'était par l'une des lois proposées en électrodynamique par Gauss et par Weber :

$$\mathrm{R}_g = \frac{f\,mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{h^2}\left(2u^2 - \frac{dr^2}{dt^2}\right)\right],$$

$$\mathrm{R}_w = \frac{f\,mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{h^2}\left(2r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right)\right]?$$

C'est à cette question que M. Tisserand essayait de répondre dès 1872.

Il a montré que la substitution de la loi de Weber à celle de Newton, quand on donne à la constante h une valeur égale (ou comparable) à la vitesse de la lumière, ne produit dans les éléments elliptiques des planètes que des inégalités périodiques insensibles. La longitude du périhélie fait exception ; elle contient un terme séculaire dont l'expression est

$$\delta\varpi_w = \frac{f\mu}{ah^2}\,nt\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \ldots\right)$$

et dont la valeur, pour Mercure, est de $+14'',4$ en un siècle.

M. Tisserand vient de refaire pour la formule de Gauss les calculs qu'il avait faits antérieurement pour celle de Weber, et il a trouvé

$$\delta\varpi_g = \frac{2f\mu}{ah^2}\,nt\,(1 \quad e^2 \quad \ldots).$$

Le déplacement du périhélie est sensiblement le double de ce qu'il était avec la loi de Weber; pour Mercure, on a $\delta\pi_g = 28'',2$ en un siècle.

Le Verrier a trouvé que l'attraction newtonienne des planètes doit faire tourner dans le sens direct le périhélie de Mercure de 527″ en cent ans; mais la discussion des observations lui a montré que le mouvement réel est certainement plus grand de 38″. La loi de Gauss expliquerait les trois quarts de cet excédent.

Jonquières (*de*). — Écrit posthume de Descartes sur les polyèdres. (315-317).

Nouvelle preuve à l'appui de la priorité effective de Descartes dans la découverte de la relation

$$F + S = A + 2.$$

Seydler. — Sur le problème de Saint-Pétersbourg. (326-328).

Solution du problème de Saint-Pétersbourg, modifié par la condition nouvelle qu'on doit jeter la monnaie n fois, ni plus ni moins (la partie recommençant au besoin jusqu'à ce que le nombre n soit atteint).

Demartres. — Sur les surfaces réglées dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville. (329-330).

Les surfaces réglées dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville sont définies, suivant M. Demartres, par les conditions suivantes :

1° Le paramètre de distribution des normales est une fonction elliptique de l'arc de la ligne de striction ;

2° La tangente de l'angle que fait la ligne de striction avec la génératrice est proportionnelle à ce paramètre de distribution.

D'ailleurs, les seules surfaces réglées applicables sur une surface de révolution sont celles qu'a trouvées M. Bioche (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* mars 1888).

M. Demartres indique brièvement une généralisation de la méthode qui lui a fourni ces résultats : elle s'applique à toute classe de surfaces admettant comme génératrices une suite de courbes universales.

L'auteur annonce que cette méthode lui a permis d'obtenir un assez grand nombre de surfaces cerclées admettant des systèmes de Liouville.

Petot. — Sur les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme $ds^2 = F(U + V)(du^2 + dv^2)$. (330-334).

Pour que l'élément linéaire d'une surface S soit réductible à la forme

$$ds^2 = F(U + V)(du^2 + dv^2),$$

où U est une fonction arbitraire de u et V de v, il faut et il suffit que l'on puisse mener par chaque point M de la surface, dans des plans P_1 et P_2 respectivement normaux à des courbes formant un système orthogonal et isotherme, deux droites D_1 et D_2 engendrant deux congruences de normales, et formant

avec la normale à la surface S des angles θ_1 et θ_2 qui vérifient en chaque point la relation

$$\frac{d}{ds_2}\sin^2\theta_1 = \frac{d}{ds_1}\sin^2\theta_2,$$

où les dérivées $\frac{d}{ds_1}$, $\frac{d}{ds_1}$ sont prises respectivement suivant des directions respectivement perpendiculaires à P_1 et P_2.

Le cas particulier le plus intéressant est celui où l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville :

Pour que l'élément linéaire soit réductible à la forme

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2),$$

il faut et il suffit qu'on puisse mener par chaque point de la surface, dans des plans P_1 et P_2 respectivement normaux à des courbes formant un système orthogonal et isotherme, deux droites D_1 et D_2 engendrant deux congruences de normales et formant avec la normale à la surface S des angles qui, en chaque point de cette surface, sont complémentaires l'un de l'autre.

Janet (*P.*). — Extension de la conservation du flux de force et d'induction magnétiques. (336-339).

Le flux magnétique se conserve dans tout l'espace, y compris les conducteurs, magnétiques ou non, parcourus par des courants quelconques.

Ce théorème, qui fait de la conservation du flux d'induction la propriété la plus générale de l'électrodynamique, est démontré par M. P. Janet, sans aucune hypothèse sur le coefficient d'aimantation.

Mannheim. — Transformations en Géométrie cinématique. (391-394).

Dans deux Notes précédentes, M. Mannheim a montré comment on peut transformer les propriétés des trajectoires des points d'une droite. La méthode consiste essentiellement à remplacer les points de la droite mobile par une file de sphères dont les centres sont en ligne droite.

L'auteur présente actuellement comme exemple l'application de cette méthode à la transformation d'une construction et à celle d'une formule.

Janet (*P.*). — Sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques. (453-455).

Lorsqu'un conducteur magnétique est parcouru par des courants électriques, il prend (sous l'influence de forces non conservatives) une *aimantation transversale*.

Lorsque le coefficient d'aimantation k est constant, le magnétisme transversal induit est purement superficiel.

Le potentiel magnétique induit est défini par l'équation

$$\Omega = k\int \frac{1}{r}\frac{d\Omega}{dn}\,ds = k\int \frac{1}{r}F_n\,ds,$$

F_n désignant la composante normale de la force non conservative en un point de la surface S du conducteur.

Si l'on remarque que la fonction $V = -k\int \frac{1}{r} F_n \, ds$ est un potentiel, on peut écrire

$$\Omega - V = k\int \frac{1}{r} \frac{d(\Omega - V)}{dn} ds - k\int \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} ds.$$

La méthode de C. Neumann est immédiatement applicable pour trouver $\Omega - F$.

Dans le cas d'un cylindre parcouru par un courant longitudinal, l'équation de l'aimantation transversale induite se simplifie et devient

$$\Omega = -2k\int \frac{d\Omega}{dn} \log r \, ds - 2k\int F_n \log r \, ds,$$

ds étant un élément d'arc de la section droite.

Les lignes d'aimantation ont pour équation

$$H = \psi + \text{const.},$$

H désignant le potentiel vecteur et ψ la fonction conjuguée de Ω dans le plan xOy de la section droite.

Dans le cas où le cylindre est elliptique, on satisfait à l'équation du magnétisme transversal induit en posant

$$\Omega = \nu xy,$$

ν étant une constante.

De là résulte que le cylindre est partagé en quatre quadrants, où la densité superficielle du magnétisme libre est alternativement positive ou négative.

Cette dernière conséquence, vérifiée par l'expérience sur l'aimantation transversale résiduelle de cylindres elliptiques en acier, fournit le premier exemple d'une aimantation *apparente* produite par un champ non conservatif.

Les lignes d'aimantation sont des ellipses semblables moins aplaties que le cylindre.

L'auteur est également parvenu à résoudre explicitement le problème de l'aimantation transversale induite dans un tube cylindrique à sections elliptiques homofocales.

Rouché. — Sur la formule de Stirling. (513).

Si l'on pose

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}},$$

on a la relation

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12n(n+p)}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

De cette relation, M. Rouché déduit aisément la formule de Stirling pour l'évaluation du produit 1.2.3...n lorsque n est un grand nombre

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Le produit en question est donc compris entre les deux limites

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad \text{et} \quad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}}.$$

Bioche. — Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe donnée. (515-516).

L'auteur étudie les surfaces réglées qui, tout le long de la courbe considérée, ont une courbure totale dépendant seulement du point correspondant de la courbe.

Soient ω et π les courbures de la courbe; G^2 la courbure totale de la surface réglée; θ l'angle d'une droite avec la courbe; φ l'angle que le plan tangent à la surface fait avec le plan osculateur à la courbe.

Ces quantités, considérées comme fonctions de l'axe s de la courbe, sont liées par la relation

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pi + \omega \cot\theta \sin\varphi - G,$$

de sorte que, si ω, π, θ, G sont des fonctions données, φ est déterminé par une équation de Riccati en $\tang\frac{\varphi}{2}$, qui s'intègre immédiatement si $\theta = 90°$ ou si $G = \pi$.

A propos des surfaces réglées, M. Bioche indique ce théorème :

Si l'on considère les surfaces réglées engendrées par des droites qui font des angles constants avec la tangente, la normale et la binormale d'une courbe, les points centraux des génératrices qui passent par un même point de la courbe sont sur un cylindre de révolution.

Lévy (Maurice). — Sur l'application des lois électrodynamiques au mouvement des planètes. (545-551).

La loi d'attraction électrodynamique due à Gauss, et appliquée récemment par M. Tisserand au mouvement du périhélie de Mercure, est, comme on sait, en contradiction avec le principe de l'énergie.

Au contraire, Riemann a donné une loi qui, comme celle de Weber, est d'accord avec ce principe aussi bien qu'avec les faits constatés en électricité. Les potentiels de Weber et de Riemann ont respectivement pour expressions

$$P_1 = \frac{fm\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{h^2}\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

et

$$P_2 = \frac{fm\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{h^2}V^2\right),$$

r étant à l'instant t la distance des deux masses attirantes, V leur vitesse relative, f le coefficient d'attraction et h une vitesse que l'on suppose voisine de celle de la lumière.

Le potentiel

$$P = P_1 + \alpha(P_2 - P_1)$$

satisfera au principe de l'énergie et reproduira fidèlement tous les phénomènes

électriques observés sur les courants fermés, quelle que soit la valeur numérique de la constante α.

M. M. Lévy se propose de déterminer α de façon que l'attraction définie par ce même potentiel explique aussi le mouvement héliocentrique du périhélie de Mercure. Alors m désignera la masse de la planète et μ cette masse augmentée de celle du Soleil.

On trouve pour valeur de ce mouvement

$$\delta\pi = \frac{f\mu}{h^2 a}(1 - \alpha)nt,$$

a étant la moyenne distance et n le moyen mouvement de la planète, et l'on devra prendre $\alpha = \frac{5}{3}$ pour que la valeur $\delta\pi$ coïncide avec la valeur 38″, fournie par l'ensemble des observations.

Revenant au point de vue purement électrique, M. M. Lévy donne une formule du potentiel plus générale que la formule $P_1 + \alpha(P_2 - P_1)$, savoir

$$P = fm\mu\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{h^2 r} + G'r\right)\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{1}{2}GV^2\right],$$

qui contient une fonction arbitraire G de r.

Si l'on n'impose pas aux actions entre les deux points l'obligation de dériver d'un potentiel, mais seulement de reproduire les actions électrodynamiques et d'induction connues entre courants fermés, ces actions comportent deux fonctions arbitraires de r, G et K. L'action exercée par μ sur m peut se décomposer en trois autres : l'une F_r dirigée suivant r compté de μ vers m ; la deuxième F_v, suivant la vitesse V dans le mouvement de m autour de μ ; la troisième F_j, suivant l'accélération J dans ce même mouvement, et l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{F_r}{fm\mu} &= \left(\frac{K''r}{2} - \frac{K'}{2} + G' + \frac{2}{h^2 r^2}\right)\frac{dr^2}{dt^2} \\
&\quad + \left(G'r + \frac{2}{h^2 r}\right)\frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{K'}{2} - G' - \frac{1}{h^2 r^2}\right)V^2, \\
\frac{F_v}{fm\mu} &= \left(K' - \frac{2}{h^2 r^2}\right)V\frac{dr}{dt}, \\
\frac{F_j}{fm\mu} &= GJ.
\end{aligned}$$

Pour que la force dérive d'un potentiel, il suffit d'établir entre les deux fonctions arbitraires la relation

$$K = G - \frac{2}{h^2 r}.$$

Mittag-Leffler. — Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm. Extrait d'une lettre à M. Poincaré. (627-629).

Les fonctions connues jusqu'ici, qui n'existent que dans une certaine région du plan, cessent d'exister parce que ces fonctions elles-mêmes ou leurs

dérivées deviennent discontinues sur le contour. M. Fredholm, élève de M. Mittag-Leffler, a trouvé une fonction qui reste continue, ainsi que toutes ses dérivées, sur la frontière qui limite le domaine d'existence de cette fonction.

Si l'on écrit la fonction Θ sous la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\nu^2 t + \nu v} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-1} e^{\nu^2 t + \nu v} + \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t + \nu v},$$

et que l'on pose

$$\varphi(t, v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^2 t + \nu v},$$

la fonction $\varphi(t, v)$, regardée comme fonction de t, n'existe plus quand v est une constante dont la partie réelle n'est négative que pour le domaine $t' < 0$ (en posant $t = t' + it''$).

En posant

$$e^t = x, \qquad e^v = a, \qquad |a| < 1,$$

on obtient une fonction de x

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^\nu x^{\nu^2},$$

qui n'existe que pour $|x| < 1$, et qui est continue, ainsi que toutes ses dérivées, pour $|x| = 1$.

Elliot. — Sur les invariants d'une classe d'équations du premier ordre. (629-632).

L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_2}{P_1},$$

où P_1 et P_2 désignent des polynômes en y, dont le degré est marqué par les indices, et dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x, conserve la même forme quand on effectue le changement de variable et de fonction

$$\frac{dx_1}{dx} = c, \qquad y = ay_1 + b,$$

où a, b, c sont trois fonctions quelconques de x.

On peut profiter des fonctions a et b pour ramener l'équation à la forme réduite

$$\text{(1)} \qquad \frac{dY}{dx} + I = \frac{H}{Y};$$

I et H sont des invariants, indépendants des fonctions a et b et se reproduisant multipliés par $\frac{1}{c}$ quand on effectue le changement de variable.

Par une détermination convenable de la fonction c, on ramène cette dernière

équation à la forme

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y},$$

où J est un invariant absolu.

Un cas simple d'intégrabilité est celui où J est de la forme kX, k étant une constante. On réalise ce cas en supposant que le rapport $\left(\frac{H}{I}\right)$: I est égal à k.

Le cas de

$$J = -\frac{2}{9}\,\frac{9k - 2}{\sqrt{X}} = \frac{2}{9}\,[\,3(k \ldots) \ldots - X\,]$$ [illegible]

appartient à des équations de Jacobi.

Les équations dont l'intégrale générale est de la forme

$$(y - A)^{\alpha}(y - B)^{\beta}(y - C)^{\gamma}(y - D)^{\delta} = \text{const.}$$

rentrent dans le type (1) si l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0,$$

A, B, C, D étant des fonctions de x et α, β, γ, δ des constantes.

Si l'on fait le changement de fonction

$$y = D + (A - D)\,y_1,$$

toutes les équations différentielles en y_1 se déduisent de l'une d'elles par un changement de la variable indépendante. Il est aisé de former celle qui admet quatre solutions particulières linéaires.

Jonquières (de). — Note sur un Mémoire présenté qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes, _De solidorum elementis_, la traduction et le commentaire de cet Ouvrage. (677-680).

Fontviolant (de). — Sur la Statique graphique des arcs élastiques. (697-699).

Dans son Traité de Statique graphique, M. M. Levy a donné une théorie des arcs élastiques fondée sur une hypothèse qui consiste à négliger les déformations de la tension longitudinale et de l'effort tranchant devant celles, généralement beaucoup plus importantes, qui sont dues au moment fléchissant.

Cependant, lorsqu'il s'agit d'arcs surbaissés, il est nécessaire de tenir compte des déformations dues à la tension longitudinale.

Aussi M. de Fontviolant s'est-il proposé de rechercher si l'on ne pourrait, par des modifications simples, introduire dans les théorèmes de M. M. Levy les quantités qu'il a négligées, tout en conservant à ces théorèmes leur forme d'ensemble qui se prête si bien aux développements graphiques.

Il établit deux règles qui constituent la solution générale et complète de cette question : la première relative à l'introduction de la tension longitudinale seule; la seconde à l'introduction simultanée de la tension longitudinale et de l'effort tranchant.

Pellet. — Rectification approximative d'un arc de courbe. (778).

« Prenons sur la tangente en un point A à une courbe des longueurs égales de part et d'autre du point A, AP, AP'; puis, sur la normale en A et du côté du centre de courbure, une longueur AC égale à trois fois le rayon de courbure; joignons enfin le point C aux points P et P', et soient M et M' les points de rencontre des lignes CP, CP' avec la courbe : la longueur de l'arc de courbe MM' est sensiblement égale à la ligne PP'. La différence des deux longueurs est inférieure à

$$d = \frac{R}{60}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

R étant le plus grand des rayons de courbure correspondant aux différents points de l'axe MM', et θ la courbure totale de cet arc.

» On suppose que la courbure varie d'une manière continue, et toujours dans le même sens lorsqu'on parcourt l'arc MM'. Pour θ inférieur à $\frac{\pi}{3}$, on a $d < \frac{R}{1500}$, et même pour le cercle $d < \frac{R}{2000}$, de sorte que, si R est inférieur à 1^m, la différence entre PP' et l'arc MM' est négligeable au point de vue du dessin. »

Fouret. — Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, des courbes planes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner. (778-781).

L'auteur donne diverses expressions du rayon de courbure ρ en un point m d'une conique dont on connaît en outre la tangente mt en m et trois autres points a, b, c :

$$\frac{1}{\rho} = 2\,\frac{\sin amt \sin bmt \sin cmt}{\sin amc \sin bmc}\left(\frac{1}{mc} - \frac{1}{md}\right),$$

$$\frac{1}{\rho} = 2\,\frac{\sin amt \sin bmt \sin cmt}{\sin bmc \sin cma \sin amb}\left(\frac{\sin bmc}{ma} + \frac{\sin cma}{mb} + \frac{\sin amb}{mc}\right),$$

$$\frac{1}{\rho} = 4\,\frac{\sin amt \sin bmt \sin cmt}{\sin bmc \sin cma \sin amb}\,\frac{\text{tr.}\,abc}{ma\,mb\,mc},$$

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\sin amt \sin bmt \sin cmt}{\sin bmc \sin cma \sin amb}\,\frac{bc\,ca\,ab}{ma\,mb\,mc}.$$

Dans ces formules, a désigne le point de rencontre des droites ab et mc, et R le rayon du cercle circonscrit au triangle abc.

De la première de ces formules, on déduit le centre de courbure μ relatif au point m de la conique :

On décrit une circonférence tangente en m à mt et passant par l'un des points a, b, c, par le point a, par exemple. Soient o son centre, e et f les points où elle rencontre respectivement les droites mb et mc, g et h les points d'intersection de ef avec bc et avec ma. Par a on mène une parallèle à ef; k étant le point où cette parallèle coupe bc, on mène par g une parallèle à ka jusqu'à la rencontre de ma en l. Le point μ où la parallèle à ho issue du point l coupe la normale en m à la conique est le centre de courbure cherché.

Les formules qui précèdent peuvent servir à déterminer le rayon de cour-

bure ρ' en un point d'une courbe triangulaire symétrique

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + \left(\frac{y}{\beta}\right)^n + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^n = 0$$

(rapportée à un triangle *abc* convenablement choisi). Il suffit de remplacer dans ces formules $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{2}{1-n}\frac{1}{\rho}$.

Poincaré. — Sur la loi électrodynamique de Weber. (825-829).

M. Poincaré signale de graves erreurs commises par Maxwell dans son étude sur la loi électrodynamique de Weber et dans sa tentative pour en tirer les lois connues de l'induction.

Si l'on pose

$$M = -\int\int \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{1}{r}\,ds\,ds'$$

et

$$J = \int\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s'\,\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}\right)ds\,ds',$$

on trouve pour valeur de la force électromotrice totale d'induction déduite de la loi de Weber

$$-\frac{d}{dt}Mi + Ji,$$

et non, comme le croit Maxwell, $-\frac{d}{dt}Mi$. Le terme J n'est nul que dans le cas des courants fermés.

Il faut conclure de là que le principe de l'énergie est insuffisant pour faire prévoir les lois de l'induction. C'est d'ailleurs ce que savent déjà ceux qui ont lu les judicieuses critiques de M. Bertrand (*Théorie mathématique de l'Électricité*).

Si l'on *admet a priori*, avec M. Poincaré, que la force électromotrice, due à l'induction du premier circuit sur le second, ait une expression de la forme

$$-B\frac{di}{dt} - Ci,$$

et la force électromotrice, due à l'induction du second circuit sur le premier, une expression de la forme

$$-B'\frac{di'}{dt} - C'i,$$

voici ce que donne le principe de la conservation de l'énergie

$$B = B', \qquad C + C' = \frac{dM}{dt} + \frac{dB}{dt}.$$

Ce principe ne peut donc à lui seul déterminer les quatre coefficients de l'induction.

D'autre part, la loi de Weber donne

$$B = B' = M, \qquad C = \frac{dM}{dt} - J, \qquad C' = \frac{dM}{dt} + J.$$

valeurs conformes aux équations déduites du principe de l'énergie, mais qui ne coïncident avec celles que trouve Maxwell,

$$B = B' = M, \qquad C = C' = \frac{dM}{dt},$$

que si l'on fait encore cette *hypothèse* que le déplacement d'un courant constant i produit les mêmes effets d'induction que la disparition d'un courant d'intensité i au point de départ et la naissance d'un courant d'intensité i au point d'arrivée.

Painlevé. — Sur une transformation des équations différentielles du premier ordre. (840-843).

Soit

$$(1) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

une équation différentielle du premier ordre où P et Q représentent deux polynômes en y de degré i et j. Si n désigne le plus grand des deux nombres i et $j + 2$, la substitution

$$(2) \qquad y = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d}, \qquad x = \varphi(x_1),$$

où a, b, c, d sont des fonctions quelconques de x, transforme l'équation (1) en une équation analogue où le numérateur est de degré n, le dénominateur de degré $(n - 2)$ en y. On peut toujours supposer l'équation (1) écrite sous cette forme, en introduisant au besoin des coefficients nuls.

Pour qu'on puisse passer de l'équation (2) à une équation analogue (1') par une substitution (2), il faut et il suffit que les deux $2n - 5$ invariants distincts de chaque équation soient égaux respectivement.

On peut ramener l'équation générale (1) à une forme réduite où ne figurent que $2n - 5$ coefficients des termes en y, coefficients qui sont précisément les $2n - 5$ invariants distincts de l'équation proposée.

Si l'on cherche les équations (1) dont l'intégrale générale ne prend que deux valeurs autour des points critiques mobiles, on trouve que ces équations sont de la forme

$$(3) \qquad y' = \frac{ay^3 + by^2 + cy + d}{ey + f},$$

ou

$$(4) \qquad y' = \frac{ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e}{by^2 + gy + h}.$$

On les ramène d'abord aux formes réduites

$$(5) \qquad x' = y^3 + J,$$

ou

$$(4') \qquad y' = \frac{y^4 + Ay + B}{y + c}, \qquad \text{ou} \qquad y' = y^3 + Ay + B$$

suivant que les racines du dénominateur sont distinctes ou confondues; et

l'on détermine aisément les conditions invariantes auxquelles ces équations doivent satisfaire. On forme même explicitement toutes ces équations comme aussi toutes les équations (3) dont l'intégrale ne prend que trois valeurs autour de points critiques mobiles.

On peut chercher à reconnaître si une équation (1) se ramène par une substitution (2) à une équation (1′) numériquement donnée. La substitution (2), quand elle existe, s'obtient algébriquement, à moins que l'équation considérée n'admette un groupe continu de transformations (2). Tel est le cas de l'équation de Riccati. Toutes les autres équations (2) qui restent invariantes pour un tel groupe se ramènent immédiatement à la forme

$$y' = f(y, \xi),$$

où le second membre est homogène et de degré zéro : l'équation s'intègre par quadratures.

Tous ces résultats s'étendent aux équations algébriques de degré quelconque en y' et y.

Fouret. — Construction du rayon de courbure de certaines classes de courbes, notamment des courbes de Lamé et des paraboles et hyperboles de divers ordres. (843-846).

Picard. — Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. (877-880).

M. Picard revient sur les équations différentielles

$$(1) \qquad f(y, y', y'', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

où ne figure pas la variable indépendante x et où f représente un polynôme, dans le cas où l'intégrale générale est une fonction uniforme de x avec le seul point singulier essentiel à l'infini.

Soit y une intégrale quelconque; si l'on désigne par $y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(m)}$ les valeurs que prennent cette fonction et ses dérivées quand on remplace x par $x+h$, h étant arbitraire, on aura

$$\begin{aligned}
y_1 &= F(h, y, y', \ldots, y^{(m)}),\\
y'_1 &= F_1(h, y, y', \ldots, y^{(m)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_1^{(m)} &= F_m(h, y, y', \ldots, y^{(m)}),
\end{aligned}$$

les F étant des fonctions uniformes du point analytique $(y, y', \ldots, y^{(m)})$, d'ailleurs arbitraire sur la surface f, et la transformation ainsi obtenue est évidemment réversible.

Dans le cas où cette transformation biuniforme est en même temps birationnelle, on peut se rendre compte de la nature des intégrales de l'équation (1).

Le cas de $m = 2$ a été traité complètement dans le grand Mémoire de M. Picard sur les fonctions algébriques de deux variables. Abordant maintenant le cas général où m est quelconque, l'auteur fait voir que l'intégrale de l'équation (1) pourra s'exprimer à l'aide des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.

Voici une conséquence intéressante de ce théorème :

Étant donnée une équation

$$f(y, y', y'', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

dont l'intégrale générale Y peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale particulière quelconque y par la formule

$$Y = R(y, y', \ldots, y^{(m)}, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

R dépendant rationnellement des y et les m lettres a représentant des constantes arbitraires, cette intégrale générale sera nécessairement uniforme, et elle pourra s'exprimer à l'aide des fonctions abéliennes ou de leurs dégénérescences.

Beltrami. — Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. (932-934).

L'auteur s'attache à montrer l'avantage qu'il y a, dans nombre de questions, à remplacer l'équation du second ordre

$$(1-x^2)\frac{d^2 R_n}{dx^2} - 2x\frac{dR_n}{dx} + n(n+1)R_n = 0,$$

à laquelle satisfont les deux fonctions sphériques d'ordre n, de première et de seconde espèce, par les deux équations du premier ordre

$$\frac{dR_{n-1}}{dx} = x\frac{dR_n}{dx} - nR_n,$$

$$\frac{dR_n}{dx} = x\frac{dR_{n-1}}{dx} + nR_{n-1},$$

dont elle est une conséquence nécessaire.

Painlevé. — Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre. (945-948).

Une équation du premier ordre et du premier degré

$$(1) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}$$

peut avoir son intégrale générale algébrique. Chaque intégrale définit alors une courbe C de degré m; et par chaque point du plan passe une courbe C et une seule à moins que ce point ne soit commun aux deux courbes $P = 0$, $Q = 0$.

On peut toujours supposer que ces points singuliers sont à distance finie; parmi eux il y en a au moins un par où passent toutes les courbes C.

Si l'on se borne à considérer les points (x_1, y_1) de cette nature, on parvient aux résultats suivants :

Les intégrales $y(x)$ qui prennent la valeur y_1 pour $x = x_1$ se divisent en un

certain nombre ν de classes; une intégrale de chaque classe est de la forme

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + a_1 x^{\frac{p'}{q}} + \ldots,$$

$a_0, a_1, \ldots$ dépendant d'une constante, et p et q étant des entiers. Une branche au moins de chaque espèce fait partie d'une quelconque des courbes C, et l'on a ainsi une limite inférieure de l'ordre de multiplicité du point x_i, y_i des courbes C, mais λ branches de la même espèce peuvent appartenir à la même courbe C. Si donc μ désigne l'ordre de multiplicité d'une seule branche, la somme $\Sigma\lambda\mu$, étendue aux ν classes, donne l'ordre de multiplicité du point (x_i, y_i) des courbes C. On peut, en outre, calculer en fonction des nombres λ (qu'on ne peut en général calculer *a priori*) l'ordre de multiplicité α de l'intersection de deux courbes C en (x_i, y_i) : on doit avoir

$$\Sigma \alpha_i = m^2.$$

Cette relation permet de résoudre la question suivante :

Reconnaître si l'intégrale d'une équation (1) est une courbe algébrique dont les points multiples n'admettent pas plus de k branches distinctes (k est donné).

D'autre part, M. Painlevé, en mettant à profit les trois formules de Plücker, réussit à calculer la classe des courbes C en fonction des nombres λ. Il parvient même, dans certains cas, à déterminer une limite des nombres m et λ et par suite à trouver les intégrales algébriques de (1). Mais alors le genre des intégrales ne peut dépasser l'unité.

Enfin l'auteur indique une méthode qui permet de trouver toutes les intégrales algébriques de genre donné qui vérifient l'équation donnée.

Guichard. — Sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées. (995-997).

Si, sur une surface Σ, on considère un réseau de géodésiques v = const. et leurs trajectoires conjuguées u = const., les cosinus directeurs de la normale α_1, β_1, γ_1 sont solutions d'une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{du\,dv} - \rho\frac{d\theta}{dv} = Q\theta.$$

Pour que les courbes u = const. soient aussi des géodésiques, il faut et il suffit que Q soit nulle. Alors l'équation (1), quand on choisit convenablement les variables, peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{du\,dv} = \theta\cos\varphi,$$

φ étant solution de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{du\,dv} = \sin\varphi,$$

qui intervient dans la recherche des surfaces à courbure constante.

M. Guichard rattache aux considérations précédentes le théorème que voici :

« Si les développables d'une congruence touchent les deux surfaces focales suivant leurs lignes de courbure, l'une des nappes de la surface des centres de courbure de chaque surface focale admet un réseau conjugué formé de géodésiques; les courbes de ce réseau correspondent aux lignes de courbure de la surface focale, et réciproquement. »

Stieltjes. — Sur la valeur asymptotique des polynômes de Legendre. (1026).

Soient

$$0 < \theta < \pi, \qquad \alpha = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$C = \frac{4}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

On a

$$X_n(\cos\theta) = C\left[\frac{\cos\left(n\theta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1.1}{2(2n+3)}\,\frac{\cos\left(n\theta + \frac{3\alpha}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\sin\theta}\right)^3}\right.$$
$$+ \frac{1.3.1.3}{2.4(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos\left(n\theta + \frac{5\alpha}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\sin\theta}\right)^5}$$
$$\left. + \frac{1.3.5.1.3.5}{2.4.6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\,\frac{\cos\left(n\theta + \frac{7\alpha}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\sin\theta}\right)^7} + \ldots\right].$$

La série est convergente tant que θ est compris entre $\frac{\pi}{6}$ et $5\frac{\pi}{6}$.

Mais, que la série converge ou non, si l'on en prend les k premiers termes, l'erreur commise est inférieure en valeur absolue au double du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme dans lequel on aurait remplacé par l'unité le cosinus qui figure au numérateur.

Appell. — Sur la théorie de la chaleur. (1061-1063).

Un grand nombre de problèmes relatifs à la propagation de la chaleur se ramènent à l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où u désigne la température fonction du temps t et de la coordonnée x, et k une constante positive.

L'état initial donné peut-il être considéré comme provenant d'un état calorifique *antérieur?* Tel est le problème que se pose M. Appell.

Dans le cas simple de la propagation de la chaleur dans une armille, la température à l'instant initial t_0 étant

$$f(x) = b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \ldots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \ldots,$$

la température, à tout instant $t > t_0$, sera donnée par la série convergente

$$u = b_0 + e^{-k(t-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \ldots + e^{-n^2k(t-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \ldots$$

Mais la distribution initiale $f(x)$ ne peut provenir d'un état antérieur que si $f(x)$ est une fonction transcendante *entière* de x; si l'état antérieur existe, il est unique et se trouve déterminé par la série même de Fourier.

Écrivant l'équation (1) sous la forme plus simple

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

M. Appell trouve que toute solution de cette équation, entière en x et en y, est composée linéairement avec les polynômes $V_\nu(x, y)$ définis par l'identité

$$e^{ax + a^2 y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2\ldots\nu} V_\nu(x, y),$$

polynômes qui s'expriment d'une manière simple à l'aide de ceux que M. Hermite a obtenus par la différentiation de l'exponentielle e^{-x^2}.

Ces polynômes, ainsi que les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} V_\nu\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right),$$

jouent, dans la théorie de l'équation (1), le même rôle que les fonctions harmoniques de Thomson et Tait dans la théorie du potentiel.

Il faut encore signaler, dans le même ordre d'idée, un théorème général analogue au théorème de Green et qu'exprime la formule

$$\int\!\!\int u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy - \int\!\!\int v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \int uv\,dx.$$

Cesaro. — Sur la courbe représentative des phénomènes de diffraction. (1119-1122).

La courbe employée par M. Cornu dans sa méthode pour la discussion des problèmes de diffraction a été l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels il faut citer ceux de M. Poincaré dans son *Cours sur la théorie mathématique de la lumière.*

M. Cesaro montre que certaines transformations effectuées par M. Poincaré peuvent être obtenues par d'autres considérations, qui fournissent un procédé général pour traiter toutes les questions du même genre.

Resal. — Sur le mouvement d'un prisme reposant sur deux appuis soumis à l'action d'une force variable suivant une loi particulière appliquée en un point déterminé de la fibre moyenne. (1157-1160).

Boussinesq. — Théorie du régime permanent graduellement varié qui se produit près de l'entrée évasée d'un tube fin, où

les filets d'un liquide qui s'y écoule n'ont pas encore acquis leurs inégalités normales de vitesse. (1160-1166).

De Saint-Germain. — Sur un cas particulier du mouvement d'un point dans un milieu résistant. (1184-1187).

Les formules qui permettent de déterminer les perturbations apportées dans le mouvement d'une planète par la résistance d'un milieu très rare deviennent illusoires quand on suppose nulle l'excentricité de l'orbite non troublée. L'étude directe de ce cas particulier conduit à un résultat simple et général.

S'il n'y avait pas de milieu résistant, la trajectoire étant un cercle, il faudrait que la vitesse initiale $a\omega$ fût perpendiculaire au rayon vecteur et que l'on eût

$$a^3\omega^2 = \mu,$$

μ désignant le coefficient d'attraction.

Or, si l'on néglige le carré de la densité du milieu résistant, au bout d'un temps égal à $t = \frac{2\pi}{\omega}$ la vitesse $a_1\omega_1$ redevient perpendiculaire au rayon vecteur et l'on a toujours

$$a_1^3\omega_1^2 = a^3\omega^2 = \mu,$$

c'est-à-dire que le mobile se retrouve dans les mêmes conditions qu'à l'origine du temps.

Lévy (Maurice). — Sur le nivellement général de la France. (1233-1238).

Boussinesq. — Théorie du mouvement permanent qui se produit près de l'entrée évasée d'un tube fin : application à la deuxième série d'expériences de Poiseuille. (1238-1242).

Boussinesq. — Calcul des températures successives d'un milieu homogène et athermane indéfini que sillonne une source de chaleur. (1242-1244).

Une source calorifique mobile, concentrée en un point, ayant à diverses époques τ des coordonnées (ξ, η, ζ) fonctions connues de τ, déverse par unité de temps dans le milieu homogène et athermane une quantité de chaleur variable et connue $F(\tau)$.

Alors la température en tout point (x, y, z) du milieu sera donnée à tout instant t par la formule

$$u = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\int_{-\infty}^{t} \frac{F(\tau)\,d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^3}\, e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}},$$

où

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

1er semestre 1888.

Nœther (M.). — Nombre de modules d'une classe de surfaces algébriques. (123-127).

L'ensemble de toutes les courbes algébriques que l'on peut obtenir en transformant, par des substitutions rationnelles et univoquement réversibles, une courbe algébrique déterminée, forme une *classe* de courbes algébriques. Riemann a montré que, si p est le genre d'une classe de courbes, cette classe dépend de $3p-3$ paramètres, les *modules* de la classe.

MM. Nœther et Brill ont donné dans le tome VII des *Mathematische Annalen* diverses définitions et méthodes de détermination des modules d'une classe. Rappelons ici celle qui a lieu à l'aide des courbes dites *normales* dans lesquelles on peut transformer une courbe donnée quelconque de la classe, par un réseau linéaire de courbes *adjointes* à la courbe donnée.

Dans le Mémoire actuel, M. Nœther s'est proposé de résoudre la même question pour des *surfaces algébriques* en suivant une marche analogue. Il est également parvenu à un résultat simple en introduisant des surfaces dites *normales* et en transformant sur ces surfaces les surfaces données.

Soient f une surface de la classe; n l'ordre de cette surface; p le nombre de surfaces φ passant par la courbe double de f (et que nous nommerons surfaces *adjointes* de f) d'ordre $n-4$ et linéairement indépendantes; enfin p_1 le nombre des points d'intersection mobiles de f avec deux des surfaces φ considérées.

Alors *la classe (générale) de surfaces dépend de*

$$10(p+1) - 2p_2$$

paramètres.

Tel est l'énoncé du théorème que M. Nœther démontre en s'appuyant sur des relations qu'il a établies dans le tome VIII des *Mathematische Annalen*, dans les *Annali di Matem.*, 2e série, t. V, et, d'autre part, dans son Mémoire inséré dans les *Abhandlungen* de l'Académie de Berlin en 1882.

Il termine en donnant divers exemples se rapportant au cas où le nombre p est égal à 4 ou à 5.

Kronecker (L.). — Sur les propositions d'Arithmétique développées par Lejeune-Dirichlet lors de sa nomination comme professeur à l'Université de Breslau (Habilitationsschrift). (417-423).

Soient z une indéterminée, n un entier positif quelconque, b un entier positif ou négatif autre qu'un carré parfait; en développant

$$(z+\sqrt{b})^n$$

on peut mettre cette expression sous la forme

$$U + V\sqrt{b}.$$

Lejeune-Dirichlet détermine les diviseurs premiers des formes U et V. Afin de ne pas présenter un Mémoire trop étendu, il se borne pour V au cas où n est un nombre premier, et pour U au cas où n est une puissance de 2. La méthode qu'il donne est toutefois applicable à tout entier positif n.

M. Kronecker a été amené à résoudre le même problème en se plaçant au point de vue développé dans sa *Festschrift* et en introduisant des *systèmes de modules*. L'extrême simplicité de la démonstration, pour tout entier positif n, des propositions de Lejeune-Dirichlet, est une nouvelle preuve de l'importance de cette généralisation de la notion de divisibilité.

La forme

$$z^n - 1$$

a autant de facteurs entiers à coefficients entiers que n a de diviseurs. Un de ces facteurs est caractérisé par le fait de n'être pas facteur d'une forme $z^m - 1$ où m est un entier positif plus petit que n; c'est le *facteur primitif* de $z^n - 1$ et nous le désignerons par $F_n(z)$.

Nous entendrons par ε_m l'unité lorsque $m = 1$, $(-1)^\nu$ lorsque m n'admet que des diviseurs premiers différents et que ν est le nombre de ces diviseurs premiers, zéro lorsque m contient plus d'une fois un ou plusieurs diviseurs premiers.

On a alors

$$F_n(z) = \prod_{(d)} \left(z^{\frac{n}{d}} - 1 \right)^{\varepsilon_d}, \qquad z^n - 1 = \prod_{(d)} F_d(z),$$

chaque produit étant étendu à tous les diviseurs d de n.

En posant

$$x = \frac{x + y}{x - y},$$

x et y étant deux variables indéterminées, et

$$\frac{(x + y)^{\frac{n}{d}} - (x - y)^{\frac{n}{d}}}{y} = f_d(x, y^2),$$

puis, remarquant que la somme

$$\sum_{(d)} \varepsilon_d$$

étendue à tous les diviseurs d de n est nulle, tandis que la somme

$$\sum_{(d)} \frac{n}{d} \varepsilon_d$$

est égale au nombre $\varphi(n)$ d'entiers inférieurs à n et premiers relatifs à n, on a donc

$$F_n\left(\frac{x + y}{x - y}\right) = \frac{\prod_{(d)} f_d(x, y^2)^{\varepsilon_d}}{(x - y)^{\varphi(n)}}.$$

L'expression

$$(x-y)^{\varphi(n)} \mathrm{F}_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

est manifestement une fonction entière à coefficients entiers de x et de y; d'après la relation précédente, cette fonction entière à coefficients entiers ne contient que les puissances *paires* de y; nous la désignerons par

$$\mathrm{G}_n(x, y^2).$$

Nous allons, dans ce qui suit, envisager la fonction entière, à coefficients entiers, de x et de s

$$\mathrm{G}_n(x, s);$$

elle est, comme $\mathrm{F}_n(x)$, de degré $\varphi(n)$. Nous chercherons les diviseurs premiers q, non contenus dans n, de cette fonction, pour des valeurs entières quelconques positives ou négatives données à s.

M. Kronecker démontre d'abord que, si $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ est un système complet de nombres incongrus entre eux modulo n, et premiers relatifs à n, on a la congruence

$$\mathrm{F}_n(x) \equiv (x-z^{r_1})(x-z^{r_2})\ldots(x-z^{r_{\varphi(n)}}) \qquad [\text{modd. } \mathrm{F}_n(z)].$$

On en déduit immédiatement cette autre congruence, suivant le système de modules $[y^2-s,\ \mathrm{F}_n(z)]$,

$$\mathrm{G}_n(x, s) \equiv \prod_{k=1}^{k=\varphi(n)} [(x+y)-(x-y)z^{r_k}] \qquad [\text{modd. } y^2-s,\ \mathrm{F}_n(z)],$$

et cette congruence nous montre que les diviseurs q que nous cherchons sont déterminés par la condition de vérifier la congruence

$$\prod_{k=1}^{k=\varphi(n)} [(x+y)-(x-y)z^{r_k}] \equiv 0 \qquad [\text{modd. } q,\ y^2-s,\ \mathrm{F}_n(z)].$$

Or, pour que cette congruence soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\prod_{(h)}\prod_{(k)} [(h+y)-(h-y)z^{r_k}] \equiv 0 \qquad [\text{modd. } q,\ y^2-s,\ \mathrm{F}_n(z)],$$

$$\left(\begin{array}{l} h=0,1,\ldots,q-1 \\ k=1,2,\ldots,\varphi(n) \end{array}\right)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\prod_{(k)} [y^q(z^{r_k}+1)^q - y(z^{r_k}+1)(z^{r_k}-1)^{q-1}] \equiv 0 \qquad [\text{modd. } q,\ y^2-s,\ \mathrm{F}_n(z)].$$

Mais

$$(z^{r_k}-1)^q \equiv z^{r_k q}-1 \qquad (\text{modd. } q)$$

et, en désignant par σ le symbole de Legendre $\left(\frac{s}{q}\right)$,

$$y^{q-1} \equiv s^{\frac{q-1}{2}} \equiv \sigma \qquad (\text{modd. } q,\ y^2-s)$$

On peut donc aussi écrire la congruence précédente

$$\prod_{(k)} [(z^{r_k(q+1)} - 1)(1 - \varpi) + z^{r_k}(z^{r_k(q-1)} - 1)(1 + \varpi)] \equiv 0 \qquad [\text{modd.}\, q,\ F_n(z)].$$

Selon que $\varpi \equiv +1$ ou que $\varpi \equiv -1$, il faut donc que l'on ait

$$\prod_{(k)} [z^{r_k(q-1)} - 1] \equiv 0 \qquad [\text{modd.}\, q,\ F_n(z)],$$

ou

$$\prod_{(k)} [z^{r_k(q+1)} - 1] \equiv 0 \qquad [\text{modd.}\, q,\ F_n(z)].$$

Il faut donc que l'on ait

$$\prod_{(k)} [z^{r_k(q-\varpi)} - 1] \equiv 0 \qquad [\text{modd.}\, q,\ F_n(z)].$$

Cette congruence nous montre que le produit étendu à $k = 1, 2, \ldots, \varphi(n)$, des systèmes de diviseurs

$$[q,\ F_n(z),\ z^{r_k(q-\varpi)} - 1],$$

doit contenir le système de diviseurs

$$[q,\ F_n(z)].$$

Or, si δ est le plus grand des diviseurs de n contenus dans $q - \varpi$, chacun des systèmes de diviseurs

$$[q,\ F_n(z),\ z^{r_k(q-\varpi)} - 1],$$

est équivalent à

$$[q,\ F_n(z),\ z^{\delta} - 1];$$

et d'autre part, M. Kronecker montre que si δ est plus petit que n, le système de diviseurs

$$[q,\ F_n(z),\ z^{\delta} - 1]$$

est équivalent à 1. Il faut donc que δ soit égal à n, sans quoi le produit de systèmes équivalant chacun à l'unité contiendrait le système $[q,\ F_n(z)]$ ce qui n'est pas.

Ainsi l'on a

$$q - \varpi \equiv 0 \qquad (\text{modd.}\, n).$$

Réciproquement, si cette congruence a lieu, chaque facteur du produit

$$\prod_{(k)} [z^{r_k(q-\varpi)} - 1]$$

est divisible par $F_n(z)$.

Donc *les diviseurs premiers q, de la forme $G_n(x, s)$, qui ne sont pas contenus dans n sont tous caractérisés par la congruence*

$$q \equiv \varpi \qquad (\text{modd.}\, n),$$

où ϖ désigne le symbole de Legendre $\left(\frac{s}{p}\right)$.

Il en résulte immédiatement que ces diviseurs premiers q sont caractérisés par une suite de formes linéaires

$$kt + \rho', \qquad kt + \rho'', \qquad \dots,$$

où ρ', ρ'', ... désignent des restes du plus petit multiple commun t des deux nombres n et $4s$, ce qui coïncide avec le résultat obtenu par Lejeune-Dirichlet.

On peut encore observer que, dans le cas particulier où n est divisible par s et où s est impair, il peut y avoir des diviseurs premiers q congrus à la fois à 1 modulo n et à 1 modulo 4, mais que l'on ne peut avoir à la fois

$$q \equiv -1 \pmod{n}, \qquad q \equiv -1 \pmod{4}$$

que pour les nombres s dont la valeur absolue est de la forme $4k-1$.

De même on ne peut avoir à la fois

$$q \equiv +1 \pmod{n}, \qquad q \equiv -1 \pmod{4}$$

que pour les nombres $s \equiv 1 \pmod{4}$.

Enfin on ne peut avoir à la fois

$$q \equiv -1 \pmod{n}, \qquad q \equiv 1 \pmod{4}$$

que pour $s < 0$.

Dans le cas où l'on a à la fois

$$s < 0, \qquad s \equiv -1 \pmod{4}, \qquad n \equiv 0 \pmod{s},$$

on déduit du Tableau précédent que les diviseurs premiers q sont caractérisés par ce fait que la congruence

$$q \equiv \left(\frac{s}{q}\right)$$

a lieu modulo n et modulo 4.

Si donc n est impair, on a aussi

$$q \equiv \left(\frac{s}{q}\right) \pmod{4n},$$

résultat contenu dans le Mémoire de Lejeune-Dirichlet dans le cas où n est premier et où, par suite, n est égal à la valeur absolue de s.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des nombres complexes en général, et sur les systèmes de diviseurs. (429-432).

On peut se proposer de trouver la forme la plus générale des nombres complexes

$$a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_n i_n,$$

pour lesquels les règles ordinaires du calcul soient conservées. MM. Weierstrass, Dedekind, et tout récemment M. Petersen ont abordé et résolu ce problème, en faisant toutefois certaines hypothèses qui en restreignent la généralité. M. Kronecker se propose de montrer comment ce problème, envisagé sans restriction aucune, peut être rattaché à la théorie des systèmes de diviseurs de rang égal au nombre de variables.

Rappelons d'abord quelques définitions et propositions fondamentales d'Algèbre.

La congruence suivant un système de modules (M′, M″, M‴, ...),

$$G \equiv 0 \quad (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots),$$

où G, M′, M″, M‴, ... sont des fonctions entières de variables indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indique qu'il existe des fonctions entières P′, P″, P‴, ... des mêmes variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que l'on ait

$$G = M'P' + M''P'' + M'''P''' + \ldots.$$

Nous supposerons d'abord dans ce qui suit que les coefficients des fonctions entières considérées sont tout à fait arbitraires, mais naturellement ne dépendent pas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Le rang [1] le plus élevé que peut avoir le système de diviseurs, ou système de modules, considéré

$$(M', M'', M''', \ldots)$$

est alors égal à n. Si n est effectivement le rang de ce système de diviseurs, on peut déterminer un système

$$(1, f_1, f_2, \ldots, f_\nu)$$

formé par le nombre *le plus petit possible* $(\nu + 1)$ de fonctions entières f_k de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tel que *toute* fonction entiere f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puisse être mise sous la forme

$$f \equiv c_0 + c_1 f_1 + \ldots + c_\nu f_\nu \quad (\text{modd. } M', M'', \ldots),$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_\nu$ sont des quantités déterminées et indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On nomme le système

$$(1, f_1, \ldots, f_\nu)$$

système fondamental du système de diviseurs

$$(M', M'', \ldots).$$

Le nombre $(\nu + 1)$ est l'*ordre* de ce système de diviseurs.

On a en particulier, en choisissant pour fonction f une fonction entière F des éléments $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ du système fondamental

$$(1) \qquad F \equiv C_0 + C_1 f_1 + \ldots + C_\nu f_\nu \quad (\text{modd. } M', M'', \ldots),$$

donc aussi, h et k désignant chacun un quelconque des indices $1, 2, \ldots, n$,

$$(2) \qquad f_h f_k \equiv c_0^{(h,k)} + c_1^{(h,k)} f_1 + \ldots + c_\nu^{(h,k)} f_\nu \quad (\text{modd. } M', M'', \ldots).$$

En désignant par N′, N″, ... les $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ fonctions des ν variables $x_1, \ldots, x_\nu$

$$x_h x_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} x_1 - \ldots - c_\nu^{(h,k)} x_\nu,$$

où les c sont ceux de l'équation (2), il résulte facilement des équations (1) et

(1) Voir *Acta mathematica*, t. VI, p. 196.

(2) que l'on a

$$F(y_1, \ldots, y_\nu) \equiv C_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_\nu y_\nu \quad (\text{modd. } N', N'', \ldots),$$

où les C sont ceux de l'équation (1). On peut en conclure que le système

$$(1, y_1, \ldots, y_\nu)$$

est un *système fondamental* du système de diviseurs (N', N'', ...). Comme le système (M', M'', ...), ce système (N', N'', ...) est d'ordre $(\nu + 1)$ et son rang est ν, c'est-à-dire égal au nombre des variables y qui y paraissent; ces deux propositions se démontrent sans difficulté.

Ceci posé, revenons au problème dont la solution fait l'objet de ce Mémoire.

Il est tout d'abord manifeste que ce problème serait résolu si l'on savait exprimer univoquement, de toutes les manières possibles, chacun des $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ produits $i_h i_k$ par une fonction linéaire de $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ dont les coefficients soient des nombres réels.

Le problème posé se ramène donc immédiatement à celui-ci :

Trouver tous les systèmes de coefficients

$$c_0^{(h,k)}, \quad c_1^{(h,k)}, \quad \ldots, \quad c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

tels que, si l'on forme le système de modules dont les $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ fonctions entières des ν variables indéterminées $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$

$$i_h i_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} i_1 - \ldots - c_\nu^{(h,k)} i_\nu$$

sont les $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ éléments, *toute* fonction entière des variables $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ soit congrue, suivant ce système de modules, à une fonction linéaire de $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$; ou, en d'autres termes :

Former pour ν variables $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$, de la manière la plus générale, le système précédent de modules pour lequel $(1, i_1, \ldots, i_\nu)$ soit un système fondamental.

Mais en rapprochant cet énoncé des considérations générales qui précèdent et qui se rapportaient à tout système de modules, on voit que *chaque système de diviseurs de rang égal au nombre des variables dont les éléments du système de diviseurs sont fonctions entières, donne une solution du problème proposé; l'ordre* $\nu + 1$ *du système de diviseurs détermine le nombre* ν *de variables* $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$, *qui paraissent dans la solution correspondante.*

Il n'y a d'ailleurs pas d'autre solution du problème, comme on le reconnaît immédiatement.

Du théorème que le *rang* du système de diviseurs (N', N'', ...) ne peut être plus petit que ν, on déduit une seconde méthode pour trouver tous les systèmes convenant à la question. Dans cette seconde méthode on forme, à l'aide des $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ éléments

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} y_1 - \ldots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad (h \leq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$\nu + 1$ fonctions linéaires et homogènes à coefficients indéterminés Y', Y'',

on élimine, entre ces $\nu+1$ fonctions, les ν variables $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ en formant le *résultant* et en l'égalant à zéro. En ordonnant ce résultant par rapport aux produits de puissances des indéterminées U, il faut que chacun des coefficients soit nul ; on obtient donc ainsi un système d'équations qui définit entièrement les quantités c satisfaisant à la question. Par cette méthode, les quantités c sont déterminées *algébriquement;* elles peuvent donc être envisagées comme des grandeurs d'un domaine de rationalité dans lequel tous les éléments sont des variables indéterminées, sauf un seul qui est fonction algébrique des autres.

Comme le théorème que le système de diviseurs $(N', N'', \ldots)$ ne peut être de rang plus petit que ν joue ainsi un rôle considérable et qu'il n'a été démontré que par un raisonnement indirect, M. Kronecker en donne une seconde démonstration, directe cette fois.

Précisons maintenant davantage le problème, en *fixant à l'avance* le domaine de rationalité

$$(R', R'', \ldots),$$

ce qui est le cas le plus *général* que l'on puisse concevoir et qui comprend tous les cas particuliers. Supposons que les éléments de ce domaine soient liés par un nombre déterminé de relations

$$\Phi'(R', R'', \ldots) = 0, \qquad \Phi''(R', R'', \ldots) = 0, \qquad \ldots .$$

On peut manifestement remplacer les éléments $R', R'', \ldots$ de ce domaine de rationalité par des variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots$ à condition d'adjoindre au domaine de rationalité les fonctions $\Phi'(z_1, z_2, \ldots)$, $\Phi''(z_1, z_2, \ldots)$, ... Comme alors $M', M'', \ldots$ sont des fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les coefficients dépendent de $z_1, z_2, \ldots$, les quantités $G, M', M'', \ldots$ sont des grandeurs entières du *domaine naturel de rationalité* $(x_1, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots)$ tandis que les quantités $\Phi', \Phi'', \ldots$ sont des grandeurs entières du domaine $(z_1, z_2, \ldots)$. Si Φ désigne aussi une grandeur entière de ce dernier domaine, la congruence

$$G \equiv 0 \qquad (\text{modd.}\, M', M'', \ldots),$$

que nous avons considérée, doit être remplacée par la congruence

$$\Phi\, G \equiv 0 \qquad (\text{modd.}\, M', M'', \ldots, \Phi'\ \Phi'', \ldots).$$

La démonstration, très facile d'ailleurs, de cette proposition termine la première Partie du Mémoire de M. Kronecker.

Kronecker (*L.*). — Remarques sur les derniers travaux de Lejeune-Dirichlet. (439-442).

Après avoir reproduit une partie du Discours de M. Kummer sur Lejeune-Dirichlet qui est inséré dans les *Abhandlungen* de l'Académie de Berlin, 1860, M. Kronecker cite, d'autre part, l'énoncé du problème posé dans le Tome VII des *Acta mathematica,* problème qui a, comme on sait, amené M. Poincaré à écrire son Mémoire couronné sur la stabilité du système du monde.

M. Kronecker explique que le problème posé par les *Acta mathematica* lui semble donner aux paroles prononcées par Lejeune-Dirichlet une portée très différente de celle qu'elles ont eue effectivement.

Il y a eu, en réalité, *deux* communications verbales faites par Lejeune-Dirichlet à M. Kronecker. La première concerne la stabilité du système du monde; la seconde concerne une nouvelle méthode générale pour résoudre les problèmes de la Mécanique.

Lejeune-Dirichlet a dit un jour qu'il possédait une démonstration de la stabilité du système du monde; il l'a dit, en quelque sorte, sans aucun apparat, tout en mettant bien en évidence l'importance de la chose. M. Kronecker a eu l'impression que la démonstration de Lejeune-Dirichlet devait être de forme très simple, comme, par exemple, sa démonstration, aujourd'hui classique, de ce qu'un système auquel on peut appliquer l'intégrale des forces vives, est en équilibre stable lorsque la fonction des forces est maximum.

Un autre jour, au cours d'une promenade, Lejeune-Dirichlet dit à M. Kronecker, d'un ton presque solennel, et après lui avoir recommandé de n'en parler encore à personne, qu'il possédait une nouvelle méthode générale pour résoudre les problèmes de la Mécanique. Elle ne donne pas un résultat fini, soit à l'aide de quadratures, soit à l'aide de développements en séries; elle consiste en un *procédé* à l'aide duquel on obtient des approximations successives de la solution du problème. Il est probable que Lejeune-Dirichlet prévoyait encore de longs calculs à effectuer avant de pouvoir publier cette découverte. M. Kronecker a eu l'impression que cette *nouvelle méthode* pouvait avoir quelque rapport avec les recherches de Lejeune-Dirichlet sur la théorie du potentiel dont Lejeune-Dirichlet lui avait parlé immédiatement auparavant.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des nombres complexes en général et sur les systèmes de diviseurs (suite). (447-465).

Ce n'est qu'après avoir fixé un domaine de rationalité (R′, R″, ...) que l'on peut distinguer, parmi les systèmes de diviseurs (N′, N″, ...), les systèmes *premiers* de ceux qui ne le sont pas.

On voit sans peine que dans l'étude de ce système de diviseurs (N′, N″, ...) on peut remplacer les éléments R′, R″, ... du domaine de rationalité par des variables indépendantes z_1, z_2, ..., en leur adjoignant les éléments Φ_1, Φ_2, ..., en adjoignant également ces éléments aux modules de toute congruence, enfin en remplaçant toute égalité par une congruence modulis Φ_1, Φ_2, ...

Alors, lorsqu'une fonction entière G de $y_1, \ldots, y_\nu$, dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité (R′, R″, ...) *contient* un système de diviseurs formé également par des fonctions entières F′, F″, ... de $y_1, \ldots, y_\nu$ dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité (R′, R″, ...), on a

$$\Phi G \equiv 0 \quad (\text{modd. } F', F'', \ldots, \Phi', \Phi'', \ldots),$$

où G, F′, F″, ... sont des fonctions entières des variables y et z, tandis que Φ, Φ′, Φ″, ... sont des fonctions entières des variables z. Les propriétés qui caractérisent comme *système premier* un système de fonctions entières de $y_1, \ldots, y_\nu$, dont les coefficients font partie du domaine (R′, R″, ...), s'étendent donc immédiatement au système que l'on obtient en remplaçant R′, R″ par des variables indépendantes z_1, z_2, ... et en adjoignant, aux éléments du système de diviseurs, les fonctions Φ′, Φ″, ... Si donc, dans les recherches qui suivent, on introduit des fonctions algébriques, c'est simplement pour éviter des longueurs; on pourrait rester dans un domaine *naturel* de rationalité. Cette remarque est de quelque importance au point de vue de la méthode suivie.

Si le système de diviseurs $(N', N'', \ldots)$, de rang ν, est *premier* dans le domaine $(y_1, y_2, \ldots, R', R'', \ldots)$, nous partagerons les fonctions entières de y_1, $y_2, \ldots, y_\nu$, dont les coefficients font partie du domaine $(R', R'', \ldots)$, en deux groupes, celui des fonctions entières qui contiennent le système premier

$$(N', N'', \ldots),$$

et celui des fonctions entières qui ne le contiennent pas. A chaque fonction du second groupe $G(y_1, \ldots, y_\nu)$, correspond alors (comparez *Crelle*, t. 99, p. 337) une *fonction réciproque modulis* $N', N'', \ldots$ du même groupe, c'est-à-dire une fonction $G_1(y_1, \ldots, y_\nu)$ du groupe, telle que l'on ait

$$G(y_1, \ldots, y_\nu) \cdot G_1(y_1, \ldots, y_\nu) = 1 \qquad (\text{modd. } N', N'' \ldots),$$

tandis que pour les fonctions $F(y_1, \ldots, y_\nu)$ du premier groupe, on a

$$F(y_1, \ldots, y_\nu) = 0 \qquad (\text{mod } N', N'', \ldots),$$

et il n'existe pas de fonction réciproque modulis $N', N'', \ldots$.

Un produit de fonctions entières fait et ne fait donc partie du second groupe que lorsque tous ses facteurs en font partie. Ainsi lorsqu'un produit de plusieurs facteurs contient le système premier $(N', N'', \ldots)$, il faut que l'un au moins des facteurs contienne ce système premier.

C'est un corollaire immédiat de cette dernière proposition que le théorème fondamental de la théorie des nombres complexes qui nous apprend, d'une part, qu'à chacun des nombres complexes pour lesquels les systèmes de coefficients correspondants

$$c_0^{(h,k)}, \quad c_1^{(h,k)}, \quad \ldots, \quad c_\nu^{(h,k)} \qquad (h \leqq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

sont déterminés par un système de diviseurs premiers $(N', N'', \ldots)$, il existe un nombre complexe *réciproque*, et, d'autre part, qu'un produit de ces nombres complexes ne peut être nul que si l'un au moins de ses facteurs est nul.

On montre de même que, parmi les nombres complexes qui sont déterminés par des systèmes de modules $(N', N'', \ldots)$ non premiers, il y en a dont la valeur réciproque n'est pas un tel nombre complexe.

Mais allons plus loin dans la théorie des systèmes de diviseurs et formons maintenant ν fonctions linéaires et homogènes des $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ éléments du système $(N', N'', \ldots)$ avec des coefficients indéterminés $U', \ldots$; considérons aussi la $(\nu+1)^{\text{ième}}$ fonction

$$y_0 - (u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_\nu y_\nu),$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont des indéterminées; et formons le résultant de ces $(\nu+1)$ fonctions en éliminant $y_1, \ldots, y_\nu$.

Puisque $(N', N'', \ldots)$ est de rang ν, ce résultant contient un facteur

$$R_0(y_0, u_1, \ldots, u_\nu)$$

indépendant des indétermines $U', \ldots$. Et l'on peut démontrer que le système $(N', N'', \ldots)$ est premier ou non suivant que la fonction R_0 est irréductible ou non dans le domaine de rationalité $(y_0, R', R'', \ldots)$. Le discriminant du système $(N', N'', \ldots)$ n'est nul que quand le discriminant de la fonction $R_0(y_0)$

est nul. Cela résulte de théorèmes sur les discriminants et formes de discriminants qui sont dans un rapport intime avec ceux du § 9 de la *Festschrift* de M. Kronecker.

On en conclut que, pour les systèmes de modules (N′, N″, ...) dont le discriminant est nul, il existe des fonctions entières de $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ qui ne sont pas congrues à zéro, mais dont une certaine puissance est congrue à zéro. Tandis que, pour les systèmes de modules (N′, N″, ...), dont le discriminant n'est pas nul, il n'existe pas de fonction entière de $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ non congrue à zéro et dont une certaine puissance serait congrue à zéro.

Mais que le discriminant d'un système (N′, N″, ...) soit nul ou non, lorsque le système (N′, N″, ...) n'est pas *premier*, il existe des fonctions entières de y dont le produit contient le système (N′, N″, ...) sans qu'aucun des facteurs ne le contienne. Ces facteurs ne peuvent, d'après ce qui précède, être *égaux* que si le discriminant du système (N′, N″, ...) est nul.

Au dernier théorème concernant les nombres complexes on peut donc ajouter celui-ci :

« Parmi les nombres complexes qui sont déterminés par des systèmes de modules (N′, N″, ...) non premiers, il y en a certainement dont le produit est nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul. Si la forme discriminante du système (N′, N″, ...) est en outre nulle, il existe même des nombres complexes différents de zéro dont une puissance déterminée est nulle. »

On peut maintenant démontrer que les nombres complexes de la forme

$$b_0 + b_1 i_0 + b_2 i_0^2 + \ldots + b_\nu i_0^\nu$$

nous donnent *tous* les nombres complexes déterminés par des systèmes de diviseurs à discriminants différents de zéro, si l'on fixe les règles de calcul avec i par une équation de degré $\nu + 1$

$$R(i_0) = 0,$$

choisie arbitrairement, de manière toutefois que le discriminant de cette équation ne soit pas nul.

On remarquera que si l'on considérait une équation $R(i_0) = 0$ à discriminant nul, on obtiendrait des nombres complexes de la forme

$$b_0 + b_1 i_0 + b_2 i_0^2 + \ldots + b_\nu i_0^\nu$$

déterminés par des systèmes de diviseurs à discriminant nul ; mais on n'obtiendrait pas par ce procédé *tous* les nombres complexes à discriminant nul.

Soient $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ des variables indéterminées. En envisageant, modulis (N′, N″, ...), des fonctions entières de l'argument

$$z_0 + z_1 y_1 + \ldots + z_\nu y_\nu,$$

on parvient, en différentiant et tenant compte des relations établies antérieurement, à des systèmes de fonctions de $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ liées par certaines équations aux dérivées partielles, linéaires, homogènes et du premier ordre, tandis que chacune de ces fonctions vérifie certaines équations aux dérivées partielles, linéaires, homogènes et du second ordre.

Dans le cas où le discriminant du système (N′, N″, ...) n'est pas nul, on peut, par des transformations linéaires, ramener les systèmes précédents de

fonctions entières de $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ à des systèmes linéaires de fonctions qui, chacune, ne dépendent que d'une variable; les équations aux dérivées partielles transformées sont ainsi vérifiées d'elles-mêmes. Dans le cas où le discriminant du système $(N', N'', \ldots)$ est nul, on peut également, par des transformations linéaires, réduire les équations aux dérivées partielles; mais M. Kronecker ne peut encore les réduire de manière à obtenir la solution complète de ces équations transformées.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des nombres complexes en général, et sur les systèmes de modules. (557-578).

Au lieu de chercher tous les nombres complexes de la forme

$$a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_\nu i_\nu,$$

qui comprennent les nombres réels a_0 et vérifient les règles ordinaires du calcul, on peut chercher tous les nombres de la forme linéaire et *homogène*

$$a_1 i_1 + \ldots + a_\nu i_\nu,$$

qui vérifient les règles ordinaires du calcul. On peut envisager ce problème comme un cas particulier des recherches précédentes; il est alors caractérisé par ce que les quantités

$$c_0^{(h,k)} \qquad (h \gtrless k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

sont nulles. Il peut aussi être caractérisé par ce que chacun des systèmes de diviseurs

$$(N'_0, N''_0, \ldots),$$

qui correspondent aux nombres complexes $a_1 i_1 + \ldots + a_\nu i_\nu$, contient le système $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, ce que l'on peut écrire

$$(N'_0, N''_0, \ldots) \equiv 0 \qquad (\text{modd. } y_1, y_2, \ldots, y_\nu).$$

On observera toutefois que si l'on se borne à considérer le cas où le déterminant

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dans lequel $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont des indéterminées, est différent de zéro, les systèmes de diviseurs $(N'_0, N''_0, \ldots)$ perdent leur caractère particulier; car les recherches qui les concernent deviennent alors identiques à celles du système général $(N', N'', \ldots)$ dans lequel le discriminant est différent de zéro.

C'est pour cette raison que les nombres complexes obtenus par M. Weierstrass, qui considère *a priori* le cas où les quantités

$$c_0^{(h,k)} \qquad (h \gtrless k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

sont nulles, et où l'on a

$$\left| \sum_{h=1}^{h=\nu} u_h c_i^{(h,k)} \right| \gtrless 0,$$

coïncident avec les nombres complexes obtenus par M. Kronecker dans le cas où les quantités $c_0^{(h,k)}$ ne sont pas nulles et où les discriminants des systèmes de diviseurs qui correspondent aux nombres complexes ne sont pas nuls.

La méthode de M. Kronecker nous donne ainsi, outre les nombres complexes déjà obtenus par la méthode de M. Weierstrass, d'autres nombres complexes, ceux qui correspondent aux systèmes de diviseurs à discriminants nuls.

Sans doute, lorsque le module est simplement *une* fonction entière d'une variable x, ce seul cas de discriminant nul, exclu par la méthode de M. Weierstrass, se trouve être un cas singulier où le nombre des coefficients indéterminés est, pour un degré déterminé, réduit d'une unité. Mais il n'est pas évident qu'il ne convienne pas, dans d'autres recherches, de considérer les nombres complexes correspondant précisément à des *systèmes* de modules à discriminant nul; dès lors il vaut mieux, au lieu de les *exclure a priori*, se contenter de les *distinguer* des autres, comme le fait M. Kronecker.

Avant d'aller plus loin fixons, nettement la notion si importante de *classe* de systèmes de diviseurs.

Soient deux systèmes de diviseurs de rang n

$$(M', M'', \ldots) \quad \text{et} \quad (m', m'', \ldots),$$

où chaque élément M est une fonction entière des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les coefficients font partie du domaine de rationalité (R′, R″, ...) et où chaque élément m est une fonction entière des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dont les coefficients font partie du même domaine de rationalité (R′, R″, ...). S'il existe des substitutions entières

$$x_k = \Phi_k(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi_h = \mathfrak{F}_h(x_1, \ldots, x_n) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les coefficients fassent partie du domaine (R′, R″, ...) et telles que, après avoir effectué ces substitutions respectives, le système (M′, M″, ...) *contienne* le système (m', m'', ...) et réciproquement le système (m', m'', ...) *contienne* le système (M′, M″, ...), on dira que *les deux systèmes font partie de la même classe*. En d'autres termes, (M′, M″, ...) et (m', m'', ...) font partie de la même classe lorsque l'on a à la fois les deux congruences

$$(M', M'', \ldots) \equiv 0 \qquad (\text{modd. } m', m'', \ldots, x_1 - \Phi_1, \ldots, x_n - \Phi_n),$$
$$(m', m'', \ldots) \equiv 0 \qquad (\text{modd. } M', M'', \ldots, \xi_1 - \mathfrak{F}_1, \ldots, \xi_n - \mathfrak{F}_n).$$

On peut, dans chaque cas particulier, reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si deux systèmes de diviseurs font ou ne font pas partie de la même classe.

Quand une seule des deux congruences précédentes a lieu, par exemple la première, on dit que la classe représentée par (m', m'', ...) est *contenue* dans la classe représentée par (M′, M″, ...).

Lorsque, dans les congruences précédentes, non seulement les coefficients font chaque fois partie du domaine de rationalité (R′, R″, ...), mais sont tous des fonctions *entières* des éléments de ce domaine, on dit que les systèmes (M′, M″, ...) et (m', m'', ...) font partie de la *même classe au sens restreint du mot*.

Un exemple fera bien saisir la différence. Soient

$$M = x + 5, \qquad m = \text{[illegible]}$$

comme on a identiquement

$$x^2 + 3 = 4(\xi^2 - \xi + 1) + (x - 2\xi + 1)(x + 2\xi - 1),$$

on a les deux congruences

$$M(x) \equiv 0 \quad [\text{modd.}\, m(\xi),\ x - 2\xi + 1],$$

$$m(\xi) \equiv 0 \quad \left[\text{modd.}\, M(x),\ \xi - \tfrac{1}{2}(x + 1)\right].$$

Ainsi $M(x)$ et $m(\xi)$ *font partie de la même classe;* mais $M(x)$ et $m(\xi)$ ne font pas partie de la même classe au sens restreint du mot; dans le sens restreint du mot $M(x)$ *contient* $m(\xi)$.

M. Kronecker démontre les trois théorèmes suivants :

« 1° Les systèmes $(M', M'', \ldots)$ et $(N', N'', \ldots)$ correspondants de la théorie des nombres complexes font partie de la même classe. »

« 2° Chaque classe peut être caractérisée par un système $(N', N'', \ldots)$ pour lequel les variables elles-mêmes $y_1, \ldots, y_\nu$ auxquelles on a adjoint l'unité forment un système fondamental (modulis $N', N'', \ldots$) de sorte que *chaque* fonction entière des variables $y_1, \ldots, y_\nu$ est congrue modulis$(N', N'', \ldots)$ à une fonction *linéaire* de ces variables. On nomme ce système $(N', N'', \ldots)$, *système normal de la classe.* »

« 3° Si le discriminant est différent de zéro, la classe peut être représentée par une fonction d'une seule variable. »

Remarquons qu'au point de vue de M. Kronecker ce dernier théorème n'implique pas du tout qu'il convient de ne considérer que le cas où le discriminant n'est pas nul. Une suite de publications de M. Kronecker tend en effet à montrer qu'il est tout aussi simple de considérer, au lieu d'une fonction d'une variable, un système de n fonctions de n variables. Ce n'est pas le théorème 3°, c'est le théorème 2° qui est fondamental.

Il y a d'ailleurs un rapport intime entre la classe d'un système de fonctions et le *genre* de fonctions algébriques d'une part, et la classe dans le sens restreint du mot d'un système de fonctions et l'espèce de fonctions algébriques d'autre part, le genre et l'espèce étant définis comme dans la *Festschrift* de M. Kronecker. Cela apparaît déjà sur l'exemple précédent, où l'espèce de nombres algébriques entiers définis par l'équation $m(\xi) = 0$ contient l'espèce de nombres algébriques entiers définis par l'équation $M(x) = 0$; M. Kronecker en donne plusieurs autres exemples importants et montre en somme avec plus de détails que dans sa *Festschrift* que, en particulier, les théorèmes concernant les *nombres algébriques entiers* peuvent être obtenus simplement par la théorie des systèmes de diviseurs, ainsi sans symboles autres que ceux de l'Arithmétique.

La considération des fonctions entières, à coefficients entiers, des n variables $x_1, \ldots, x_n$, envisagées suivant le système de modules $(M', M'', \ldots)$ premier et de rang n, dont chaque élément $M', M'', \ldots$ est une fonction entière à coefficients entiers de $x_1, \ldots, x_n$, *contient la théorie des nombres complexes dont le genre est défini par les équations*

$$M' = 0, \qquad M'' = 0, \qquad \ldots.$$

Plus généralement, envisageons les fonctions entières de $x_1, \ldots, x_n$ dont

les coefficients font partie d'un domaine de rationalité $(R', R'', \ldots)$ *fixe arbitrairement*. Parmi ces fonctions on peut distinguer, modulis $M', M'', \ldots$, celles qui font partie de la même *espèce*. Chacune de ces espèces est caractérisée par une des classes de systèmes de diviseurs dans lesquelles la classe $(M', \ldots)$ est contenue; en effet, si

$$1,\quad \varphi_1^0(x_1, \ldots, x_n),\quad \ldots,\quad \varphi_\mu^0(x_1, \ldots, x_n)$$

est un système fondamental, modulis $M', M'', \ldots$, de l'espèce considérée, M. Kronecker montre que l'on peut déterminer un système de diviseurs $(S', S'', \ldots)$ où chaque S est fonction de μ variables $\xi_1, \ldots, \xi_\mu$, tel que l'on ait

$$(S', S'', \ldots) \sim 0 \qquad (\text{modd.}\, M', M'', \ldots, \xi_1 - \varphi_1^0, \ldots, \xi_\mu - \varphi_\mu^0).$$

Parmi toutes les fonctions entières de n variables $x_1, \ldots, x_n$ dont les éléments font partie du domaine de rationalité $(R', R'', \ldots)$, on peut encore caractériser un autre groupe. Soient $M'_0, M''_0, \ldots, M_0^{(\rho)}$, ρ de ces fonctions; groupons toutes les fonctions M_0 qui contiennent le système

$$(M'_0, M''_0, \ldots, M_0^{(\rho)}, M', M'', \ldots);$$

elles forment un groupe, car toute fonction linéaire et homogène d'éléments du groupe est de nouveau un élément du groupe. Parmi tous ces éléments M_0, considérons seulement les fonctions entières qui, modulis $M', M'', \ldots$, sont des fonctions linéaires de $M'_0, \ldots, M_0^{(\rho)}$ dont les coefficients appartiennent à une *espèce* déterminée S. Soit $(1, \varphi_1^{(0)}, \ldots, \varphi_\mu^{(0)})$ un système fondamental de cette espèce; alors toutes les fonctions du groupe partiel considéré sont des fonctions linéaires et homogènes des $\rho(\mu+1)$ éléments

$$M'_0, \ldots, M_0^{(\rho)}, \varphi_1^{(0)} M'_0, \ldots, \varphi_1^{(0)} M_0^{(\rho)}, \varphi_2^{(0)} M'_0, \ldots, \varphi_\mu^{(0)} M_0^{(\rho)},$$

et l'on obtient un système fondamental $\Phi_1, \ldots, \Phi_\lambda$ du groupe partiel, tel que chaque fonction de ce groupe puisse être représentée, modulis $M', M'', \ldots$, par une fonction linéaire et homogème de $\Phi_1, \ldots, \Phi_\lambda$, dont les coefficients font partie du domaine de rationalité $(R', R'', \ldots)$.

Si l'on envisage l'ensemble des fonctions obtenues en ajoutant ou multipliant entre elles et avec des grandeurs du domaine de rationalité $(R', R'', \ldots)$, un nombre quelconque σ de fonctions entières arbitrairement choisies

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\sigma,$$

il est facile de voir que l'on obtient précisément un groupe partiel comme celui que nous venons de caractériser.

Kronecker (L.). — Sur les nombres complexes en général et sur les systèmes de modules. (595-612).

Soient toujours $(M', M'', \ldots)$ un système de modules de rang n dont les éléments $M', M'', \ldots$ sont des fonctions entières de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients faisant partie du domaine de rationalité $(R', R'', \ldots)$, et soit $(1, f_1, \ldots, f_\nu)$ un système fondamental de ce système de modules $(M', M'', \ldots)$

Alors tout monôme

$$x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} \qquad (h_1, h_2, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

peut être représenté, modulis M′, M″, ..., par une fonction entière linéaire de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ dont les coefficients font partie du domaine de rationalité (R′, R″, ...). Toutes les fonctions entières

$$\sum_{h_1, h_2, \ldots, h_n} Z_{h_1, h_2, \ldots, h_n} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n},$$

$$\begin{pmatrix} h_1 + h_2 + \ldots + h_n \leq r \\ h_1, h_2, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

dont la dimension ne dépasse pas le nombre fixé arbitrairement r, peuvent donc être mises, modulis M′, M″, ..., sous la forme

$$z_0 + z_1 f_1 + \ldots + z_\nu f_\nu,$$

où $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ sont des fonctions linéaires et homogènes des Z à coefficients faisant partie du domaine de rationalité (R′, R″, ...). On ramène ainsi, modulis M′, M″, ..., tout système formé par les coefficients Z à un système de coefficients $(z_0, z_1, \ldots, z_\nu)$ que nous désignerons pour abréger par (z).

Convenons d'appeler *système composé* de deux systèmes (z) et (z') le système (z'') que l'on obtient en multipliant les deux expressions

$$z_0 + z_1 f_1 + \ldots + z_\nu f_\nu$$

et

$$z'_0 + z'_1 f_1 + \ldots + z'_\nu f_\nu,$$

et en mettant le produit sous la forme

$$z''_0 + z''_1 f_1 + \ldots + z''_\nu f_\nu.$$

Alors les éléments $z''_0, z''_1, \ldots, z''_\nu$ du système (z'') composé des deux systèmes (z) et (z') sont donnés par les formules

$$z''_i = \sum_{h,k} c_i^{(h,k)} z_h z'_k \qquad (h, i, k = 0, 1, 2, \ldots, \nu);$$

il est facile de s'assurer que les quantités $c_i^{(h,k)}$ qui paraissent dans ces formules sont justement celles introduites au début de ces recherches sur les nombres complexes et qui déterminent ces nombres complexes. La détermination de *tous* les nombres complexes se rattache donc à la théorie de la *composition* des systèmes.

A ce nouveau point de vue, dégagé de tout symbole, même de celui de l'indétermination, le principe de la théorie des nombres complexes se présente sous un jour plus net encore. Il convient donc de rattacher à ce nouveau point de vue la solution des questions générales qui restent encore à résoudre. A cet effet, nous commencerons par étudier directement les règles de la composition des systèmes.

Le système (z) est dit *équivalent* au système (z') et l'on écrit $(z) \backsim (z')$ lorsque l'on peut déduire (z') de (z) par un procédé déterminé quelconque,

mais tel que si l'on a à la fois

$$(z) \backsim (z'), \quad (z) \backsim (z''),$$

on ait aussi

$$(z') \backsim (z'').$$

De cette restriction on déduit immédiatement en prenant pour (z'') le système (z') lui-même, que *chaque système est équivalent à lui-même*; et en prenant pour (z'') le système (z) lui-même, on voit de même que si l'on a à la fois

$$(z) \backsim (z'), \qquad (z) \backsim (z),$$

on a aussi

$$(z') \backsim (z);$$

et comme nous venons de voir que l'on a toujours $(z) \backsim (z)$ on déduit donc, de l'équivalence $(z) \backsim (z')$, cette autre équivalence $(z') \backsim (z)$. Ainsi le procédé en question est *réversible*.

Soient (z), (z'), (z''), ... des systèmes non équivalents et représentons par l'équivalence

$$\theta[(z), (z')] \backsim (z'').$$

le fait que l'on a déduit des deux systèmes (z) et (z') le système (z'') par des règles déterminées quelconques, mais telles que l'on ait

$$\theta[(z), (z')] \backsim \theta[(z'), (z)],$$

$$\theta\{(z), \theta[(z'), (z'')]\} \backsim \theta\{(z'), \theta[(z), (z')]\}.$$

Le système (z'') est dit *composé* des deux systèmes (z) et (z').

Si l'on suppose enfin que pour tout couple de systèmes (z), (z') il existe un système (z'') qui composé avec (z') donne (z), et que d'autre part il existe au moins *un* système (z') qui reste invariable quand on le compose avec un certain système (z^0), on peut démontrer que l'on a pour *tout* système (z)

$$\theta[(z''), (z)] \backsim (z).$$

Toutes les restrictions formulées ont lieu si l'on donne comme règle de composition θ, la suivante

$$z''_i = \sum_{h,k} c_i^{(h,k)} z_h z'_k \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Nous allons maintenant montrer comment on peut, en faisant quelques conventions très simples, désigner sans ambiguïté un système quelconque (z) par un *système d'indices rationnels*. Posons

$$\theta[(z^{(1)}), (z^{(1)})] \backsim (z^{(2)}),$$

$$\theta[(z^{(1)}), (z^{(2)})] \backsim (z^{(3)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\theta[(z^{(1)}), (z^{(m)})] \backsim (z^{(m+1)}),$$

on a alors pour tout entier positif m et tout entier positif n

$$\theta[(z^{(m)}), (z^{(n)})] \backsim (z^{(m+n)})$$

Désignons ensuite par $\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ un système qui, composé n fois avec des systèmes équivalents, donne $(z^{(m)})$. Enfin si $\left(z^{(1)}\right)$ est un système différent de $\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ quels que soient les entiers m et n, soit $\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}\right)$ le système composé des deux systèmes $\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ et $\left(z^{\left(\frac{m'}{n'}\right)}\right)$. Alors, en désignant par α_1, α_2, ... des nombres rationnels, on voit facilement que tout système peut être mis sous la forme

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu).$$

Dans cette notation le système composé de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu)$ et de $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)$ est $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_\mu + \beta_\mu)$.

Comme premier exemple prenons pour (z) tous les nombres entiers positifs plus petits qu'un nombre fixé M, et prenons pour règle de composition la *multiplication* des systèmes composants, qui est manifestement une composition dans le sens que nous avons donné à ce mot. Alors si $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ sont tous les nombres premiers inférieurs à M, un entier quelconque $n < \mathrm{M}$ peut être manifestement mis sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ sont l'un des nombres 0, 1, 2, ... Cet entier sera représenté dans la notation fixée par le système

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu).$$

Comme second exemple envisageons tous les nombres rationnels $r_1, r_2, r_3, \ldots$, que l'on peut mettre sous la forme

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu},$$

où, pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$, le nombre α_λ est un quelconque des entiers compris entre l'entier négatif fixé arbitrairement m_λ et l'entier positif également fixé arbitrairement n_λ. On peut représenter un quelconque de ces nombres par le système de nombres rationnels

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu).$$

Mais on peut aussi opérer tout autrement. Soit b un quelconque des nombres positifs fixé parmi les nombres $r_1, r_2, r_3, \ldots$. M. Kronecker démontre qu'à chacun des nombres rationnels considérés r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ on peut faire correspondre un nombre *rationnel* déterminé s_k (qui dépend de r_k et de b) tel que si au produit r_i d'un nombre quelconque des $r_1, r_2, \ldots$ correspond le nombre rationnel σ_i, ce nombre σ_i diffère de la somme des nombres rationnels s qui correspondent aux facteurs de ce produit de moins que la moitié de la plus petite des différences entre deux quelconques des indices s correspondants à tous les nombres considérés r. Il en résulte que l'on peut représenter sans ambiguïté chacun des nombres considérés r_h $(h = 1, 2, \ldots)$ par le nombre rationnel correspondant s_h de manière que la somme $s_\alpha + s_\beta$ corresponde au produit $r_\alpha r_\beta$. Il résulte d'ailleurs de la démonstration de M. Kronecker que, au lieu du nombre rationnel s_i correspondant à r_i, on peut prendre le logarithme de r_i pour la base b.

2e semestre 1888.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des nombres complexes en général et sur les systèmes de modules (983-1016).

Les notions d'*équivalence* et de *composition* fixées dans une Communication précédente (*voir* plus haut) ne sont pas seulement applicables aux nombres et systèmes de nombres; elles s'appliquent aussi à d'autres objets.

Des longueurs, des durées, des volumes, des poids, etc. peuvent être *composés* de manière que les deux conditions

$$\theta[(z), (z')] \backsim \theta[(z'), (z)],$$
$$\theta\{(z), \theta[(z'), (z'')]\} \backsim \theta\{(z'), \theta[(z), (z'')]\}$$

soient vérifiées; et chaque objet considéré peut être ainsi désigné par un système d'indices rationnels de manière que la composition des objets corresponde à l'addition des indices. On n'a nullement besoin, pour obtenir ces systèmes d'indices, de connaître les règles de décomposition des objets; celles de composition suffisent.

Il est bon d'observer que dans son Mémoire, *Philosophische Aufsätze*, M. Helmholtz nomme *addition* ce que M. Kronecker nomme, avec Gauss, *composition*.

Au point de vue auquel nous nous plaçons ici, la notion de *proportion* précède celle de *rapport*. En effet la notion de proportion se ramène directement à celle d'équivalence ou plutôt elle n'en est qu'un cas particulier, car nous pouvons nommer *équivalents* tous les systèmes

$$(c z_1, c z_2),$$

que l'on obtient en donnant à c une valeur quelconque; les conditions imposées à toute équivalence dans la Communication précédente de M. Kronecker sont alors vérifiées; l'équivalence

$$(c z_1, c z_2) \backsim (c' z_1, c' z_2)$$

s'énonce en disant que les quatre nombres $c z_1$, $c z_2$; $c' z_1$, $c' z_2$ sont en *proportion*. Inversement, tout système équivalent au système (z_1, z_2) est de la forme $(c z_1, c z_2)$.

Lorsque les éléments z_1 et z_2 du système considéré (z_1, z_2) sont commensurables, l'unique *invariant* de cette équivalence particulière est le quotient du premier élément du système par le second, ou une fonction linéaire entière ou fractionnaire de ce quotient. C'est cet *invariant* que l'on nomme rapport, ou plutôt *valeur du rapport* des deux éléments du système; on le désigne par $z_1 : z_2$.

Mais il peut arriver que les deux éléments z_1 et z_2 du système considéré ne soient pas commensurables et qu'ayant établi une équivalence

$$(\alpha, \beta) \backsim (\gamma, \delta)$$

(par exemple une proportion), on puisse déterminer *un intervalle* aussi petit

que l'on veut, *invariant* pour tous les systèmes équivalents. C'est cet *intervalle-invariant* qui n'est plus un nombre mais que l'on peut encore représenter par un symbole que l'on nomme *valeur du rapport* des deux éléments α, β et que l'on désigne par $\alpha:\beta$.

Envisageons, par exemple, l'équivalence

$$(\alpha, \beta) \backsim (\gamma, \delta),$$

où α désigne la longueur d'une circonférence, β son diamètre, γ la surface du cercle limité par cette circonférence, δ le carré de son rayon. On montre dans les éléments de la Géométrie que cette équivalence est bien une proportion comme nous venons de la définir. Cette équivalence n'a pas de nombre invariant, mais on peut déterminer un intervalle aussi petit que l'on veut que l'on peut envisager comme invariant de la proportion; on peut en effet déterminer deux fractions dont la différence soit aussi petite que l'on veut et entre lesquelles, s'il existait un nombre invariant, ce nombre invariant serait compris. En introduisant un symbole π pour l'*intervalle-invariant* de l'équivalence considérée, on voit donc que π n'est pas un nombre mais peut être resserré autant qu'on le veut entre deux nombres. On dit encore que π est la *valeur du rapport* des deux éléments α et β ou des deux éléments γ et δ et l'on écrit

$$\pi = \alpha:\beta = \gamma:\delta.$$

Mais on peut demander davantage. Ce qui précède suppose en effet que l'on envisage les nombres *rationnels* en même temps que les nombres *entiers*, et l'on peut demander à rattacher les notions de proportion et de rapport à la théorie générale des équivalences et de leurs invariants, *sans quitter le domaine des nombres entiers*.

On peut conserver la même définition de la proportion. C'est une équivalence

$$(cz_1, cz_2) \backsim (c'z_1, c'z_2),$$

où c, c' sont deux entiers quelconques. Mais cette équivalence n'a plus en général d'invariant même lorsque z_1 et z_2 sont commensurables. Toutefois, en désignant par u et u' des *indéterminées*, on a une *congruence suivant un système de modules*

$$cz_1 u = c'z_1 u' \qquad (\text{modd.}\, cz_2 u - 1,\ c'z_2 u' - 1),$$

et par suite $cz_1 u$ est un invariant modulis $cz_2 u - 1$, $c'z_2 u' - 1$. Au lieu d'un invariant fractionnaire on a donc, en restant dans le domaine des nombres entiers, un invariant suivant un système de modules.

On peut aussi faire usage de la notion donnée par Gauss de l'équivalence des formes quadratiques pour bien mettre en évidence ce qu'il faut entendre par *rapport* de deux grandeurs. Nous rangerons à cet effet dans une même *classe* tous les systèmes équivalents de deux grandeurs ou de deux objets. Ces classes peuvent alors être groupées en deux catégories. Dans les unes le représentant de la classe est un système de deux entiers premiers relatifs; on dit alors que les deux objets sont dans un *rapport commensurable*. Dans les autres ce n'est pas le cas; on dit alors que les deux objets sont dans un rapport *incommensurable*.

Envisageons, par exemple, le cas où les systèmes (z'), (z''), ... sont des co

lumes v', v'' ... et où nous entendons par *composition* une juxtaposition de ces volumes. Nous pouvons alors désigner chaque volume composé par un système d'indices rationnels

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu);$$

où ν est le nombre des volumes dont les mesures sont incommensurables. Ainsi lorsque les volumes v', v'', ... sont des cubes commensurables et des sphères de rayons commensurables, on n'a besoin que de systèmes de *deux* indices rationnels (α, β) pour désigner le volume composé d'un nombre quelconque de volumes donnés.

Si un corps dont le volume est $v\left(\frac{m}{n}\right)$ est situé tout entier à l'intérieur d'une sphère qui est elle-même située tout entière à l'intérieur d'un corps dont le volume est $v\left(\frac{m'}{n'}\right)$, on montre directement que l'on a entre les quatre entiers m, n, m', n', l'inégalité $mn' < m'n$.

Il faut ensuite étendre aux volumes des corps la notion d'équivalence par approximation en opérant sur ces volumes exactement de la même manière que sur les nombres rationnels dans une Communication précédente de M. Kronecker. Si, quelque petit que l'on choisisse un nombre rationnel τ, on peut déterminer deux nombres rationnels r' et r'' dont la différence soit plus petite que τ, et tels que les surfaces limitant deux corps donnés K et K' soient toutes deux situées entre les surfaces de deux corps dont les volumes ont les indices rationnels r' et r'', on dira que les deux corps K et K' ont des volumes équivalents. Pour fixer la notion d'équivalence il importe de laisser τ indéterminé afin de pouvoir le choisir suivant les besoins de la pratique dans chaque cas particulier. A la notion d'égalité des volumes commensurables, vient donc s'ajouter la notion d'équivalence des volumes incommensurables avec un intervalle d'équivalence qui reste indéterminé.

Après avoir ainsi montré comment, au point de vue arithmétique, il faut *définir* les symboles que l'on nomme *nombres incommensurables,* nous allons montrer comment on peut *calculer* avec ces nombres incommensurables.

Soient $\varphi(k)$, $\psi(k)$ deux nombres entiers formés par un procédé arithmétique déterminé à l'aide de l'entier k et supposons qu'en formant successivement les systèmes $[\varphi(1), \psi(1)]$, $[\varphi(2), \psi(2)]$, ... on reconnaisse qu'à tout nombre rationnel τ, choisi aussi petit que l'on veut, corresponde un entier m tel que, pour tout $n > m$, on ait

$$(1) \qquad |\varphi(m)\psi(n) - \varphi(n)\psi(m)| < \tau\,|\psi(m)\psi(n)|.$$

Nous dirons alors que les nombres rationnels

$$\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}, \quad \frac{\varphi(2)}{\psi(2)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

où n est un entier arbitraire plus grand que m, forment une série *convergente* de nombres rationnels.

Si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2\nu+1}$ désignent une suite de nombres rationnels, positifs ou négatifs, chacun plus petit que le suivant, nous dirons que les nombres rationnels r qui sont situés avec τ_{2h} dans l'intervalle $(\tau_{2h-1}, \ldots, \tau_{2h+1})$ sont *équivalents*.

Si, en formant la série convergente $\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}$, $\frac{\varphi(2)}{\psi(2)}$, ..., nous trouvons que pour

$h > m$ tous les nombres $\frac{\varphi(h)}{\psi(h)}$ sont équivalents, nous pourrons, dans le sens de l'équivalence, nous arrêter au terme $\frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$.

Une fois τ choisi et m déterminé par l'inégalité de convergence (1), nous fixerons un intervalle d'équivalence $(\tau_{2h-1} \ldots \tau_{2h+1})$ de manière que l'inégalité

$$\tau_{2h-1} + \tau < \frac{\varphi(m)}{\psi(m)} < \tau_{2h+1} - \tau$$

soit vérifiée; alors pour tout $n > m$, $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ reste bien dans l'intervalle d'équivalence $(\tau_{2h-1} \ldots \tau_{2h+1})$.

Si, dans ce qui précède, nous remplaçons τ par $\delta\tau$ où δ est une variable vérifiant l'inégalité $0 < \delta < 1$, et si $m_{\delta\tau}$ désigne le plus petit entier tel que l'on ait pour tout $n > m_{\delta\tau}$ l'inégalité

$$|\varphi(m_{\delta\tau})\psi(n) - \varphi(n)\psi(m_{\delta\tau})| < \delta\tau\,|\psi(m_{\delta\tau})\psi(n)|,$$

il peut arriver que l'on ait, pour $\delta = 1$,

$$\tau_{2h-1} < \frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)} < \tau_{2h+1},$$

sans que l'on ait aussi

$$\tau_{2h-1} + \tau < \frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)} < \tau_{2h+1} - \tau.$$

Il faut alors nécessairement que l'on ait pour l'un des deux nombres τ_{2h-1} ou τ_{2h+1}

$$\left|\tau_{2h\pm1} - \frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right| \leqq \tau;$$

mais alors ou bien l'on a aussi, pour toute fraction δ plus petite que l'unité,

$$\left|\tau_{2h\pm1} - \frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right| \leqq \delta\tau, \tag{2}$$

ou bien il existe au moins une fraction δ_0 plus petite que l'unité pour laquelle on ait

$$\tau_{2h-1} + \delta_0\tau < \frac{\varphi(m_{\delta_0\tau})}{\psi(m_{\delta_0\tau})} < \tau_{2h+1} - \delta_0\tau; \tag{3}$$

on peut d'ailleurs reconnaître au mode de formation des entiers $\varphi(h)$, $\psi(h)$ si l'on est dans le premier ou dans le second cas.

Dans le premier cas on dira que le nombre rationnel $\tau_{2h\pm1}$ est la limite de la fraction $\frac{\varphi(h)}{\psi(h)}$; non seulement la série $\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}, \frac{\varphi(2)}{\psi(2)}, \ldots$ est convergente, mais elle converge vers le nombre rationnel qui marque la limite de deux intervalles d'équivalence.

Dans le second cas $(\tau_{2h-1} \ldots \tau_{2h+1})$ est l'intervalle d'équivalence dans lequel sont situés tous les nombres $\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$ pour $n > m_{\delta_0\tau}$.

Si, au lieu de considérer une division *déterminée* en intervalles d'équivalence, on laisse cette division *indéterminée*, on voit donc que les séries convergentes de nombres rationnels se partagent en deux catégories : les séries de la première catégorie convergent vers un nombre rationnel déterminé, les séries de la seconde catégorie ne convergent pas vers un nombre rationnel mais convergent dans un intervalle d'équivalence quelle que soit la division en intervalles d'équivalences que nous ayons fixée. Pour ranger une série convergente donnée dans la première ou dans la seconde catégorie il est nécessaire de pouvoir reconnaître, d'après la formation des termes successifs $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ de cette série convergente, si, pour tout nombre rationnel δ compris entre 0 et 1, *un* nombre rationnel *quelconque* r vérifie la condition

$$|r\psi(m_{\delta\tau}) - \varphi(m_{\delta\tau})| < \delta\tau|\psi(m_{\delta\tau})|,$$

ou si, au contraire, pour *tout* nombre rationnel r, l'inégalité

$$|r\psi(m_{\delta_0\tau}) - \varphi(m_{\delta_0\tau})| > \delta_0\tau|\psi(m_{\delta_0\tau})|$$

peut être vérifiée par un choix convenable δ_0 du nombre δ. C'est d'ailleurs ce δ qui, une fois déterminé, permet, dans ce second cas, de fixer l'intervalle d'équivalence de la série.

Ainsi les séries convergentes de la seconde catégorie sont caractérisées par deux inégalités simultanées que nous écrirons, en remplaçant δ_0 par δ,

$$|\varphi(m_{\delta\tau})\psi(n) - \varphi(n)\psi(m_{\delta\tau})| < \delta\tau|\psi(m_{\delta\tau})\psi(n)|, \qquad (n > m_{\delta\tau}),$$
$$|r\psi(m_{\delta\tau}) - \varphi(m_{\delta\tau})| > \delta\tau|\psi(m_{\delta\tau})|.$$

La première est une condition de *convergence;* elle montre que les nombres $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergent les uns vers les autres quand l'entier k augmente. La seconde est une condition de *divergence* en ce sens qu'elle montre que l'on peut, quel que soit le nombre rationnel r que l'on considère, fixer l'intervalle d'équivalence dans lequel tous les nombres $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ tombent à partir d'une certaine valeur entière de k, de manière que r soit *hors* de cet intervalle.

On ne sait pas, pour toute série de nombres rationnels convergents les uns vers les autres, déterminer $\delta\tau$ de manière que la condition de divergence soit vérifiée. Mais, lorsqu'on le sait, on peut, pour tout entier ν, trouver l'intervalle d'équivalence

$$\left(\frac{h}{\nu} \cdots \frac{h+1}{\nu}\right) \qquad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

dans lequel les nombres $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ convergent. Il suffit pour cela de prendre d'abord pour τ un nombre quelconque plus petit que $\frac{1}{\nu}$, puis de déterminer le nombre m_τ par la condition de convergence

$$|\varphi(m_\tau)\psi(n) - \varphi(n)\psi(m_\tau)| < \tau|\psi(m_\tau)\psi(n)|, \qquad (n > m_\tau),$$

et enfin, en désignant par $[a]$ le plus grand entier plus petit que le nombre

rationnel a, d'envisager le nombre entier

$$\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right].$$

Alors, ou bien $\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}$ est à une distance plus grande que τ de chacune des extrémités de l'intervalle

$$\left\{\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right], \ldots, \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]\right\},$$

et alors cet intervalle est l'intervalle cherché; ou bien $\frac{\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}$ est à une distance moindre que τ, de l'une des extrémités de cet intervalle et alors il faut déterminer $\delta\tau$ de manière que la *condition de divergence* soit vérifiée pour $r=\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]$, respectivement pour $r=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_\tau)}{\psi(m_\tau)}\right]$, et l'intervalle cherché est

$$\left\{\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right], \ldots, \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})}\right]\right\},$$

si $m_{\delta\tau}$ est le nombre entier correspondant à $\delta\tau$ par la condition de *convergence*, comme m_τ correspondait à τ.

En posant pour abréger

$$\chi(\nu)=\left[\frac{\nu\varphi(n)}{\psi(n)}\right],$$

on voit que le nombre entier $\chi(\nu)$ ne dépend que de ν pourvu que n soit plus grand que $m_{\delta\tau}$. Les termes de la série convergente

$$\chi(1), \quad \frac{\chi(2)}{2}, \quad \frac{\chi(3)}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{\chi(k)}{k}, \quad \ldots$$

convergent d'ailleurs dans le même intervalle d'équivalence que ceux de la série proposée

$$\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}, \quad \frac{\varphi(2)}{\psi(2)}, \quad \frac{\varphi(3)}{\psi(3)}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(k)}{\psi(k)}, \quad \ldots,$$

de quelque manière que l'on ait choisi les intervalles d'équivalence. Pour cette série de nombres $\frac{\chi(k)}{k}$ qui, dans le sens de l'équivalence, remplace entièrement la série proposée, la condition de convergence est simplement

$$\left|\frac{\chi(m)}{m}-\frac{\chi(n)}{n}\right| < \frac{1}{m}, \qquad \text{pour} \qquad n > m.$$

La fonction $\chi(k)$ de k est *caractéristique* pour la série des nombres $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$. C'est la différence

$$\chi(k)-\chi(k-1) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

que M. Christoffel a introduite sous le nom de caractéristique dans ses recherches sur les nombres irrationnels, publiées dans les *Annali di Matematica*.

On peut se proposer de construire *toutes* les séries possibles de nombres $\frac{\chi(k)}{k}$

convergentes dans un intervalle d'équivalence. Pour en former tout d'abord une aussi simple que possible, désignons par ω_ν le plus petit entier divisible à la fois par 1, 2, 3, 4, ..., ν et désignons par ξ_2, ξ_3, ..., ξ_k, ... des entiers arbitraires parmi ceux qui sans être tous nuls à partir d'un indice $k = \mu$ et sans être non plus tous donnés par l'égalité

$$\xi_k = \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}} - 1$$

à partir d'un indice $k = \mu$, vérifient, pour tout indice k, les inégalités

$$0 \leq \xi_k < \frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}.$$

Prenons alors pour $\chi(\omega_\nu)$ le nombre entier donné par la relation

$$\frac{\chi(\omega_\nu)}{\omega_\nu} = \chi(1) + \sum_{k=2}^{k=\nu} \frac{\xi_k}{\omega_k},$$

et, lorsque k est différent de ω_ν, prenons pour $\chi(k)$ le nombre entier

$$\chi(k) = k\chi(1) + \left[\sum_{i=2}^{i=k} \frac{k\xi_i}{\omega_i}\right];$$

la série ainsi formée

$$\chi(1), \quad \frac{\chi(2)}{2}, \quad \frac{\chi(3)}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{\chi(k)}{k}, \quad \ldots$$

répondra à la question.

On obtiendra toutes les autres, en remplaçant 1, ω_2, ω_3, ..., ω_k, ... par les nombres entiers 1, Ω_2, Ω_3, ..., Ω_k, ..., choisis arbitrairement parmi ceux qui forment une suite où chaque terme Ω est divisible par le précédent et où *tous* les nombres entiers soient des diviseurs de nombres Ω de la suite. Si alors Z_2, Z_3, ..., Z_k, ... sont des entiers vérifiant les inégalités

$$0 \leq Z_k < \frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

sans que à partir d'un indice μ les Z_k soient tous nuls ou tous égaux à leurs limites supérieures respectives

$$\frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}} - 1,$$

et si l'on pose

$$\frac{\chi(\Omega_\nu)}{\Omega_\nu} = \chi(1) + \sum_{k=2}^{k=\nu} \frac{Z_k}{\Omega_k},$$

et

$$\chi(k) = k\chi(1) + \left[\sum \frac{kZ_i}{\Omega_i}\right],$$

où la somme est à étendre aux indices $i = 2, 3, \ldots, k$, à moins que, pour un indice i avant k, Ω_i ne soit divisible par k, auquel cas la somme ne va que

jusqu'à cet indice, la série

$$Z^{(1)},\quad \frac{Z^{(2)}}{2},\quad \ldots,\quad \frac{Z^{(k)}}{k},\quad \ldots$$

répondra à la question.

On remarquera qu'en excluant, comme dans ce qui précède, les déterminations des Z_k où à partir d'un indice $k = \mu$ on aurait, pour tous les indices,

$$Z_k = \frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}} - 1,$$

les séries

$$\sum_{(k)} \frac{Z_k}{\Omega_k} \qquad \left(0 < Z_k < \frac{\Omega_k}{\Omega_{k-1}},\quad k = 2, 3, 4, \ldots\right),$$

qui sont formées par un nombre fini déterminé ν *de termes, sont les seules à l'aide desquelles on puisse représenter un nombre* rationnel.

Minkowsky (*H.*). — Sur le mouvement d'un corps solide dans un fluide (1095-1110).

G. Kirchhoff et W. Thomson ont établi par des considérations différentes les équations différentielles du mouvement d'un solide invariable dans un fluide homogène, incompressible, sans frottement, remplissant tout l'espace, en repos à l'infini et tel qu'en chacun de ses points il existe un potentiel univoque des vitesses.

M. Minkowsky a remarqué que, *quel que soit le solide invariable considéré*, dans le cas particulier où il n'y a pas de forces extérieures, et dans le cas particulier où, le solide ayant un point fixe, la seule force extérieure est la pesanteur, la résolution de ces équations différentielles peut être ramenée, par des transformations convenables, à un problème qui a quelque analogie avec celui des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. On peut alors faire usage des méthodes données par Jacobi dans la XIXe Leçon de ses *Vorlesungen* pour résoudre les problèmes de Mécanique qui ne dépendent que de deux inconnues.

Dans le Mémoire actuel, M. Minkowsky n'envisage que le premier de ces deux cas particuliers.

Il commence par caractériser l'état des vitesses d'un solide invariable dans un fluide, comme ceux que nous avons définis, par deux segments, tout comme on caractérise en Cinématique l'état des vitesses d'un solide invariable dans le vide par deux segments : la vitesse d'un point arbitrairement choisi et la vitesse angulaire de rotation autour d'un axe passant par ce point. Ici le premier segment S_1 est une vitesse de translation, le second S_2 est l'axe d'un couple de percussion.

La force vive totale du système formé par le solide invariable et le fluide considéré peut d'ailleurs, après une substitution convenable, être mise sous la forme d'une somme de deux formes quadratiques toujours positives E et G dépendant chacune de *trois* variables seulement. Les dérivées partielles respectives de ces deux formes E et G par rapport aux trois variables qu'elles contiennent sont précisément les composantes, suivant trois axes rectangulaires fixés dans le solide invariable, des deux segments S_1 et S_2.

M. Minkowsky envisage ensuite les *états stationnaires du mouvement*, c'est-à dire les états de vitesses tels que lorsque le solide invariable passe par un

tel état des vitesses son mouvement reste indéfiniment un même mouvement hélicoïdal. Il les détermine dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures.

Enfin, en s'appuyant sur sa décomposition cinématique de l'état des vitesses caractérisé par les deux segments S_1 et S_2, et sur le principe d'Hamilton, M. Minkowsky obtient une propriété du mouvement sous la forme d'une condition de minimum qui doit être vérifiée. C'est cette condition de minimum qui permet enfin d'appliquer les théorèmes cités de Jacobi.

Les équations auxquelles parvient M. Minkowsky caractérisent, dans chaque cas particulier, le problème d'*inversion* dont la solution est ce qui importe le plus lorsque l'on veut se représenter complètement le mouvement.

Fuchs (*L.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (1115-1126).

Envisageons l'équation différentielle linéaire

$$(1)\qquad \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + p_1\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \ldots + p_{2n}y = 0,$$

dont les coefficients $p_1, \ldots, p_{2n}$ sont des fonctions rationnelles de x. Soit

$$(y_1, \ldots, y_{2n})$$

un système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle. Il y a manifestement

$$\nu = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}$$

systèmes formés à l'aide de n de ces $2n$ intégrales $y_1, \ldots, y_{2n}$. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ un de ces systèmes; à l'aide de ce système nous pouvons former ν déterminants dont les lignes horizontales soient n des $2n$ lignes horizontales

$$\begin{matrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n, \\ y'_1, & y'_2, & \ldots, & y'_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(2n-1)}, & y_2^{(2n-1)}, & \ldots, & y_n^{(2n-1)}, \end{matrix}$$

où l'indice supérieur indique l'ordre de dérivation. Désignons par $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ ces ν déterminants, en convenant que u_0 sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

que nous appellerons *déterminant principal* du système $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Si maintenant, au lieu du système $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, nous envisageons successivement les autres $\nu - 1$ systèmes formés à l'aide de n des $2n$ intégrales du système fondamental, et si nous formons pour ces $(\nu - 1)$ autres systèmes les mêmes déterminants, nous aurons, en tout, ν^2 déterminants u. Nous désignerons par

$$u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$$

ceux de ces déterminants que l'on obtient en remplaçant dans u_λ successivement $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par chacune des ν combinaisons n à n des $2n$ intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_{2n}$, et nous conviendrons de désigner chaque fois par

$$u_{\nu-1-\mu,\lambda}$$

celui des déterminants qui correspond aux n intégrales y qui ne paraissent pas dans le déterminant désigné arbitrairement par $u_{\mu,\lambda}$.

Ceci posé, formons le déterminant

$$\mathrm{P} = |u_{\mu,\lambda}| \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1);$$

en s'appuyant sur un théorème de son Mémoire fondamental (*Crelle*, t. 66), M. Fuchs démontre que l'on a

$$\mathrm{P} = \mathrm{C}e^{-\frac{\nu}{2}\int p_1\,dx},$$

où C est une constante différente de zéro. Il en résulte que le déterminant P n'est pas identiquement nul et par suite qu'il n'existe aucune relation homogène et linéaire entre les éléments $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ d'une même ligne de ce déterminant.

De plus $\dfrac{d^k u_0}{dx^k}$ est une fonction linéaire et homogène de $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$

$$\frac{d^k u_0}{dx^k} = \psi_{k0} u_0 + \psi_{k1} u_1 + \ldots + \psi_{k,\nu-1} u_{\nu-1},$$

dont les coefficients ψ sont des fonctions rationnelles de x. Cette équation a encore lieu si l'on y remplace $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ par $u_{l0}, u_{l1}, \ldots, u_{l,\nu-1}$ $(l = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$; donc le déterminant principal $\mathfrak{D}$ des fonctions u_{00}, $u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ est égal au produit des deux déterminants P et

$$|\psi_{kl}| \qquad (k, l = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

et, par suite, s'annule et ne peut s'annuler que si $|\psi_{kl}|$ s'annule.

Si l'on élimine $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$ entre les ν équations

$$(2) \qquad \frac{d^k u_0}{dx^k} = \psi_{k0} u_0 + \psi_{k1} u_1 + \ldots + \psi_{k,\nu-1} u_{\nu-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

on obtient une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^\nu u_0}{dx^\nu} + \mathrm{P}_1 \frac{d^{\nu-1} u_0}{dx^{\nu-1}} + \ldots + \mathrm{P}_\nu u_0 = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x. L'équation

$$(3) \qquad \frac{d^\nu u}{dx^\nu} + \mathrm{P}_1 \frac{d^{\nu-1} u}{dx^{\nu-1}} + \ldots + \mathrm{P}_\nu u = 0$$

est alors vérifiée pour les ν fonctions

$$u = u_{00}, \qquad u_{10}, \qquad \ldots, \qquad u_{\nu-1,0}.$$

Si le déterminant $|\psi_{kl}|$ $(k, l = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$ est identiquement nul, u_{00}, $u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ vérifient tous une équation différentielle d'ordre inférieur à ν.

Mais si le déterminant $|\psi_{kl}|$ n'est pas identiquement nul, l'équation différentielle à laquelle satisfont $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ est nécessairement d'ordre ν et

$$(u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0})$$

est un système fondamental d'intégrales de cette équation (3).

M. Fuchs démontre ensuite que si le déterminant $|\psi_{kl}|$ $(k, l = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ est différent de zéro, on peut trouver des fonctions rationnelles de x,

$$P_{\alpha\beta}(x)$$

telles que si l'on envisage la forme quadratique

$$Z = \sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha\beta} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

où les indices supérieurs indiquent toujours l'ordre des dérivées, et, si l'on y substitue à u une intégrale quelconque de l'équation différentielle (3), cette forme quadratique Z se réduit au produit de

$$e^{-\int p_1 dx}$$

par une constante dont la valeur dépend de la valeur initiale de l'intégrale u considérée.

Il démontre aussi que l'on peut trouver des fonctions rationnelles de x

$$R_{\alpha,\beta}(x),$$

telles que si l'on envisage la forme quadratique

$$Z' = \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha,\beta} t^{(\alpha)} t^{(\beta)} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

et si l'on y substitue à t une intégrale quelconque de l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^\nu t}{dx^\nu} + R_1 \frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \ldots + R_\nu t = 0,$$

équation qui est la transformée de l'équation (3) par la substitution

$$u = t e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx},$$

cette forme quadratique Z′ se réduit à une constante dont la valeur dépend de la valeur initiale de l'intégrale considérée.

De ce dernier théorème on déduit la relation que nous rappellerons plus loin

$$\frac{\partial Z'}{\partial x} = \frac{\partial Z'}{\partial t^{(\nu-1)}} [t^{(\nu)} + R_1 t^{(\nu-1)} + \ldots + R_\nu t],$$

où la quantité entre crochets est précisément le premier membre de l'équation (4), et ensuite la proposition suivante :

Théorème I. — « Si t est une intégrale quelconque de l'équation (4) et si l'on envisage la fonction

$$M = \frac{\partial Z'}{\partial t}.$$

qui est linéaire en $t^{(\nu-1)}, t^{(\nu-2)}, \dots, t$, à coefficients fonctions rationnelles de x, cette fonction M est un *multiplicateur* de l'équation (4) ou, autrement dit, (*Comparez* Fuchs, *Journal de Crelle*, t. 76, p. 183) M est une intégrale de l'équation différentielle *adjointe* à (4). »

Formons maintenant les dérivées successives par rapport à x du multiplicateur M; en tenant compte de l'équation (4) on peut les mettre pour $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$, sous la forme

$$\frac{d^k M}{dx^k} = a_{k,0}\, t + a_{k,1}\, t' + \dots + a_{k,\nu-1}\, t^{(\nu-1)},$$

et l'on démontre que les ν fonctions $M_1, M_2, \dots, M_\nu$, que l'on déduit de M en y remplaçant t successivement par les ν éléments $t_1, \dots, t_\nu$ d'un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (4) forment ou ne forment pas un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle adjointe à (4), suivant que le déterminant

$$|a_{k,l}| \qquad (k, l = 0, 1, \dots, \nu - 1)$$

n'est pas nul ou est nul.

Voici un corollaire de ce théorème : « Si le déterminant $|a_{k,l}|$ est différent de zéro, les multiplicateurs de l'équation différentielle adjointe à (4) sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients rationnels des intégrales M de l'équation (4) et de leurs dérivées par rapport à x.

On peut se demander si la forme quadratique Z', qui se réduit à une constante lorsqu'on y substitue à t une intégrale quelconque de l'équation (4), ne se réduit à une constante que pour cette substitution. On montre que Z' ne se réduit à une constante que lorsque t est ou bien une intégrale d'une équation (4), ou bien une intégrale d'une équation

$$M = 0$$

d'ordre $(\nu - 1)$.

Si, enfin, l'on examine de plus près la forme quadratique Z', on voit qu'en général on peut déterminer ν fonctions M_k $(k = 0, 1, \dots, \nu - 1)$ linéaires et homogènes par rapport à t et aux dérivées $t', t'', \dots, t^{(\nu-1-k)}$ de t par rapport à x et telles que l'on ait

$$Z' = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \frac{M_k^2}{2\varpi_k}, \tag{5}$$

où ϖ_k est le coefficient de $t^{(\nu-1-k)}$, c'est-à-dire de la dérivée d'ordre $(\nu - 1 - k)$ de t par rapport à x, dans l'expression de M_k.

On remarquera que lorsque l'on substitue à t, dans M_{k+1}, une intégrale de l'équation $M_k = 0$, M_{k+1} devient un multiplicateur de cette équation. Enfin on a

$$\frac{M_{\nu-2}}{\varpi_{\nu-2}} = t' - \frac{\varpi'_{\nu-1}}{2\varpi_{\nu-1}}\, t.$$

Il y a exception, et Z' prend des formes particulières différentes de la forme (5), lorsqu'une ou plusieurs fonctions rationnelles de x

$$\varpi_0, \quad \varpi_1, \quad \dots, \quad \varpi_{\nu-1}$$

s'annulent. En se reportant à la définition de ϖ_l, on voit donc qu'il y a exception

lorsque les fonctions

$$M_0,\quad M_1,\quad \ldots,\quad M_{\nu-1},$$

que l'on forme successivement, ne contiennent pas chacune effectivement la dérivée de l'ordre le plus élevé qu'elle puisse contenir.

Fuchs (L.). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (1273-1290).

Voici d'abord les théorèmes sur les équations différentielles linéaires qui servent de lemmes aux recherches actuelles de M. Fuchs.

Soit

$$\frac{d^m y}{dx^m} + r_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + r_m y = 0 \tag{6}$$

une équation différentielle linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre dont les coefficients $r_1, \ldots, r_m$ sont des fonctions rationnelles de x. Toute fonction w de la forme

$$w = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_{m-1} y^{(m-1)},$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x et $y^{(k)}$, la dérivée d'ordre k de y par rapport à x, vérifie également une équation différentielle linéaire d'ordre m ou d'ordre inférieur à m. L'ensemble des équations différentielles que l'on obtient ainsi pour toutes les fonctions w possibles forme une *classe* d'équations différentielles.

Si $(y_1, \ldots, y_m)$ est un système fondamental d'intégrales de l'équation proposée et si

$$w_k = A_0 y_k + A_1 y'_k + \ldots + A_{m-1} y_k^{(m-1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

on ne peut avoir entre $w_1, w_2, \ldots, w_m$ une relation linéaire homogène à coefficients constants.

Si les fonctions rationnelles de x, $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ sont arbitraires, l'ordre de l'équation différentielle à laquelle satisfait w n'est pas inférieur à m. Cette équation différentielle est donc précisément du $m^{\text{ième}}$ ordre et l'on peut exprimer toute intégrale d'une quelconque des équations différentielles faisant partie de la classe considérée par une fonction linéaire homogène de $w, w', \ldots, w^{(m-1)}$ dont les coefficients sont fonctions rationnelles de x. Chaque équation de la classe joue donc le même rôle que l'équation (6) qui a servi de point de départ.

En se basant sur les définitions et théorèmes démontrés par M. Frobenius, dans le t. 76 du *Journal de Crelle*, sur la réductibilité et l'irréductibilité des équations différentielles, on démontre que :

Théorème II. — « Si l'une des équations différentielles de la classe considérée est réductible, toutes les équations différentielles de la classe sont réductibles. Et il y a parmi les équations réductibles des équations d'ordre inférieur à m. »

Si donc l'une des équations de la classe est irréductible, toutes les équations de la classe sont irréductibles et toutes sont effectivement d'ordre m.

Revenons maintenant aux recherches spéciales de M. Fuchs concernant l'équa

tion différentielle linéaire d'ordre $2n$

$$(1) \qquad \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + p_1 \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \ldots + p_{2n}y = 0,$$

qui a fait l'objet de la Communication précédente à l'Académie et conservons les mêmes notations que dans cette Communication.

M. Fuchs forme un système (Σ) d'équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients rationnels qui est vérifié par le système $S_0, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ de fonctions rationnelles de x qui paraissent comme coefficients de $t, t', \ldots, t^{(\nu-1)}$, dans l'expression

$$M(t) = S_0 t + S_1 t' + \ldots + S_{\nu-1} t^{(\nu-1)}$$

du multiplicateur $M(t)$ de l'équation différentielle (3) de la Communication précédente

$$\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + R_1 \frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \ldots + R_\nu t = 0,$$

et il démontre que :

Théorème III. — « Si le système (Σ) admet deux solutions rationnelles

$$S_0, \quad S_1, \quad \ldots, \quad S_{\nu-1}$$

et

$$S'_0, \quad S'_1, \quad \ldots, \quad S'_{\nu-1},$$

telles qu'il n'existe pas de relation identique de la forme

$$S'_0 t + S'_1 t' + \ldots + S'_{\nu-1} t^{(\nu-1)} = \gamma(S_0 t + S_1 t' + \ldots + S_{\nu-1} t^{(\nu-1)})$$

où γ désigne une quantité indépendante de x, l'équation

$$\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + R_1 \frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \ldots + R_\nu t = 0$$

est nécessairement *réductible.* »

Il nous faut maintenant établir un lemme général concernant toute équation différentielle (6) dans laquelle les coefficients $r_1, r_2, \ldots, r_m$ dépendent d'un paramètre k et varient d'une façon continue avec ce paramètre k. Voici ce lemme :

« S'il existe un système fondamental d'intégrales $(y_1, \ldots, y_m)$ de l'équation différentielle (6) tel que l'on ait toujours, quel que soit le chemin que l'on fasse parcourir à la variable x, pour $a = 1, 2, \ldots, m$, des relations de la forme

$$\frac{\partial y_a}{\partial k} = A_0 y_a + A_1 y'_a + \ldots + A_{m-1} y_a^{(m-1)},$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x, les coefficients des substitutions du groupe appartenant à cette équation différentielle (6) sont nécessairement indépendants du paramètre k.

Ainsi, en désignant, pour $a = 1, 2, \ldots, m$, par $\overline{y_a}$ ce que devient y_a lorsque x

décrit une courbe fermée, on a

$$\overline{y_a} = \alpha_{a1}y_1 + \alpha_{a2}y_2 + \ldots + \alpha_{am}y_m \qquad (a = 1, 2, \ldots, m),$$

où les coefficients α sont des nombres à la fois indépendants de x et de k.

Réciproquement, s'il existe un système fondamental d'intégrales $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de l'équation différentielle (6) tel que les coefficients α des substitutions du groupe appartenant à cette équation différentielle (6) soient indépendants du paramètre k, et si les intégrales de l'équation différentielle (6) n'ont pas de point d'indétermination, on a, quel que soit le chemin parcouru par x, m relations

$$\frac{dy_a}{dk} = A_0 y_a + A_1 y'_a + \ldots + A_{m-1} y_a^{(m-1)} \qquad (a = 1, 2, \ldots, m),$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x.

Nous avons vu (*Bulletin*, XV_2, p. 186) ce que M. Fuchs appelle *point d'indétermination* d'une fonction. Les hypothèses faites dans ce théorème réciproque reviennent à supposer que l'équation différentielle linéaire (6) appartient à la classe caractérisée par l'équation (12) du t. 66 du *Journal de Crelle*, p. 146.

Remarquons aussi que, si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ désignent un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (6), on déduit des m relations précédentes, les m relations

$$\frac{\partial(fy_a)}{\partial k} = \left(fA_0 + \frac{\partial f}{\partial k}\right)y_a + fA_1 y'_a + \ldots + fA_{m-1} y_a^{(m-1)},$$

où f désigne une quantité indépendante de x. Et si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sont des quantités ne dépendant ni de x, ni de k, on déduit des mêmes m équations, que l'expression

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_m y_m$$

vérifie également une équation de la même forme.

Appliquons ce lemme général à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + p_1\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \ldots + p_{2n}y = 0$$

qui est l'objet de nos recherches. En supposant que le déterminant $|\alpha_{ik}|$ ne s'annule pas, on voit alors que l'équation (4)

$$(4) \qquad \frac{d^{\nu}t}{dx^{\nu}} + R_1\frac{d^{\nu-1}t}{dx^{\nu-1}} + \ldots + R_{\nu}t = 0$$

admet un système fondamental d'intégrales $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ vérifiant les équations

$$\frac{\partial\xi_\mu}{\partial k} = \omega_0\xi_\mu + \ldots + \omega_{\nu-1}\xi_\mu^{(\nu-1)},$$

où $\omega_0, \ldots, \omega_{\nu-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x. On en déduit les relations

$$\frac{d^r}{dx^r}\left(\frac{\partial\xi_\mu}{\partial k}\right) = \omega_0^{(r)}\xi_\mu + \ldots + \omega_{\nu-1}^{(r)}\xi_\mu^{(\nu-1)} \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

où les ω sont des fonctions rationnelles de x.

Donc :

Théorème IV. — « Si l'on remplace dans la forme quadratique

$$\mathrm{H}(t) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \mathrm{R}_{\alpha,\beta}}{\partial k} t^{(\alpha)} t^{(\beta)} + \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{R}_{\alpha,\beta} [t^{(\beta)} (\omega_{\alpha,0} t + \ldots + \omega_{\alpha,\nu-1} t^{(\nu-1)}) + t^{(\alpha)} (\omega_{\beta,0} t + \ldots + \omega_{\beta,\nu-1} t^{(\nu-1)})],$$

formée à l'aide des coefficients $\mathrm{R}_{\alpha,\beta}$ de la forme quadratique $\mathrm{Z}'(t)$ et des coefficients ω des équations précédentes, *la variable t par une intégrale quelconque de l'équation* (4), *cette forme quadratique* $\mathrm{H}(t)$ *ne dépend plus de x*, et l'on peut choisir le système fondamental d'intégrales $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ de manière qu'une identité de la forme

$$\mathrm{H}(t) = \gamma \mathrm{Z}'(t)$$

ne soit vérifiée pour aucune valeur de γ indépendante de x. »

En appliquant l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial x} = \mathrm{M}(t) \left[\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + \ldots + \mathrm{R}_\nu t \right]$$

et le théorème (I) de la Communication précédente, on déduit de cette proposition (IV) et du théorème (II), le théorème très important que voici :

Théorème V. — « Lorsqu'un système fondamental d'intégrales $(y_1, \ldots, y_{2n})$ d'une équation différentielle

$$\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + p_1 \frac{d^{2n-1} y}{dx^{2n-1}} + \ldots + p_{2n} = 0$$

satisfait aux $2n$ relations

$$\frac{\partial y_a}{\partial k} = \mathrm{A}_0 y_a + \ldots + \mathrm{A}_{2n-1} y_a^{(2n-1)} \qquad (a = 1, 2, \ldots, 2n),$$

l'équation

$$\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + \mathrm{R}_1 \frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \ldots + \mathrm{R}_\nu t = 0$$

est réductible, et par suite, l'équation

$$\frac{d^\nu u}{dx^\nu} + \mathrm{P}_1 \frac{d^{\nu-1} u}{dx^{\nu-1}} + \ldots + \mathrm{P}_\nu u = 0$$

est également réductible. »

L'importance de ce théorème, dont la démonstration est évidemment l'objet principal du Mémoire actuel de M. Fuchs sur les équations différentielles linéaires, résulte déjà de ce fait qu'il peut être appliqué aux équations différentielles linéaires que vérifient les modules de périodicité des fonctions hyperelliptiques, comme nous allons le démontrer.

Soient à cet effet

$$\mathrm{S} = \varphi(z, x)$$

une fonction rationnelle entière de z et de x, de degré $2n+1$ par rapport à z, et $g(z)$ une fonction rationnelle de z et x ne devenant infinie que pour les racines de l'équation $\varphi(z, x) = 0$. Posons

$$y = \frac{g(z)}{S};$$

on a alors (*Journal de Crelle*, t. 71, p. 107)

$$\frac{d^a y}{dx^a} = \sum_{b=0}^{b=2n-1} K_{a,b} \frac{z^b}{S} + \frac{d}{dz} [X_a(z) S],$$

où les quantités $K_{a,b}$ sont indépendantes de z et s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de φ et de g, tandis que $X_a(z)$ représente une fonction rationnelle de z; et si w est un module de périodicité de l'intégrale $\int y\,dz$, la fonction w de x vérifie en général une équation différentielle d'ordre $2n$

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^{2n} w}{dx^{2n}} + p_1(x) \frac{d^{2n-1} w}{dx^{2n-1}} + \ldots + p_{2n}(x) w = 0,$$

où les coefficients $p(x)$ *sont des fonctions rationnelles de x*. Enfin toutes les équations différentielles de cette forme (A) correspondant à une même fonction $g(z)$ font partie de la même classe d'équations différentielles, c'est-à-dire que l'on a par exemple en désignant par η le module de périodicité de l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}{S} dz,$$

où $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ désignent des fonctions rationnelles de x,

$$(7) \qquad w = \mathfrak{L}_0 \eta + \mathfrak{L}_1 \frac{d\eta}{dx} + \ldots + \mathfrak{L}_{2n-1} \frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}},$$

où les coefficients $\mathfrak{L}$ sont des fonctions rationnelles de x.

Mais si l'on suppose que les coefficients de $\varphi(z, x)$ et de $g(z)$ dépendent d'un paramètre k [on peut par exemple prendre pour k un zéro de la fonction $\varphi(z, x)$], un module de périodicité de l'intégrale

$$\int \frac{\partial y}{\partial k} dz = \int \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{g(z)}{S} \right] dz$$

vérifie une équation différentielle de la forme (A) : donc ce module est de la forme (7). En particulier si $g(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}$, le module de périodicité coïncide avec $\frac{\partial \eta}{\partial k}$; mais, pour ce choix de $g(z)$, $w = \eta$; on a donc

$$\frac{\partial \eta}{\partial k} = \Lambda_0 \eta + \Lambda_1 \frac{d\eta}{dx} + \ldots + \Lambda_{2n-1} \frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}},$$

où $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{2n-1}$ sont des fonctions rationnelles de x.

Cette équation est vérifiée si l'on y remplace η par l'un quelconque des modules de périodicité de l'intégrale $\int y\,dz$, c'est-à-dire par une quelconque

des intégrales de l'équation

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^n v_1}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} v_1}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x) v_1 = 0,$$

à laquelle se réduit (A) pour ce choix particulier de $g(z)$. Ce qu'il fallait démontrer.

En appliquant à cette équation (B) le théorème (V), on voit que les deux équations

$$\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + R_1(x)\frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \ldots + R_\nu(x) t = 0$$

et

$$\frac{d^\nu u}{dx^\nu} + P_1(x)\frac{d^{\nu-1} u}{dx^{\nu-1}} + \ldots + P_\nu(x) u = 0$$

sont réductibles. Mais alors, d'après le théorème (II), une au moins des équations de la même classe que $\frac{d^\nu u}{dx^\nu} + \ldots + P_\nu(x) u = 0$, est d'ordre inférieur à ν; autrement dit, on peut trouver des fonctions rationnelles de x

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{\nu-1},$$

telles que

$$w = \varphi_0 u + \varphi_1 u' + \ldots + \varphi_{\nu-1} u^{(\nu-1)},$$

vérifie une équation différentielle d'ordre inférieur à ν.

Formons maintenant les équations (3) correspondant à l'équation (B); soient

$$\frac{d^l u}{dx^l} = \psi_{l0} u + \psi_{l1} u_1 + \ldots + \psi_{l,\nu-1} u_{\nu-1}$$

ces équations. Elles permettent de mettre le second membre de (7), et par suite w, sous la forme

$$w = \psi_0 u_0 + \psi_1 u_1 + \ldots + \psi_{\nu-1} u_{\nu-1},$$

où ψ_0, ψ_1, ..., $\psi_{\nu-1}$ sont des fonctions rationnelles de x. Remplaçons dans le second membre de cette équation u_λ successivement par

$$u_{0\lambda}, \quad u_{1\lambda}, \quad \ldots, \quad u_{\nu-1,\lambda}$$

et désignons par

$$w_0, \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_{\nu-1},$$

les valeurs correspondantes de w. De ce que w vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre inférieur à ν on peut conclure que w_0, w_1, ..., $w_{\nu-1}$ sont nécessairement liées par des relations de la forme

$$\gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_{\nu-1} w_{\nu-1} = 0,$$

où les coefficients γ_0, γ_1, ..., $\gamma_{\nu-1}$ sont indépendants de x.

Les conséquences de ce résultat, si important dans la théorie des fonctions hyperelliptiques, qui est rattaché ici à la théorie de l'irréductibilité des équations différentielles linéaires, seront développées par M. Fuchs dans une Note ultérieure.

Boltzmann (*L.*). — Sur l'équilibre de la force vive entre le

mouvement de translation et le mouvement de rotation des molécules gazeuses. (1395-1401).

En appliquant à des cas particuliers les théorèmes auxquels Maxwell et M. Boltzmann sont parvenus sur *l'équilibre de la force vive*, on obtient des résultats utiles dans la théorie des gaz. M. Burnside est parvenu à un théorème qui semble contredire l'un de ces résultats sur l'équilibre de la force vive moyenne. M. Boltzmann montre, dans le Mémoire actuel, qu'au contraire les cas particuliers considérés par M. Burnside confirment le théorème général et sont même propres à le mettre en pleine lumière. La contradiction apparente repose sur ce que M. Burnside néglige des infiniment petits qu'on n'a pas le droit de négliger, en admettant que le nombre de chocs n'est pas altéré par la position excentrique du centre de gravité des molécules considérées.

J. M.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXI, 1890.

Cels. — Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. (98-100).

Soit l'équation linéaire

$$(E) \qquad z^{(n)} + a z^{(n-1)} + b z^{(n-2)} + \ldots + l z = 0,$$

où a, b, ..., l sont des fonctious de la variable indépendante, et soient ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n n solutions formant un système fondamental.

Dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1' & \xi_2' & \ldots & \xi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^{(n-1)} & \xi_2^{(n-1)} & \ldots & \xi_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

on considère la $p^{\text{ième}}$ ligne $\xi_1^{(p-1)}, \xi_2^{(p-1)}, \ldots, \xi_n^{(p-1)}$ et les n fractions obtenues en prenant successivement pour numérateurs les mineurs de Δ correspondant aux éléments de cette ligne et pour dénominateurs le déterminant Δ.

Ces n expressions sont solutions d'une équation E_1 d'ordre n, qu'on peut former avec les coefficients et les dérivées des coefficients de l'équation E.

L'intégration complète ou partielle de E_1 permet de simplifier l'intégration de E. C'est une généralisation de la méthode de l'équation adjointe due à Lagrange.

L'auteur indique une méthode d'intégration de l'équation E analogue à celle qu'a donnée Laplace pour les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre :

Soient E_1 l'équation correspondant à la dernière ligne du déterminant fonda-

mental de E; E_2 l'équation correspondant à la première ligne du déterminant fondamental de E_1. Que l'on opère sur E_2 comme sur E_1, et ainsi de suite.

On formera une suite indéfinie

$$E, E_1, E_2, \ldots, E_{2n} \ldots,$$

où

$$E_i = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + l_i z = 0.$$

Si z_{2n} désigne une solution de E_{2n} et z une solution de E_{2n}, et z une solution de E, on a

$$z = \frac{1}{l_1}\frac{d}{dt}\frac{1}{l_3}\cdots\frac{d}{dt}\frac{1}{l_{2n-1}}z_{2n},$$

ce qui montre que, lorsqu'on connaît une solution de E_{2n}, on peut en déduire une solution de E.

Un cas intéressant est celui où, dans la suite E_1, E_2, ..., on retrouve une équation identique à E.

Si par exemple cette équation est E_{2n}, la suite est périodique, et l'on peut intégrer la proposée par quadratures.

Lipschitz. — Sur la combinaison des observations. (163-166).

Dans une Note intitulée *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen* (Œuvres, t. IV), Gauss fait remarquer que l'on peut généraliser quelques théorèmes de Laplace, qui expriment la probabilité correspondant à l'espérance que la somme de m erreurs d'observation prises positives ou la somme des carrés de m erreurs soit comprise entre deux limites données.

M. Lipschitz indique une méthode qui conduit à la démonstration des théorèmes que Gauss avait énoncés simplement, en insistant sur ce fait qu'ils sont vrais pour une loi quelconque des erreurs d'observation.

Kozlow. — Diagrammomètre; auxiliaire mécanique pour les études des courbes. (166-168).

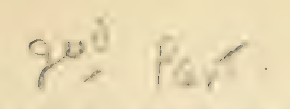
Caspary. — Sur une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta et sur un théorème relatif aux fonctions hyperelliptiques de première espèce. (225-227).

On sait que l'on peut, au moyen des fonctions thêta, représenter les quinze quantités qui déterminent le mouvement d'un corps solide.

Ce résultat cinématique est une conséquence de propositions d'analyse très générales, dont M. Caspary fait la base d'une nouvelle méthode d'exposition de la théorie des fonctions thêta.

L'auteur montre que l'on peut, au moyen des fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments, former des expressions précisément égales aux neuf coefficients $a_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal dont le déterminant est l'unité positive, et aux six quantités différentielles

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}) \\ q_h &= a_{h1}\,da_{l1} + a_{h2}\,da_{l2} + a_{h3}\,da_{l3} \end{aligned} \left[\begin{matrix} h \neq k \neq l \\ h, k, l = \left\{\begin{matrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \\ 3, 1, 2 \end{matrix}\right. \end{matrix}\right],$$



où les arguments qui entrent dans les expressions formées par les fonctions thêta restent quelconques.

M. Caspary fait connaître en outre un théorème simple qui sert de fondement à la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce.

Ces quinze fonctions sont proportionnelles aux quinze *éléments d'un système orthogonal.*

Poincaré. — Contribution à la théorie des expériences de M. Hertz. (322-326).

M. Poincaré signale une erreur importante dans les calculs qui accompagnent les expériences de M. Hertz.

Pour calculer la période de l'excitateur primaire, M. Hertz applique une formule de W. Thomson relative aux décharges oscillantes d'une bouteille de Leyde. D'après cette formule, la période est égale à

$$2\pi\sqrt{LC},$$

C étant la capacité du condensateur et L le coefficient d'induction propre du fil qui réunit les deux armatures.

Mais, dans les expériences de M. Hertz, le condensateur est remplacé par deux sphères séparées, il en résulte, comme le montre M. Poincaré, que la véritable période a pour valeur

$$\pi\sqrt{[illegible]LC}.$$

Les expériences ayant donné dans l'air une demi-longueur d'onde de [illegible], il faudrait en conclure, si le calcul de M. Poincaré était rigoureux, que la vitesse de propagation de l'air serait égale à celle de la lumière multipliée par $\sqrt{[illegible]}$.

C'est là une conclusion contraire à la théorie de Maxwell, mais qui ne s'impose pas d'ores et déjà, car dans le calcul plusieurs circonstances secondaires ont été négligées.

Quoi qu'il en soit de la valeur de la théorie de Maxwell, M. Poincaré a cherché à calculer rigoureusement, en partant des hypothèses admises par le physicien anglais, la période d'un excitateur de forme donnée, placée dans une chambre close par des parois conductrices et remplie par un diélectrique.

Dans ces conditions, l'excitateur peut donner naissance à des vibrations de même phase, mais de périodes différentes qui doivent satisfaire à certaines inégalités se prêtant sans doute à une vérification expérimentale.

Quiquet. — Essai d'une théorie concernant une classe nombreuse d'annuités viagères sur plusieurs têtes et exposition d'une méthode propre à les formuler rapidement. ([illegible]).

Certaines annuités viagères sur plusieurs têtes (*rentes de simple survivance*) peuvent faire l'objet d'une théorie d'ensemble qui conduit l'auteur au résultat suivant :

Une rente de simple survivance est une fonction linéaire et homogène des diverses annuités viagères de 1^{fr} payables pendant l'existence séparée de toutes les têtes considérées et pendant leur existence commune dans les différents groupes qu'elles forment deux à deux, trois à trois, etc.

M. Quiquet indique la marche à suivre lorsqu'on cherche la formule d'une rente de simple survivance dont un énoncé particulier fixe les conditions.

Lecornu. — Sur une propriété des systèmes de forces qui admettent un potentiel. (395-397).

Étant donné un volume dont les moments d'inertie principaux sont égaux, pour que les forces appliquées aux éléments de ce volume admettent une résultante unique passant par le centre de gravité, il faut et il suffit que ces forces dérivent d'un potentiel.

Cayley. — Sur l'équation modulaire pour la transformation de l'ordre deux. (447-449).

L'équation en u, v, si l'on écrit x à la place de u et y à la place de v, devient

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} y^{12}+(32x^{11}-22x^{3})y^{11}-44x^{6}y^{10}+(88x^{9}-22x)y^{9}+165x^{4}y^{8} \\ \quad +132x^{7}y^{7}+(-44x^{10}+44x^{2})y^{6}-132x^{5}y^{5}-165x^{8}y^{4} \\ \quad +(-22x^{11}-88x^{3})y^{3}-44x^{6}y^{2}+(22x^{9}-22x)y-x^{12}=0. \end{array}\right.$$

Si, pour abréger, l'on pose

$$m=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\qquad p=\frac{1}{4}(-3+i\sqrt{7}),$$

et que l'on fasse dans l'équation $y=mx$, puis $x^2=mp$, on constate que les coefficients des termes en p ne contiennent que les puissances m^{21}, m^{17}, m^{13}, m^{9}, m^{5}, m^{4} de m, c'est-à-dire se réduisent à des multiples de m; l'équation devient ainsi, après suppression du facteur $-8m$,

$$4p^{10}-11p^{8}-11p^{7}+22p^{6}+41p^{5}+22p^{4}-11p^{3}-11p^{2}+4=0,$$

ce que l'on peut écrire

$$(2p^{2}+3p+2)^{2}(p^{6}-3p^{5}+2p^{4}+p^{3}+2p^{2}-3p+1)=0.$$

La droite $y=mx$ a donc avec la courbe quatre intersections doubles

$$p=\frac{1}{4}(-3+i\sqrt{7}),\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad x^{2}=\frac{1+i}{4\sqrt{2}}(-3+i\sqrt{7}).$$

On arrive au même résultat en considérant le déterminant D de l'équation modulaire sous la forme que lui a donnée M. Hermite

$$D=x^{4}(1-x^{8})^{4}(16x^{16}-31x^{8}+16)^{2}(x^{24}-301960x^{16}+\ldots+1)^{2}.$$

On voit ainsi que la courbe a quatre-vingts points doubles, dont seize, donnés par l'équation

$$16x^{16}-31x^{8}+16=0,$$

sont, quatre à quatre, sur les droites

$$y=\frac{1+i}{\sqrt{2}}x,\qquad y=\frac{1-i}{\sqrt{2}}x,\qquad y=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}x,\qquad y=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}x.$$

Picard. — Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. (487-492).

M. Picard a établi antérieurement les propriétés des équations

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

dont les coefficients dépendent seulement de x et y.

Une intégrale de cette équation, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur d'un contour fermé (tracé dans la région du plan où $B^2 - AC$ est négatif), est déterminée par ses valeurs sur ce contour, *pourvu que celui-ci soit suffisamment petit.*

L'auteur fait maintenant un pas de plus : si l'equation ne renferme pas de terme en u ($F = 0$), on n'a plus à se préoccuper des dimensions du contour : dans la région du plan où $B^2 - AC$ est négatif, il n'y a qu'une intégrale, continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, qui prenne sur un contour fermé une succession de valeur données.

On parvient à ce résultat en faisant voir que toute intégrale ne pourra posséder ni maximum ni minimum.

Il est possible d'exprimer cette intégrale unique. D'après les recherches de M. Picard, on sait la trouver si le contour est suffisamment petit. Pour passer à un contour quelconque, il n'y a qu'à appliquer le procédé alterné de M. Schwartz, qui peut être étendu à l'équation (1) privée de terme en u.

Si le terme en u existe, on peut établir un résultat très général qui comprend le précédent comme cas particulier :

Dans la région du plan où $B^2 - AC$ est négatif (et où A et C sont par conséquent de même signe), si le coefficient F est de signe contraire à A et C, une intégrale sera complètement déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé quelconque.

Pour trouver cette intégrale, on peut encore avec succès employer le procédé de Schwartz.

Sparre (de). — Sur le mouvement du pendule de Foucault. (496-498).

Le pendule de Foucault décrivant non un plan, mais une courbe très aplatie, le plan d'oscillation n'existe pas à proprement parler ; mais on peut appeler *plan d'oscillation* un plan qui tourne d'un mouvement uniforme pendant une oscillation autour de la verticale avec une vitesse angulaire de l'ordre de la rotation de la Terre ω et de telle façon que le pendule se trouve dans ce plan au commencement et à la fin de l'oscillation considérée.

Le plan d'oscillation étant ainsi défini, si l'on désigne par θ_0 l'angle d'écart initial, par φ_0 l'azimut du point de départ, par λ la latitude du lieu et si l'on pose

$$n = \omega \sin\lambda, \qquad m = \omega\cos\lambda,$$

on a, dans le vide, pour la vitesse de rotation du plan d'oscillation

$$\frac{d\varphi}{dt} = -n + \frac{n\sin^2 [illegible]}{[illegible]},$$

où

$$G = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4^2-1}{4} k^2 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right]^2 \frac{4n^2-1}{2n} k^{2n-2} + \ldots,$$

$$H = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots,$$

$$k = \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Cette vitesse de rotation ne peut être affectée d'une façon appréciable par les causes perturbatrices secondaires qui agissent sur le mouvement du pendule.

Dans le cas du pendule de Foucault, la résistance de l'air a une influence indirecte sur la vitesse de rotation du plan d'oscillation : 1° en diminuant les amplitudes; 2° en déformant la courbe décrite par le pendule.

Schoute. — Sur les figures planes directement semblables. (499-501).

Dans un plan qui contient deux figures directement semblables, on construit sur le segment A_1A_2 de la droite qui joint deux points homologues A_1 et A_2 de F_1 et F_2 comme base un triangle $A_1A_2A_3$ directement semblable à un triangle donné $B_1B_2B_3$. Si les points A_1 et A_2 décrivent les figures données F_1 et F_2, le troisième sommet A_3 décrit une troisième figure F_3 directement semblable à F_1 et F_2, et les trois figures admettent deux à deux le même point double Q.

De ce théorème général découlent comme cas particuliers beaucoup d'autres en apparence plus compliqués.

L'un d'eux est susceptible d'une extension importante qui excède les conséquences directes du théorème général; la voici :

Dans le plan des deux figures directement semblables F_1 et F_2 et des points Q_1 et R_2, il existe encore une figure F_μ directement semblable à F_1 et F_2 et un point S_μ, de manière que le lieu du point P_μ divisant dans le rapport donné μ le segment P_1P_2 de la droite qui joint la projection P_1 de Q_1 sur la tangente t_1 de la courbe C_1 de F à la projection P_2 de R_2 sur la droite homologue t_2 de F_2 soit la podaire de la courbe homologue C_μ de F_μ par rapport à S_μ. Si μ varie, le point S_μ décrit une cubique circulaire et unicursale, et les points de F_1 et F_2, homologues des points S_μ des figures F_μ, parcourent les arcs de cercle décrits sur Q_1R_1 et Q_2R_2 comme cordes et capables de l'angle des figures F_1 et F_2 formé par Q_1R_1 et Q_2R_1.

Petot. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles (522).

Soient G et G' une équation de Laplace et son adjointe

$$(G) \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} + a\frac{d\lambda}{du} + b\frac{d\lambda}{dv} + c\lambda = 0,$$

$$(G') \qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} - a\frac{\partial\mu}{\partial u} - b\frac{\partial\mu}{\partial v} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}\right)\mu = 0.$$

Quand on connaît l'intégrale générale de l'une de ces deux équations, on sait en déduire celle de l'autre.

Dans le cas où G répond au système conjugué formé par les lignes de courbure d'une surface, l'auteur fait voir que, sans connaître l'intégrale générale,

on peut immédiatement d'une solution particulière quelconque déduire une solution correspondante de l'adjointe et inversement.

En effet, si l'on suppose que l'équation (G) admette quatre solutions λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 liées par la relation

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_4^2,$$

à chaque solution λ de G en correspond une de G' donnée par la formule

$$\mu = \left(\lambda, \frac{\partial \lambda_1}{\partial u}, \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial u^2}, \frac{\partial \lambda_3}{\partial v}, \frac{\partial \lambda_4}{\partial v}\right)\varphi,$$

où φ est fonction de u et de v dont la détermination exige seulement une quadrature.

Inversement, pour passer de μ à λ, on a la formule

$$\lambda = \sum_{h=1}^{h=4} \lambda_h \int \left| \mu\left(\frac{\partial \lambda_h}{\partial u} + b\lambda_h\right) du - \lambda_h\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} - a\mu\right) dv \right|.$$

Ce théorème conduit au résultat suivant :

Quand le système sphérique (u, v) est isotherme, l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial \log q}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \log p_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0,$$

qui lui correspond, a ses invariants égaux et admet la transformation infinitésimale

$$-2b\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} - 2a\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}.$$

Resal. — Étude du mouvement d'un double cône paraissant remonter, quoique descendant, sur un plan incliné. (548-553).

Théorie d'un vieil instrument dont il existe deux spécimens au Conservatoire des arts et métiers et qui, depuis l'abbé Nollet, n'est mentionné dans presque aucun ouvrage de Physique.

« Cet instrument, dit M. Resal, jouit cependant au point de vue mécanique de propriétés intéressantes dont l'étude élargit notablement le cercle trop restreint des problèmes relatifs au roulement des solides. »

Le plan incliné est déterminé par deux guides de section rectangulaire, assemblés de manière à former un angle dont le sommet est en bas. Les guides sont également inclinés sur l'horizon et leurs faces latérales sont verticales. Les deux cônes qui constituent le solide sont identiques. Lorsque le solide remplit certaines conditions et qu'on le place sur le plan incliné de manière que son équateur coïncide avec le plan vertical de la bissectrice de l'angle, le solide s'élève en s'appuyant sur les arêtes extérieures et intérieures des guides.

Lelieuvre. — Sur certaines classes de surfaces (568-569).

Dans une Note précédente (décembre 1889), M. Lelieuvre a indiqué la manière

de déterminer analytiquement les surfaces engendrées par des *lignes planes unicursales* U *que leurs conjuguées divisent homographiquement* en entendant par là que l'équation différentielle de ces conjuguées est, relativement au paramètre μ à l'aide duquel les coordonnées de tout point de U sont exprimées rationnellement, une équation de Riccati.

Voici maintenant les conditions géométriques correspondantes imposées aux lignes U : M désignera un point quelconque d'une ligne U, C la caractéristique du plan de U.

1° Le point M n'est pas sur C. Si en ce point il y a une inflexion, la tangente en M à la ligne U doit engendrer une développable quand t varie.

2° M est sur C. Alors deux cas sont à distinguer : I. La tangente en M à U n'est pas la caractéristique ; si M est un point ordinaire (avec ou sans inflexion), il doit engendrer, quand t varie, une enveloppe des lignes U ; si M est un rebroussement, il doit rester fixe. — II. La tangente en M est la caractéristique : le point M devra être ordinaire, sans inflexion, et décrire l'arête de rebroussement enveloppe de C à moins que la caractéristique ne soit fixe, auquel cas le point, s'il est ordinaire avec ou sans inflexion, ne sera assujetti à aucune autre condition, et, s'il est de rebroussement, devra rester fixe.

La méthode par laquelle M. Lelieuvre parvient à ces résultats s'applique à d'autres questions analogues, telles que celles-ci :

Déterminer les familles de lignes unicursales planes U qui sont divisées homographiquement par leurs trajectoires orthogonales.

Ce problème se ramène immédiatement à celui dans lequel toutes les lignes U restent dans le même plan. Ce système plan est alors soumis à des conditions simples qui permettent de construire sans intégration les surfaces engendrées par des lignes U jouissant de la propriété en question.

Liouville (*R.*). — Sur les développements en série des intégrales de certaines équations différentielles. (597-600).

Les équations différentielles qu'envisage M. R. Liouville sont réductibles à la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 + a_5 y^{-1} + a_6 y^{-2} + \ldots = 0,$$

où les coefficients $a_1, a_2, \ldots$, fonctions quelconques de x, sont en nombre limité.

L'auteur étudie la forme des intégrales autour des points où ces intégrales deviennent infinies, sans que toutefois les coefficients $a_1, a_2, \ldots$ offrent aucune singularité.

Près d'un pareil point x_0, les intégrales qui cessent d'être finies sont données en général par la série

$$h(x - x_0)^{-\frac{1}{2}} + h_1 + h_2(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + h_3(x - x_0)^{\frac{2}{2}} + \ldots.$$

Si l'on multiplie cette série par une série convergente λ procédant suivant les puissances de $x - x_0$, le produit $y_1 = \lambda y$ vérifie une équation semblable à la

proposée et les déterminants

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} h_{2p-1} & h_{2p-2} & \dots & h_2 & h_1 \\ h_{2p-2} & h_{2p-3} & \dots & h_1 & h_0 \\ h_{2p-3} & h_{2p-4} & \dots & h_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_p & h_{p-1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

jouent le rôle d'invariants relatifs pour la transformation $y^{(1)} = \lambda y$.

Les produits $\Delta_p a_1^{\frac{p(p-1)}{2}}$ sont aussi des invariants relatifs pour les changements de variable x.

Mannheim. — Sur le déplacement d'un double cône. (634-635).

Remarques suggérées à M. Mannheim par la Communication récente de M. Resal sur le mouvement du solide formé par deux cônes de révolution égaux accolés par la base et reposant sur deux droites symétriquement placées par rapport à cette base commune.

Le déplacement du double cône s'obtient en liant ce corps à un cylindre dont les génératrices sont horizontales et dont la section droite est une spirale logarithmique cylindrique qui roule sur le plan des directrices.

Le lieu des points de contact de l'un des cônes avec la directrice sur laquelle il pose est une loxodromie.

Sur le cylindre mobile, cette courbe est une hélice.

Appell. — Sur les fonctions périodiques de deux variables. (636-638).

Cette Note est extraite d'un Mémoire étendu qui contient la démonstration directe de ce théorème énoncé par Riemann :

« Toute fonction de deux variables à quatre paires de périodes, qui se comporte à distance finie comme une fraction rationnelle, peut être exprimée à l'aide des fonctions Θ de deux variables indépendantes ».

MM. Picard et Poincaré avaient déjà donné de ce théorème une démonstration fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

M. Appell indique quelques résultats nouveaux relatifs aux fonctions de deux variables avec deux paires de périodes.

Une fonction $f(x, y)$, admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être mise sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination de $f(x, y)$ et vérifiant les deux relations

$$\varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y), \qquad \varphi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y),$$
$$\psi(x + 2\pi i, y) = \psi(x, y), \qquad \psi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y),$$

où n désigne un entier

Les fonctions

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\theta^{-n}(x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\theta^{-n}(x, y) \qquad (n < 0)$$

ou bien

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y)\theta^{n}(-x, y), \qquad \Psi(x, y) = \psi(x, y)\theta^{n}(-x, y) \qquad (n > 0)$$

sont des fonctions entières admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et par conséquent développables en séries de Fourier : on arrive ainsi à une expression

$$(1) \qquad f(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\Psi(x, y)}$$

des fonctions de deux variables avec deux paires de périodes analogue à celle des fonctions d'une variable avec une période, avec cette différence que l'expression (1) n'est pas irréductible.

Jamet. — Sur un cas particulier de l'équation de Lamé. (638-639).

L'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = \left(\frac{3}{4} k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi - \frac{1 + k^2}{4}\right) z,$$

à laquelle Lamé a été conduit dans le problème de l'équilibre de température de l'ellipsoïde, admet l'intégrale générale

$$z = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sn}\frac{C - \varphi}{2} \operatorname{cn}\frac{C - \varphi}{2} \operatorname{dn}\frac{C - \varphi}{d}}} \left(A + B \operatorname{sn}^2 \frac{C - \varphi}{2}\right),$$

où les constantes A, B sont arbitraires et où C est déterminé par la formule

$$C = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Padé. — Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. (674-676).

Étant donnée une fonction holomorphe continue dans le voisinage de l'origine (où elle ne s'annule pas), parmi toutes les fractions rationnelles irréductibles dont les termes ont des degrés égaux au plus à p pour le numérateur, à q pour le dénominateur, il y en aura une qui représente la fraction avec une approximation dont l'ordre est plus grand que celui de l'approximation fournie par l'une quelconque des autres.

A chaque couple de nombres (p, q) correspond ainsi une fraction rationnelle approchée; ces fractions peuvent donc être écrites dans les cases d'un Tableau à double entrée.

Dès qu'une fraction rationnelle irréductible diffère de la fonction d'un infini

ment petit dont l'ordre est supérieur à la somme des degrés de ses termes, elle figure dans le Tableau. *Elle y remplit toutes les cases d'un carré* dont le côté comporte un nombre de cases égal à la différence entre l'ordre de l'approximation fournie par la fraction et la somme des degrés de ses termes.

Quand cette différence est égale à 1, la fraction est *normale*. Pour que le Tableau soit uniquement composé de fractions normales, il faut et il suffit que tous les déterminants orthosymétriques, formés au moyen des coefficients successifs de la série par laquelle la fonction peut être représentée, soient différents de zéro.

M. Padé enseigne la manière de trouver dans le Tableau les fonctions continues *simples* (c'est-à-dire dont les numérateurs partiels sont des monômes en x) et les fractions continues *régulières* (c'est-à-dire les fractions continues simples dont tous les numérateurs partiels ont le même degré, ainsi que tous les dénominateurs partiels).

Kobb. — Sur un théorème de M. Picard. (726-728).

M. Picard a montré que l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial z}{\partial x} + 2e\frac{\partial z}{\partial y} + fz = 0$$

ne peut admettre deux intégrales uniformes et continues dans l'aire limitée par un contour fermé C et prenant sur C la même valeur, pourvu que ce contour soit suffisamment petit.

Soit u la différence des deux intégrales; on aura, en remplaçant z par u dans l'équation, multipliant par $u\,dx\,dy$ et intégrant par partie

$$\int\int_C \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f\right)\right] dx\,dy = 0.$$

M. Kobb montre que, si l'on considère une intégrale w de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + w\left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f\right) = 0,$$

telle que la courbe $w = 0$, la forme quadratique qui figure entre crochets dans l'intégrale double pourra être remplacée par une forme définie quand le point (x, y) sera à l'intérieur de cette courbe.

Dans l'intérieur de la courbe $w = 0$ il ne peut exister une autre courbe fermée $w_1 = 0$.

La Maestra. — Généralisation d'un théorème d'Abel. (782-784).

Une série convergente ne perd pas sa convergence lorsqu'on en multiplie les termes $u_1, u_2, \ldots,$ par des nombres $a_1, a_2, \ldots,$ tels que chacun d'eux soit constamment supérieur ou constamment inférieur à la moyenne arithmétique de tous ceux qui le précèdent, pourvu que na_n tende vers une limite lorsque n croît indéfiniment.

Plus généralement, pour que la convergence subsiste, il suffit que les multiplicateurs $a_1, a_2, \ldots$ soient tels que les rapports

$$\frac{a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_n q_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}$$

aillent constamment en décroissant ou en croissant (tout en restant finis), les coefficients μ étant choisis de telle sorte que les expressions

$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)\frac{u_n + 1}{\mu_n + 1}$$

tendent vers une limite ou du moins oscillent dans un intervalle fini.

Mannheim. — Sur un nouveau mode de déplacement d'un double cône. (817-819).

Le déplacement d'un double cône sur deux hélices qui sont tracées sur un cylindre de révolution perpendiculaire au plan de la base des cônes et qui sont symétriques par rapport à ce plan s'obtient en liant ce double cône à un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique et qui roule sur le cylindre de révolution de façon que les génératrices viennent successivement coïncider avec celles de ce cylindre.

M. Mannheim obtient ce résultat en s'appuyant sur ce théorème : « La courbe qu'il faut faire rouler sur un cercle pour qu'un point de son plan décrive une développante d'un cercle concentrique à celui-là est une spirale logarithmique ».

Sylvester. — Preuve que π ne peut pas être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. (866-871).

Dautheville. — Sur une transformation du mouvement. (877-878).

Étant données les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

où T est une forme quadratique de q' avec des coefficients fonctions des q, et où les Q dépendent seulement des q, trouver les transformations

$$r_i = f_i(q_1, \ldots), \qquad dt_1 = \lambda(q_1, \ldots)\, dt,$$

qui transforment ces équations en d'autres de la forme

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial S}{\partial r_i} = R_i,$$

où S désigne une forme quadratique de r' avec des coefficients fonctions de r et où les R dépendent seulement de r.

Ce problème, posé par M. Appell, est (si l'on se borne au cas du mouvement d'un point sur une surface) identique à celui de la représentation géodésique d'une surface sur l'autre.

Si l'une des surfaces est un plan, on peut obtenir explicitement les transformations cherchées, en s'aidant des formules que donne M. Darboux dans sa *Théorie des surfaces* au Chapitre qui traite du problème de Dini relatif à la représentation géodésique.

Cels. — Sur une classe d'équations différentielles. (879-881).

L'auteur applique la méthode qu'il a indiquée précédemment (*Comptes rendus*, t. CXI) aux équations

$$(\mathrm{E}) \qquad a\frac{d^n z}{dx^n} + b\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + l = 0,$$

où a, b, ... sont des polynômes en x de degré n, $n-1$, ..., et qui sont des généralisations de l'équation hypergéométrique.

Le succès de la méthode tient à ce que toutes les équations de la suite de M. Cels ont la même forme que (E).

La méthode amène à former une équation algébrique

$$(1) \qquad \begin{cases} (-1)^n \dfrac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \\ \quad + (-1)^{n-1} \dfrac{p(p+1)\dots(p+n-2)}{(n-1)!} + \dots + l = 0, \end{cases}$$

qui joue un rôle prépondérant dans l'intégration de (E). La considération de l'équation (1) permet de reconnaître si (E) a son intégrale générale uniforme dans tout le plan, et alors la méthode de M. Cels permet de trouver cette intégrale.

Dans le cas particulier où toutes les intégrales de l'équation (E) sont régulières autour du point critique ∞, l'équation (1) est l'équation déterminante relative à ce point. Mais dans tous les cas, à la plus petite racine positive entière λ de (1) correspond, pour l'adjointe de Lagrange de la proposée, une solution qui est un polynôme de degré $\lambda - 1$; à la plus petite racine négative entière (en valeur absolue) $-\mu$ correspond une solution de la proposée qui est un polynôme de degré μ.

Voici à quels résultats conduisent ces considérations appliquées à l'équation

$$(x^n - x^{n-1})\frac{d^n z}{dx^n} + (\mathrm{A}x^{n-1} - \mathrm{B}x^{n-2})\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + (\mathrm{L}x - \mathrm{M})\frac{dz}{dx} - \mathrm{N} = 0,$$

déjà étudiée par M. Goursat.

Si a_1, a_2, ..., a_n sont les racines de l'équation déterminante du point ∞ changées de signe et rangées par ordre de grandeur croissante; si b_1, b_2, ..., b_{n-1} sont les racines du point critique 0 rangées aussi par ordre de grandeur croissante : pour que l'intégrale générale de l'équation de M. Goursat soit uniforme dans tout le plan, il faut et il suffit que les a soient des entiers différents ainsi que les b; de plus b_1 doit être compris entre a_1 et a_2, b_2 entre a_2 et a_3, ...

Humbert. — Sur les normales aux quadriques. (963-965).

M. Humbert signale de nombreuses propriétés des vingt-huit tangentes doubles qu'on peut mener d'un point M à la surface lieu des centres de courbure d'une quadrique, propriétés dont nous nous contenterons de citer quelques-unes.

On sait que les vingt-huit tangentes doubles se répartissent en quatre classes :

1° Les six normales N menées de M à la quadrique;

2° Six droites P_1, qui sont sur des paraboloïdes normaux à la quadrique le long de six génératrices d'un même système;

3° Six droites P_2 sur des paraboloïdes normaux le long de six génératrices de l'autre système;

4° Dix autres droites qu'on nomme *synnormales*.

M. Humbert montre que les six normales N, les six droites P_1, et les six droites P_2 sont sur un cône du troisième ordre Σ.

Les trois cônes du deuxième ordre, qui contiennent respectivement les six droites N, les six droites P_1 et les six droites P_2, ont quatre droites communes.

Quand le point M se déplace dans l'espace, le cône du troisième ordre Σ passe constamment par douze points fixes. Ces douze points ϖ, répartis trois à trois sur seize droites, sont ceux où les normales aux ombilics de la quadrique coupent les plans principaux et le plan de l'infini. Par suite, les douze droites qui les joignent à un point quelconque de l'espace sont sur un cône du troisième ordre.

Les points ϖ restent les mêmes pour toutes les quadriques

$$(1) \qquad \frac{x^2}{(z-b)(z-c)} + \frac{y^2}{(z-c)(z-a)} + \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = 1.$$

Les normales à ces quadriques forment un complexe du troisième ordre qui n'est autre que le complexe formé par les génératrices de tous les cônes Σ, et dont le cône est défini par les droites qui joignent un point quelconque de l'espace aux douze points ϖ.

Ce complexe est également celui que forment les génératrices des surfaces (1) et de leurs surfaces homofocales.

Ces trois familles de surfaces forment un système triple orthogonal. Les deux familles homofocales à la famille (1) sont algébriques lorsque le rapport $\dfrac{a-b}{a-c}$ est commensurable.

Lucas (*F.*). — Résolution électro-magnétique des équations. (965-967).

Soit $\varphi(z) = 0$ une équation numérique du degré q.

Traçant sur une feuille de papier deux axes rectangulaires OX, OY, on prend, sur l'axe des X, $(p+1)$ points arbitraires $O_1, O_2, \ldots, O_{p+1}$, d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, et l'on forme le polynôme

$$F(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_{p+1}).$$

On pose ensuite

$$\frac{\varphi(z)}{F(z)} = \sum \frac{\mu_n}{z - x_n},$$

et l'on détermine les paramètres μ_n correspondant respectivement aux points O_n.

Prenant le circuit d'une pile, on y établit une dérivation de $(p+1)$ fils tous de même nature et de même diamètre, dont les longueurs seront inversement proportionnelles aux valeurs absolues des coefficients μ_n. A ces fils, conduisant ainsi des courants dont les intensités sont proportionnelles à μ_n, faisons traverser normalement, aux points O_n, la feuille de papier, en choisissant le sens ascendant ou descendant suivant le signe μ_n.

Le courant créera sur la feuille un champ magnétique dont les lignes de force peuvent être déterminées par de la limaille de fer.

Or les *points neutres du champ* (points où la force magnétique est nulle) seront les *points racines* de $\varphi(z) = 0$.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

1er semestre 1889.

Kronecker (L.). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (*suite*). (53-63).

Nous allons commencer par former un Tableau des notations adoptées par M. Kronecker en montrant comment on peut les ramener aux notations de Jacobi.

Si k, K, K′, sinam, sont les notations mêmes de Jacobi; si $\mathfrak{S}(\zeta, w)$ est la fonction impaire de Jacobi

$$\mathfrak{S}(\zeta, w) = \sum_{(n)} (-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 w\pi i} \sin(2n+1)\zeta\pi,$$

où ζ est un argument quelconque, réel ou imaginaire, et où $w = \frac{K'i}{K}$, de sorte que la partie réelle de wi est négative; si enfin $\mathfrak{S}'(\zeta, w)$ est la dérivée, par rapport à ζ, de $\mathfrak{S}(\zeta, w)$, nous poserons, en envisageant d'une part deux modules k_1, k_2, d'autre part les valeurs correspondantes w_1, w_2 de w et en désignant par σ, τ deux nombres réels quelconques,

$$(1) \qquad \Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2) = (4\pi^2)^{\frac{1}{4}} e^{\tau^2 w_1 w_2 \pi i} \frac{\mathfrak{S}(\sigma - \tau w_1, w_1)\,\mathfrak{S}(\sigma - \tau w_2, w_2)}{[\mathfrak{S}'(0, w_1)\,\mathfrak{S}'(0, w_2)]^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$(2) \qquad \mathrm{E}l\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{w}{2}\right) = \sqrt{k}\,\mathrm{sinam}(2\mathrm{K}\zeta, w).$$

Ces deux fonctions Λ et El sont liées par la relation

$$(3) \qquad \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma - \tau w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right)\mathrm{E}l\left(\frac{\sigma - \tau w_2}{2}, \frac{w_2}{2}\right) = \frac{\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{\Lambda(\sigma, \tau - \frac{1}{2}, w_1, w_2)},$$

qui permet d'exprimer le produit de deux fonctions El par le quotient de deux fonctions Λ.

α, α', α'', β, β', β'' désigneront des nombres entiers tels que l'on ait

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$$

et nous poserons

$$\sigma' = \alpha\sigma - \alpha'\tau - \alpha'',$$

$$\tau' = \beta\sigma - \beta'\tau - \beta''.$$

a_0, b_0, c_0 seront des nombres réels ou imaginaires définis par les relations

$$\frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} = a_0 i, \qquad \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} = b_0 i, \qquad \frac{-1}{w_1 + w_2} = c_0 i,$$

ce qui fait que w_1 et $(-w_2)$ sont les racines de l'équation

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0,$$

où $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$, et que l'on a aussi

$$w_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad w_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0}.$$

Si alors $a'_0 x'^2 + b'_0 x'y' + c'_0 y'^2$ est la forme quadratique transformée de la forme quadratique $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ par la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \alpha' x' + \beta' y', \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0 \alpha^2 + b_0 \alpha\alpha' + c_0 \alpha'^2, \\ b'_0 &= 2a_0 \alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0 \alpha'\beta', \\ c'_0 &= a_0 \beta^2 + b_0 \beta\beta' + c_0 \beta'^2, \end{aligned}$$

nous dirons que les deux systèmes $(\varpi, \tau, a_0, b_0, c_0)$ et $(\varpi', \tau', a'_0, b'_0, c'_0)$ sont *équivalents;* enfin nous désignerons par $w'_1, (-w'_2)$ les deux racines de l'équation

$$a'_0 + b'_0 w + c'_0 w^2 = 0,$$

où $4a'_0 c'_0 - b'^2_0 = 1$, de sorte que

$$w'_1 = \frac{-b'_0 + i}{2c'_0}, \qquad w'_2 = \frac{b'_0 + i}{2c'_0}.$$

Pour abréger nous poserons

$$a_\pi = a_0 \pi, \qquad b_\pi = b_0 \pi, \qquad c_\pi = c_0 \pi;$$

on aura donc $4a_\pi c_\pi - b_\pi^2 = \pi^2$ et l'on voit que la partie réelle de c_π est positive. Ces deux conditions et la condition que deux nombres quelconques donnés $w_1, (-w_2)$ (tels que les parties réelles de $w_1 i$ et de $w_2 i$ soient négatives) vérifient l'équation $a_\pi + b_\pi w + c_\pi w^2$ suffisent pour caractériser les nombres a_π, b_π, c_π.

On dira en particulier que l'équivalence $(\varpi, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\varpi', \tau', a'_0, b'_0, c'_0)$ est une *équivalence complète* lorsque les deux nombres α' et β sont *pairs*. Ces équivalences complètes joueront un grand rôle dans des communications ultérieures.

M. Kronecker démontre d'abord que l'on a

$$(4) \qquad \log \Lambda(\varpi, \tau, w_1, w_2) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\rho=0} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\varpi + n\tau)\pi i}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\rho}},$$

où la somme double Σ est étendue à tous les couples d'entiers positifs nuls ou négatifs excepté le couple $(0, 0)$, et où ρ est supposé réel et positif. Cette for

mule, déjà établie dans les *Sitzungsberichte* de 1883, lorsque a_0, b_0, c_0 sont réels, est étendue au cas général.

Des formules (3) et (4) on déduit

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\log \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma+\tau w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right) \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma-\tau w_2}{2}, \frac{w_2}{2}\right) \\ &\quad = -\lim_{\rho=0} \sum_{(m,\nu)} \frac{e^{(m\sigma+\nu\tau)\pi i}}{(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{1+\rho}}, \end{aligned}\right.$$

où m prend toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives, tandis que ν prend toutes les valeurs entières impaires positives et négatives. En repassant des logarithmes aux nombres on a donc

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}l\left(\frac{\sigma+\tau w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right) \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma-\tau w_2}{2}, \frac{w_2}{2}\right) \\ &\quad = \lim_{\rho=0} \prod_{(m,\nu)} e^{-(a_\pi m^2 + b_\pi m\nu + c_\pi \nu^2)^{-1-\rho}\, e^{(m\sigma+\nu\tau)\pi i}}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule (6) a ceci de remarquable qu'elle met à la fois en évidence les propriétés de *périodicité* et celles qui se rapportent à la *transformation linéaire* de la fonction El. Les propriétés de périodicité de El sont données par les formules

$$\mathrm{E}l\left(\frac{\sigma+1+\tau w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right) = \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma+\tau w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right),$$

$$\mathrm{E}l\left(\frac{\sigma+(\tau+1)w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right) = \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma-\tau w_2}{2}, \frac{w_2}{2}\right),$$

qui montrent que le premier membre de (6) reste invariable lorsque l'on augmente σ et τ, d'entiers quelconques; *chaque facteur* du second membre de (6) reste alors également invariable. La transformation linéaire de El est caractérisée par les formules

$$\sigma' = \alpha\sigma + 2\alpha'\tau, \qquad \tau' = \tfrac{1}{2}\beta\sigma + \beta'\tau, \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

où α, α', β, β' sont des nombres entiers, β pair, α et β' impairs;

$$w_1' = \frac{\alpha w_1 - 2\alpha}{-\frac{1}{2}\beta w_1 + \beta'}, \qquad w_2' = \frac{\alpha w_2 + 2\alpha}{\frac{1}{2}\beta w_2 + \beta'},$$

$$\mathrm{E}l\left(\frac{\sigma'+\tau' w_1'}{2}, \frac{w_1'}{2}\right) = i^{[illegible]}\, \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma+\tau w_1}{2}, \frac{w_1}{2}\right),$$

$$\mathrm{E}l\left(\frac{\sigma'-\tau' w_2'}{2}, \frac{w_2'}{2}\right) = i^{[illegible]}\, \mathrm{E}l\left(\frac{\sigma-\tau w_2}{2}, \frac{w_2}{2}\right).$$

Le premier membre de l'équation (6) reste donc invariable si l'on remplace σ, τ, w_1, w_2 par σ', τ', w_1', w_2', c'est-à-dire $(\sigma, \tau, a_\pi, b_\pi, c_\pi)$ par le système *équivalent* $(\sigma', \tau', a_\pi', b_\pi', c_\pi')$, où $a_\pi' x^2 + b_\pi' xy + c_\pi' y^2$ est la forme transformée de $a_\pi x^2 + b_\pi xy + c_\pi y^2$ par la substitution [illegible]

Chaque facteur du second membre de (6)

$e^{[illegible]}$

est donc identique au facteur du second membre transformé

$$e^{-(a'_\pi m'^2 + b'_\pi m'\nu' + c'_\pi \nu'^2)^{-1-\rho}} \cos 2(m'\sigma' + \nu'\tau')\pi,$$

pour lequel $m' = \beta' m - \frac{1}{2}\beta\nu$, $\nu' = -2\alpha' m + \alpha\nu$.

Si l'on revient aux notations de Jacobi, puis que l'on pose $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$, les formules (5) et (6) donnent immédiatement les relations

$$(5\ bis)\quad \frac{1}{2}\log k_1 k_2 = \lim_{\rho=0}\left[\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{(a_\pi\mu^2 + b_\pi\mu\nu + c_\pi\nu^2)^{1+\rho}} - \sum_{g,\nu}\frac{1}{(a_\pi g^2 + b_\pi g\nu + c_\pi\nu^2)^{1+\rho}}\right],$$

$$(6\ bis)\quad \sqrt{k_1 k_2} = \lim_{\rho=0}\frac{\prod\limits_{\mu,\nu} e^{(a_\pi\mu^2 + b_\pi\mu\nu + c_\pi\nu^2)^{-1-\rho}}}{\prod\limits_{g,\nu} e^{(a_\pi g^2 + b_\pi g\nu + c_\pi\nu^2)^{-1-\rho}}}$$

$$\begin{pmatrix} \mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \\ g = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \end{pmatrix}.$$

a_π, b_π, c_π sont déterminés par

$$a_\pi K_1^2 + b_\pi K_1 K'_1 i - c_\pi K'^2_1 = 0,$$
$$a_\pi K_2^2 - b_\pi K_2 K'_2 i - c_\pi K'^2_2 = 0,$$
$$4a_\pi c_\pi - b_\pi^2 = \pi^2.$$

La dernière formule (6 *bis*) met bien en évidence l'*invariance* de $\sqrt{k_1 k_2}$ pour des transformations linéaires des périodes de la fonction sinam.

Si nous posons en particulier $k_1 = k_2$, nous avons

$$a_\pi = \frac{\pi K'}{2K}, \qquad b_\pi = 0, \qquad c_\pi = \frac{\pi K}{2K'},$$

et (6 *bis*) devient

$$(7)\quad \sqrt{k} = \lim_{\rho=0}\frac{\prod\limits_{\lambda,\mu} e^{\frac{kK'}{\pi}(K'^2\lambda^2 + K^2\mu^2)^{-1-\rho}}}{\prod\limits_{g,\nu} e^{\frac{kK'}{\pi}(K'^2 g^2 + K^2\nu^2)^{-1-\rho}}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \\ g = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \end{pmatrix},$$

formule bien curieuse, qui, pour $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ par exemple, nous donne une représente du nombre entier 2 par un quotient de deux doubles produits infinis

$$(8)\quad 2 = \lim_{\rho=0}\frac{\prod\limits_{g,\nu} e^{\frac{1}{\pi}(g^2 + \nu^2)^{-1-\rho}}}{\prod\limits_{\lambda,\mu} e^{\frac{1}{\pi}(\lambda^2 + \mu^2)^{-1-\rho}}}.$$

D'après un théorème démontré par M. Kronecker dans les *Sitzungsberichte* de 1883, on peut, dans les formules précédentes, poser $\rho = 0$ sous les signes, pourvu que l'on effectue les opérations dans un ordre déterminé. On a ainsi, en posant de nouveau $\varpi = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$, puis $k_1 = k_2$,

$$(9)\quad k^{\frac{\varpi}{2}} = \lim_{r=\infty}\lim_{s=\infty}\prod_{(\mu,\nu)}\frac{e^{kk'(k'^2\mu^2+k^2\nu^2)^{-1}}}{e^{kk'(k'^2(\mu-1)^2+k^2\nu^2)^{-1}}}\quad\left|\begin{array}{l}\mu = \pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(2r-1)\\ \nu = \pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(2s+1)\end{array}\right|,$$

ce qui, pour $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, nous amène à la relation non moins curieuse que la précédente

$$(10)\quad 2^{\varpi} = \lim_{r=\infty}\lim_{s=\infty}\prod_{(m,n)}\frac{e^{\left(m^2+n^2+n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}}{e^{\left(m^2+n^2+m+n+\frac{1}{2}\right)^{-1}}}\quad\left(\begin{array}{l}m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm r\\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s\end{array}\right).$$

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (*suite*). (123-135).

Il s'agit de déterminer la limite, pour $\rho = 0$, de l'expression

$$-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}\qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

dans le cas général où a, b, c sont réels ou imaginaires, mais tels que la partie réelle de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ soit une forme quadratique *positive*. Dans les *Sitzungsberichte* de 1885, la même détermination avait été effectuée par M. Kronecker lorsque a, b, c sont réels et rationnels. Dans le t. XXXIII des *Mathematische Annalen*, M. Weber a, par une méthode toute différente, fait la même détermination dans le cas où a, b, c sont *réels*; il fait usage toutefois comme Lejeune-Dirichlet de la fonction Γ, et ramène le problème à l'invariant de la classe représentée par la forme (a, b, c)

$$\frac{1}{c}\left[\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Voici le résultat obtenu par M. Kronecker.

Si w_1 et $-w_2$ sont les deux racines de l'équation $a + bw + cw^2 = 0$, on a

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&\lim_{\rho=0}\left[-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}\right]\\ &\quad = -2\Gamma'(1) + \log\frac{c}{\sqrt{4ac-b^2}}\\ &\quad\quad - \frac{\pi\sqrt{4ac-b^2}}{6c} - 2\log\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i}),\end{aligned}\right.$$

où $-\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler C. L'invariance de cette limite, pour les formes quadratiques (a, b, c) équivalentes dans le sens de Gauss, est mise en évidence par cette formule importante.

Pour la démontrer, M. Kronecker s'appuie sur la formule de transformation

des fonctions ϑ. En appliquant deux fois cette formule

$$\vartheta\left(\frac{\xi}{w}, -\frac{1}{w}\right) = i\left(\sqrt{-wi}\right) e^{\frac{\xi^2}{w}\pi i}\, \vartheta(\xi w, w),$$

il démontre que l'on a

$$\sum_{m,n} e^{-2\pi u(a_0 m^2 - b_0 mn + c_0 n^2) + 2(m\varsigma + n\tau)\pi i} = \frac{1}{u}\sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u}[a_0(\tau+n)^2 - b_0(\tau+n)(\varsigma+m) + c_0(\varsigma+m)^2]}$$

$$(m,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

où les lettres ont le sens donné dans le Tableau de notations placé au début de ce Compte rendu; ς et τ peuvent même être ici imaginaires; u aussi, mais il faut que la partie réelle de u soit positive. Il montre ensuite que, ς, τ, ρ étant réels et ρ positif, on a

$$(12)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\rho, \varsigma, \tau = 0}\left[\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{2(m\varsigma + n\tau)\pi i}}{f(m,n)} + \log f'(\varsigma, \tau) - \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{m,n}\dfrac{1}{[f(m,n)]^{1+\rho}} + \dfrac{1}{\rho}\right] \\ \quad = 2\Gamma'(1) - 2\log 2\pi, \end{cases}$$

où l'on a écrit pour abréger

$$f(m, n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2 \qquad \text{et} \qquad f'(\varsigma, \tau) = c_0\varsigma^2 - b_0\varsigma\tau + a_0\tau^2,$$

et où les sommes sont étendues à tous les systèmes d'entiers (m, n) à l'exclusion du système (0, 0).

En tenant compte des équations (4) et (1), puis remplaçant a_0, b_0, c_0 par

$$\frac{a}{\sqrt{4ac - b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{4ac - b^2}},$$

et $\vartheta'(0, w)$ par sa valeur

$$2\pi e^{\frac{w\pi i}{4}}\prod_{(m)}(1 - e^{2mw\pi i})^3,$$

on obtient la formule cherchée (11). La relation (12), à laquelle tout se ramène ainsi, est obtenue en suivant la méthode de Lejeune-Dirichlet qui consiste à exprimer les sommes doubles par des intégrales définies, à savoir ici

$$\sum_{m,n}\frac{e^{2(m\varsigma + n\tau)\pi i}}{f(m,n)} = \int_0^1 \sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\varsigma + n\tau)\pi i}\, d\log z,$$

$$\sum_{m,n}\frac{1}{[f(m,n)]^{1+\rho}} = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^1 \sum_{m,n} z^{f(m,n)}\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\rho} d\log z,$$

et exige finalement la détermination de la limite pour $\varsigma = 0$, $\tau = 0$ de l'intégrale logarithmique

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2 f'(\varsigma,\tau)}{\log s}x}\, d\log x,$$

où s est plus grand que 1.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (*suite*). (199-220).

La fonction Λ, définie par la formule (1), peut être envisagée comme le quotient des deux fonctions

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})}\, e^{\sigma^2(w_1+w_2)\pi i}\, \mathfrak{S}(\sigma + \tau w_1, w_1)\, \mathfrak{S}(\sigma - \tau w_2, w_2)$$

et

$$\left[\frac{1}{4\pi^2 c_0(\sqrt{c_0})}\, \mathfrak{S}'(0, w_1)\, \mathfrak{S}'(0, w_2)\right]^{\frac{1}{3}},$$

qui toutes deux sont, comme la fonction $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ elle-même, des invariants analytiques de l'équivalence arithmétique

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0).$$

Si l'on définit une nouvelle fonction Λ' par la relation

$$\text{(13)} \qquad \Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2) = \frac{\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)}{f'(\sigma, \tau)},$$

et si l'on remarque que $f'(\sigma, \tau)$ est un invariant pour tous les systèmes équivalents $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ pour lesquels α'' et β'' sont nuls, on voit que $\Lambda'(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ et, par suite, $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ est un invariant pour toutes les formes (a_0, b_0, c_0) qui se déduisent les unes des autres par des substitutions linéaires et homogènes, à coefficients entiers et à déterminant égal à l'unité.

La fonction $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$ peut être représentée de diverses manières qui mettent bien en évidence ce caractère d'*invariance* et qui montrent en outre la façon dont la fonction se comporte dans le voisinage des limites de son existence. Ces limites sont données par la condition que la partie réelle de $a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$ doit être positive ou, ce qui est la même chose, par la condition que la partie réelle de $w_1 i$ et celle de $w_2 i$ soient toutes deux négatives. On a, en effet,

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) \\ \quad = 4\pi^2 \left[\sum\limits_{(m,n)} (-1)^{(m-1)(n-1)} (a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\, e^{[\text{illegible}]} \right]^{\frac{2}{3}} \\ \quad = 4\pi^2 \left(\sum\limits_{(a_0)} \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2 \pi} \right)^{\frac{2}{3}} \\ \quad = 4\pi^2 e^{\mathrm{E}} \lim\limits_{\rho=0} \prod\limits_{n=1}^{n=\infty} n^{-1-\rho} \prod\limits_{(a_0)} e^{\frac{\pi}{12} a_0^{[\text{illegible}]}} \\ \quad = 4\pi^2 e^{\mathrm{E}} \lim\limits_{\rho=0} \prod\limits_{n=1}^{n=\infty} n^{-1-\rho} \prod\limits_{(m,n)} e^{\frac{1}{2\pi} [\text{illegible}]}. \end{cases}$$

où (m, n) représente tous les systèmes de nombres entiers positifs, nuls ou né-

gatifs, le système (o, o) excepté, et où (a_0) est à remplacer successivement par les premiers coefficients des formes (a_0, b_0, c_0), (a'_0, b'_0, c'_0), ... équivalentes; $\varepsilon_a = (-1)^{\alpha\alpha'+\alpha+\alpha'}$ pour $a'_0 = a_0 x^2 + b_0 xx' + c_0 x'^2$; C est la constante d'Euler; enfin E est défini par la relation

$$\log E = C + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^2}.$$

La dernière des quatre relations (14) montre, par exemple, immédiatement que, dans les limites de son existence, la fonction $\Lambda'(o, o, w_1, w_2)$ est finie et que sa valeur est différente de zéro.

En particulier pour $w_1 = w_2$, on peut représenter $\Lambda'(o, o, w, w)$ par les relations

$$(15)\quad \begin{cases} \Lambda'(o, o, w_1, w_2) \\ \quad = -2w(2\pi)^{\frac{2}{3}} i[\mathfrak{S}'(o, w)]^{\frac{4}{3}} \\ \quad = -8w\pi^2 i e^{\frac{1}{3}w\pi i} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - e^{2nw\pi i})^4 \\ \quad = -4\pi^2 \left[\frac{1}{2KK'} \sum_{(m,n)} (-1)^{(m-1)(n-1)} (K^2 m^2 + K'^2 n^2) e^{-\frac{2\pi}{KK'}(K^2 m^2 + K'^2 n^2)}\right]^{\frac{2}{3}} \\ \quad = 4\pi^2 e^{C} \lim_{\rho=0} \prod_{n=1}^{n=\infty} e^{n^{-1-\rho}} \prod_{(m,n)} e^{-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'} m^2 + \frac{K'}{2K} n^2\right)^{-1-\rho}}, \end{cases}$$

dont les deux premières, qui sont identiques, résultent des équations (1), (13), dont la troisième se déduit de la première relation (14), et dont la quatrième se déduit de la dernière relation (14).

En égalant la première et la troisième de ces relations (15) et en se rappelant que le module complémentaire k' de k est lié à k par la relation

$$kk'(2K)^3 = \pi[\mathfrak{S}'(o, w)]^2,$$

on a

$$(16)\quad kk' = \frac{\pi^3}{8\sqrt{2KK'}} \sum_{(m,n)} (-1)^{(m-1)(n-1)} \left(\frac{m^2}{K'^2} + \frac{n^2}{K^2}\right) e^{-\frac{2\pi}{KK'}(K^2 m^2 + K'^2 n^2)}.$$

De même, en égalant la seconde et la dernière des relations (15), en posant avec Jacobi $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ et en appliquant la formule (36, 4) des *Fundamenta*,

$$(2kk')^{\frac{2}{3}} K^2 = \pi^2 q^{\frac{1}{3}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n})^4,$$ on a

$$(17)\quad \pi^2(2kk')^{-\frac{2}{3}} = e^{C}\, 2KK' \lim_{\rho=0} \prod_{n=1}^{n=\infty} e^{n^{-1-\rho}} \prod_{(m,n)} e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{Km^2}{2K'} + \frac{K'n^2}{2K}\right)^{-1-\rho}}.$$

On a ainsi représenté kk' par une série (16) et par un produit infini (17) qui est bien curieux.

Soient maintenant a, b, c des nombres entiers tels que $\Delta = 4ac - b^2$ soit positif. Le discriminant négatif $\mathfrak{D} = -\Delta$ de la forme (a, b, c) peut être envisagé comme le produit $Q^2\mathfrak{D}_0$ d'un carré Q^2 par le *discriminant fondamental* $\mathfrak{D}_0 = -\Delta_0$ correspondant; un discriminant fondamental ne contient pas de carré en facteur, ou au moins pas de carré tel que le quotient de $\mathfrak{D}$ par ce carré soit congru à 0 ou à 1 modulo 4; ainsi (-4) est un discriminant fondamental. Les seuls groupes de nombres pouvant être discriminants fondamentaux sont

$$\mathfrak{D}_0 = P, \qquad \text{pour} \qquad P \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\mathfrak{D}_0 = 4P, \qquad \text{pour} \qquad P \equiv 1 \pmod 4,$$
$$\mathfrak{D}_0 = 8P, \qquad \text{pour} \qquad P \equiv 1 \pmod 4,$$

où P désigne un produit de nombres premiers tous différents.

Dans la Communication actuelle, M. Kronecker suppose $Q = 1$, de sorte que les formes (a, b, c) qu'il considère sont telles que $b^2 - 4ac$ soit un *discriminant fondamental négatif*. Soit alors

$$K(\mathfrak{D}_0),$$

le nombre de classes différentes de formes (a, b, c) ayant le discriminant $\mathfrak{D}_0$. En utilisant les résultats obtenus dans de précédentes Communications sur les fonctions elliptiques, on démontre que la valeur moyenne du logarithme de l'invariant $\Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)$ pour toutes les classes de formes (a, b, c) ayant le discriminant $\mathfrak{D}_0$, savoir

$$\frac{1}{K(\mathfrak{D}_0)} \sum_{(a,b,c)} \log \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right),$$

est égale à

$$\frac{d \log}{d\rho} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} + C - \log 4\pi^2 - \log\sqrt{\Delta},$$

où C est la constante d'Euler, où $\sqrt{\Delta_0}$ est la valeur absolue de la racine carrée de Δ_0, où enfin le symbole $\left(\frac{-\Delta}{n}\right)$ représente le nombre 0 lorsque Δ et n ont un diviseur commun, tandis que lorsque Δ et n sont premiers relatifs et que $n = 2^\varkappa h$, où h est impair, le même symbole $\left(\frac{-\Delta}{n}\right)$ représente le produit des deux *symboles de Legendre-Jacobi*, $\left(\frac{2^\varkappa}{\Delta}\right)$ et $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$.

On rattache à cette formule celle qui a été donnée par M. Kronecker dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 22 novembre 1886

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{1}{\log n - \log m} \sum \left(\frac{-\Delta}{p}\right) \frac{p \log p}{p - \left(\frac{-\Delta}{p}\right)} = 0, \qquad (m < p < n),$$

où la somme est étendue à tous les nombres premiers depuis m jusqu'à n.

qui exprime que *dans un intervalle assez grand, mais aussi assez éloigné, les sommes des logarithmes des nombres premiers, pour lesquels le symbole* $\left(\frac{\Delta_0}{p}\right)$ *a l'une ou l'autre de ses valeurs* ± 1, *sont sensiblement égales.*

Dans la théorie proprement dite des formes quadratiques, on rencontre déjà la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho},$$

et dans les recherches actuelles c'est cette série, et non pas la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}},$$

qu'il convient de considérer. Le nombre de classes de formes (a, b, c) à discriminant négatif est donné par la formule

$$\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n},$$

où $\alpha = 6$ pour $\Delta_0 = 3$, $\alpha = 4$ pour $\Delta_0 = 4$, et $\alpha = 2$ pour $\Delta_0 > 4$, comme l'a montré Lejeune-Dirichlet dans un Mémoire célèbre sur les *Applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres.* Dans le Mémoire actuel M. Kronecker démontre cette autre formule

$$(18)\quad \frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n} = \mathrm{K}(\mathfrak{D}_0)\lim_{\rho=0}\frac{\partial\log}{\partial\rho}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho},$$

et ces deux expressions

$$\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}$$

ne sont autre chose que le terme constant et le coefficient de ρ dans le développement, suivant les puissances de ρ, de la série citée

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho}.$$

Comme le nombre de classes $\mathrm{K}(\mathfrak{D}_0)$ est toujours positif et au moins égal à 1, la valeur de la série

$$\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}$$

est, elle aussi, toujours positive et au moins égale à 1; ce résultat est un des plus importants parmi ceux que Lejeune-Dirichlet a établis dans ses recherches

arithmétiques. De même, M. Kronecker établit une limite inférieure pour le coefficient de $K(\mathfrak{D}_0)$ dans l'égalité (18), savoir 0,912865; comme $K(\mathfrak{D}_0) \geq 1$, la valeur de la série

$$\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\log\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}$$

est, elle aussi, toujours positive et plus grande que 0,912865, résultat non moins important que le précédent.

Pour obtenir cette limite supérieure du coefficient de $K(\mathfrak{D}_0)$ dans l'égalité (18), M. Kronecker démontre d'abord que ce coefficient peut être mis sous la forme

$$(19)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\rho=0}\dfrac{\partial \log}{\partial\rho}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho} \\ \quad = C - \dfrac{1}{K(\mathfrak{D}_0)}\displaystyle\sum_{(a,b,c)}\log\frac{1}{4\pi^2}\Lambda'\left(0,0,\frac{-b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c},\frac{b+i\sqrt{\Delta_0}}{2c}\right), \end{cases}$$

où C est toujours la constante d'Euler, et c'est le théorème précédent sur la valeur moyenne du logarithme de l'invariant Λ' pour toutes les classes de formes (a, b, c) ayant le discriminant $\mathfrak{D}_0$ qui permet d'obtenir cette formule (19); la somme du second membre est précisément étendue à tous les $K(\mathfrak{D}_0)$ systèmes non équivalents (a, b, c) de classes à discriminant $\mathfrak{D}_0$.

En joignant la formule (18) de M. Kronecker à la formule de Lejeune-Dirichlet qui donne $K(\mathfrak{D}_0)$, on obtient une nouvelle relation qui met bien en évidence l'analogie des deux résultats. Ajoutons, en effet, $K(\mathfrak{D}_0)$ aux deux membres de l'équation (18) multipliés par ρ et tenons compte de (19), et nous voyons que *les deux premiers termes du développement suivant les puissances de* ρ, *de l'expression*

$$\frac{\alpha}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{n}\right)^{1+\rho}$$

peuvent être représentés par l'expression

$$\rho\sum_{(a,b,c)}\log\frac{4\pi^2 e^{\frac{1}{\rho}+C}}{\Lambda'(0,0,w_1,w_2)},$$

où la somme est étendue à toutes les $K(\mathfrak{D}_0)$ classes différentes de formes (a, b, c) à discriminant $\mathfrak{D}_0$, et où w_1, $(-w_2)$ représentent les deux racines de l'équation $a + bw + cw^2 = 0$.

On peut aussi établir maintenant deux limites entre lesquelles se trouve nécessairement la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}.$$

On obtient ainsi pour les discriminants fondamentaux

-11, et -31 par exemple, les valeurs approchées

$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0,3855 + \varepsilon.0,017,$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,2381[illegible] + \varepsilon.0,075,$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-7}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,0166 + \varepsilon.0,001,$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,021266 + \varepsilon.0,00055,$$

$$\frac{\sqrt{11}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-11}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,083629 + \varepsilon.0,00012,$$

$$\frac{\sqrt{31}}{3\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-31}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,451158 + \varepsilon.0,00043,$$

où ε est un nombre compris entre -1 et $+1$.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (Suite). (255-275).

Des relations analogues à celles qui viennent d'être établies pour $Q=1$ ont également lieu lorsque Q est plus grand que 1, mais elles sont alors un peu plus longues à établir, et les démonstrations s'appuient sur des théorèmes d'Arithmétique les uns bien connus, les autres que M. Kronecker se contente d'énoncer, se réservant de les démontrer dans une Communication ultérieure sur les formes quadratiques.

Nous entendrons par ε_n : le nombre o quand le nombre entier n contient un ou plusieurs facteurs premiers égaux, le nombre $+1$ quand le nombre de facteurs premiers, tous différents, contenus dans n est pair, enfin le nombre (-1) quand le nombre de facteurs premiers, tous différents, contenus dans n est impair.

Si t est un diviseur quelconque de Q, nous désignerons par

$$\log M(\sqrt{D}, t),$$

la valeur moyenne du logarithme de l'invariant

$$\frac{4\pi^2}{\Delta(o, o, w_1, w_2)}$$

pour toutes les classes différentes de l'*ordre* du discriminant D, caractérisé par le diviseur t de Q, c'est-à-dire que nous poserons

$$\log M(\sqrt{D}, t) = \frac{1}{K(D/t)}\sum \log\frac{1}{4\pi^2}\Delta(o, o, w_1^{(k)}, w_2^{(k)}).$$

où $w_1^{(k)}$, $(-w_2^{(k)})$ sont les deux racines de l'équation $a_k + b_k w + c_k w^2 = 0$, la somme étant étendue à toutes les classes (a_k, b_k, c_k) de l'ordre du discriminant D caractérisé par t.

Nous désignerons par $\varphi(Q)$ la fonction arithmétique de Gauss qui donne le nombre d'entiers inférieurs et premiers relatifs à Q. Enfin d sera le diviseur de Q, complémentaire de t, de sorte que $td = Q$; on a alors

$$M(\sqrt{D}, t) = M(d\sqrt{D}, 1).$$

Ceci posé, M. Kronecker démontre que l'on a

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha(\Delta)^{\frac{1+\rho}{2}}}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h^{1+\rho}} \\ & \quad = 2\pi \left[1 + \rho \lim_{\rho=0} \frac{\partial \log}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{n}\right]^{1+\rho} \right], \qquad (\mathrm{mod}\ \rho^2), \end{aligned} \right.$$

formule qui, dans le cas particulier de $Q = 1$, représente l'ensemble de la formule de Lejeune-Dirichlet qui donne $K(D_0)$, et de la formule (18) de M. Kronecker. La limite qui paraît dans cette formule peut aussi être représentée par

$$(21)\quad \lim_{\rho=0} \frac{\partial \log}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{n}\right]^{1+\rho} = C + \frac{Q}{\varphi(Q)} \sum_{t} \frac{\varepsilon_t \log M(\sqrt{D}, t)}{t},$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs t de Q, ou, si l'on veut, à tous les diviseurs t de Q n'ayant pas de facteur double, puisque pour ceux des diviseurs t de Q qui ont un facteur double, $\varepsilon_t = 0$; cette formule, dans le cas particulier de $Q = 1$, est la formule (19) de M. Kronecker.

On en déduit pour la valeur moyenne

$$\log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)$$

du logarithme de l'invariant

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\ }(0, 0, w_1, w_2)}$$

pour toutes les classes de l'ordre primitif du discriminant $D_0 Q^2$,

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} & \log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) = \lim_{\rho=0} \frac{\partial \log}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \left[\frac{\Delta}{n}\right]^{1+\rho} - C - \log Q \\ & \qquad - \sum_{i=1}^{i=\nu} \left[1 - \left(\frac{D}{q_i}\right) \right] \frac{q_i^{k_i} - 1}{q_i^{k_i}(q_i - 1)} \frac{\log q_i}{q_i - \left(\frac{D}{q_i}\right)}, \end{aligned} \right.$$

si Q, décomposé en ses facteurs premiers, est égal à

$$Q = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_\nu^{k_\nu}.$$

Pour $Q = 1$, cette formule se réduit à

$$(23)\qquad \log M(\sqrt{\mathfrak{D}_0}, 1) = \lim_{\rho=0} \frac{d\log}{d\rho} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_0}{n}\right) \left[\frac{\Delta_0}{n}\right]^{1+\rho} - C.$$

En comparant les deux formules (22) et (23), on a donc la relation

$$(24)\quad \log\frac{M(\sqrt{\mathfrak{D}}, 1)}{\sqrt{\mathfrak{D}}} + \sum_{i=1}^{i=\nu}\left[1-\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{q_i}\right)\right]\frac{q_i^{r_i}-1}{q_i^{r_i}-q_i^{r_i-1}}\cdot\frac{\log q_i}{q_i-\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{q_i}\right)} = \log\frac{M(\sqrt{\mathfrak{D}_0}, 1)}{\sqrt{\mathfrak{D}_0}},$$

relation fondamentale de laquelle nous allons tirer des conséquences importantes.

Et d'abord le premier membre de cette formule (24) est manifestement un invariant pour tous les discriminants $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 Q^2$ correspondant au même discriminant fondamental $\mathfrak{D}_0$, qui seul paraît dans le second membre.

A l'aide de cette formule (24) nous pouvons aussi *comparer les valeurs moyennes* M *qui correspondent aux différents ordres du même discriminant* $\mathfrak{D}$. Si, pour un diviseur quelconque t de $Q = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0}$, où $\mathfrak{D}_0$ est le discriminant fondamental qui correspond à $\mathfrak{D}$, en décomposant le nombre $\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0 t^2}}$ en ses facteurs premiers, on a

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_0 t^2}} = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_\nu^{r_\nu},$$

et si $K(\mathfrak{D}, t)$ est le nombre de classes de l'ordre caractérisé par t, on déduit, en effet, de la formule (13) que la valeur de l'expression

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{K(\mathfrak{D}, t)} \sum_{(a,b,c)} \left[\frac{\pi\sqrt{\Delta}}{6c} - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{ct} - 2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2nw_1\pi i})(1-e^{2nw_2\pi i})\right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\nu}\left[1-\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{q_i}\right)\right]\frac{q_i^{r_i}-1}{q_i^{r_i}-q_i^{r_i-1}}\cdot\frac{\log q_i}{q_i-\left(\frac{\mathfrak{D}_0}{q_i}\right)}, \end{aligned}\right.$$

où la somme $\sum_{(a,b,c)}$ est étendue à toutes les classes (a, b, c) du discriminant $\mathfrak{D}$ qui font partie de l'ordre correspondant à t, est la même pour chacun des ordres différents du même discriminant $\mathfrak{D}$. Ce résultat doit être ajouté aux théorèmes de Gauss démontrés dans l'article 256 des *Disquisitiones arithmeticæ;* en effet, de ces théorèmes on déduit immédiatement, en désignant par

$$E\left(\frac{\mathfrak{D}}{t^2}\right),$$

l'unité fondamentale $\frac{1}{r}\left(T + u\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{t^2}}\right)$, où $r = 1, 2$ (c'est à dire l'unité telle

que toute autre unité $\frac{1}{r}\left(T' + u'\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{t^2}}\right)$ puisse être représentée par une puissance entière de cette unité fondamentale], que la valeur de l'expression

$$t\,K(\mathfrak{D}, t) \prod \left[1 - \left(\frac{\mathfrak{D}}{q}\right)\frac{1}{q}\right] \log E\left(\frac{\mathfrak{D}}{t^2}\right),$$

où le produit est étendu à tous les facteurs premiers q du nombre $\frac{\mathfrak{D}}{t^2}$, est la même pour chacun des ordres différents du même discriminant $\mathfrak{D}$; et sous cette forme on aperçoit bien l'analogie de ces théorèmes de Gauss et du résultat nouveau obtenu par M. Kronecker.

En désignant, pour abréger, par Φ et Ψ les deux expressions

$$(26)\quad \begin{cases} \Phi(\mathfrak{D}_0 Q^2) = \dfrac{1}{K(\mathfrak{D}_0 Q^2)} \sum\limits_{(a,b,c)} \left(\dfrac{\pi\sqrt{\Delta}}{6c} - \log\dfrac{\Delta}{c}\right) \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{i=\nu} \left[1 - \left(\dfrac{\mathfrak{D}}{q_i}\right)\right] \dfrac{q_i^{r_i} - 1}{q_i^{r_i} - q_i^{r_i - 1}} \, \dfrac{\log q_i}{q_i - \left(\frac{\mathfrak{D}}{q_i}\right)}, \\ \Psi(\mathfrak{D}_0 Q^2) = \dfrac{1}{K(\mathfrak{D}_0 Q^2)} \sum\limits_{(a,b,c)} \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{\Delta}}{c}} \cos\dfrac{nb\pi}{c}, \end{cases}$$

où $Q = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \ldots q_\nu^{r_\nu}$ et où $S_d(n)$ est la somme des diviseurs de n, on peut aussi mettre la relation (25) de M. Kronecker sous la forme

$$(27)\qquad \Phi(\mathfrak{D}_0 Q^2) + \Psi(\mathfrak{D}_0 Q^2) = \Phi(\mathfrak{D}_0 Q_1^2) + \Psi(\mathfrak{D}_0 Q_1^2),$$

où Q et Q_1 sont des entiers quelconques. Sous cette forme on peut en déduire une infinité de relations arithmétiques très remarquables. Pour bien faire saisir le caractère général de ces relations arithmétiques, M. Kronecker, ne considérant que des formes *réduites* (a, b, c) [c'est-à-dire telles que $|b| < a$], met la fonction $\Psi(\mathfrak{D}_0 Q^2)$ sous la forme approchée

$$\Psi(\mathfrak{D}_0 Q^2) = \frac{1}{K(\mathfrak{D}_0 Q^2)} \sum_{(a,b,c)} \sum_{n=1}^{n=h-1} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{\Delta}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} + \varepsilon\,\frac{[illegible]}{K(\mathfrak{D}_0 Q^2)} \sum_{(a,b,c)} [illegible],$$

où ε est un nombre compris entre (-1) et $(+1)$. A l'aide de cette formule, on peut, pour chaque discriminant donné $\mathfrak{D}$, déterminer h de manière que le coefficient de ε puisse être négligé. Mais on peut aussi fixer h une fois pour toutes de manière que, pour toutes les valeurs de $\mathfrak{D}$, le coefficient de ε puisse être négligé pour un degré d'approximation fixé à l'avance. En effet, comme, pour toute forme réduite, on a

$$\frac{\pi\sqrt{\Delta}}{c} \geq \pi\sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

on voit immédiatement que, déjà pour $h = 4$, le coefficient de ε ne peut, quel que soit $\mathfrak{D}$, être plus grand que [illegible].

Nous allons montrer, sur un exemple, comment cette manière approchée de représenter $\Psi(\mathfrak{D}_0 Q^2)$ permet d'écrire autant de relations arithmétiques que l'on veut.

Soit $\mathfrak{D}_0 = -7$. Pour $Q = 1$, $\mathfrak{D} = -7$ et il n'y a qu'une forme réduite $(2, 1, 1)$. On a

$$\Phi(-7) = \frac{\pi\sqrt{7}}{6} - \log 7 = -0,560598\ldots,$$

$$\Psi(-7) = -4e^{-\pi\sqrt{7}} + \ldots = -0,000982\ldots,$$

donc

$$\Phi(-7) + \Psi(-7) = -0,561580\ldots \text{ à } 0,000001 \text{ près.}$$

Pour $Q = 2$, $\mathfrak{D} = -28$ et il n'y a qu'une forme réduite $(7, 0, 1)$. On a

$$\Phi(-28) = \frac{\pi\sqrt{7}}{3} - \log 28 = -0,561580\ldots,$$

tandis que $\Psi(-28) < 0,000001$; donc les deux nombres

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{6} - \log 7 - 4e^{-\pi\sqrt{7}},$$

et

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{3} - \log 7 - \log 4,$$

diffèrent de moins de $0,000001$; il en résulte que l'équation transcendante

$$\frac{x}{24} + e^{-x} = \log\sqrt{2}$$

est vérifiée, à $0,000001$ près, par $x = \pi\sqrt{7}$.

De ce que l'on a *exactement*

$$\Phi(-7) + \Psi(-7) = \Phi(-28) + \Psi(-28),$$

on déduit d'autre part que $x = \pi\sqrt{7}$ vérifie l'équation transcendante

$$\frac{x}{24} = \log \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 - e^{-(2n+1)x}) = \log\sqrt{2};$$

on en conclut, en appliquant la formule (4) de l'article 36 des *Fundamenta*, le résultat bien connu que pour $\frac{K'}{K} = \sqrt{7}$, on a $16\,kk' = 1$, c'est-à-dire

$$k = \frac{3 + \sqrt{7}}{4\sqrt{2}}.$$

En prenant $Q = 3, 4, \ldots$ on trouve d'autres relations arithmétiques. A chaque discriminant fondamental $\mathfrak{D}_0$ en correspondent une infinité.

Kronecker (L.). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (Suite) (309-317).

La fonction $V(\xi, \eta, w_1, w_2)$ qui, par son caractère d'invariance, joue un grand

rôle dans la théorie des fonctions elliptiques, peut être représentée par les relations

$$(28)\qquad \Lambda'(0, 0, w_1, w_2) = \frac{4\pi^2(w_1 - w_2)}{i}\left[\frac{\mathfrak{S}'(0, w_1)\,\mathfrak{S}'(0, w_2)}{4\pi^2}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)}\\ &= 2\pi\left[\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}(a\,m^2 - b\,mn + c\,n^2)\,e^{[illegible]}\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

qui résultent immédiatement des formules (13), (14), et l'on a donc aussi, en tenant compte de (1)

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)\sqrt{\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)}\\ &= 2\pi\sum_{(m,n)}(-1)^{mn+m+n}\,e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi - 2(m\sigma + n\tau)\pi i}, \end{aligned}\right.$$

où les sommes doubles sont étendues, pour m et pour n, de $-\infty$ à $+\infty$. L'ensemble des deux dernières formules, (29) et (30), met particulièrement en évidence le caractère d'invariance des deux fonctions $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ et $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$.

Une autre fonction qui, pour les mêmes raisons que $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$, paraît dans les recherches de M. Kronecker, est la fonction *alpha* définie par la relation

$$(31)\qquad \Lambda(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \left[\frac{2\pi}{\mathfrak{S}'(0, w)}\right]^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma + \tau w)\tau\pi i}\,\mathfrak{S}(\sigma - \tau w, w),$$

où $w = \dfrac{-b_0 + i}{2c_0}$ et où a_0 est défini par $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$.

Les formules connues de transformation de $\mathfrak{S}$ permettent d'écrire facilement les trois relations (32), (33), (34)

$$(32)\qquad \Lambda(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = e^{\left[\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)w - \sigma\tau - \sigma + \frac{1}{2}\right]\pi i}\prod_{(n,\varepsilon)}\left(1 - e^{2(nw + \varepsilon\sigma + \varepsilon\tau w)\pi i}\right),$$

où $\varepsilon = +1, -1$ et où, pour $\varepsilon = +1$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tandis que, pour $\varepsilon = -1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, puis

$$(33)\qquad \Lambda(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0) = e^{\frac{h\pi i}{6}}\,\Lambda(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

où $\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau$, $\tau' = \beta\sigma + \beta'\tau$, $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$,

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2,\\ b'_0 &= 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta',\\ c'_0 &= a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \end{aligned}$$

α, α', β, β' étant des nombres entiers. Le nombre h ne peut avoir que l'une des valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, 6$ de sorte que la douzième puissance de la fonction *alpha* est un invariant pour chacune des transformations linéaires considérées ; enfin

$$(34)\qquad w^2\frac{d^2\Lambda}{d\sigma^2} - 2w\frac{d^2\Lambda}{d\sigma\,d\tau} + \frac{d^2\Lambda}{d\tau^2} = [\,\sigma - \tau w\,]^2\,\Lambda [illegible]$$

La fonction Λ peut être mise sous la forme d'un produit de deux fonctions Λ : on a, en effet,

$$(35)\quad \Lambda\left(\varpi, \tau, \frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right) = \Lambda(\varpi, \tau, a_0, b_0, c_0)\,\Lambda(\varpi, -\tau, a_0, -b_0, c_0).$$

En posant pour un instant

$$R_0(\varpi, \tau, w) = \vartheta_0[2(\varpi+\tau w), 4w], \qquad R_2(\varpi, \tau, w) = \vartheta_2[2(\varpi+\tau w), 4w],$$

$$R_1(\varpi, \tau, w) = R_3(-\varpi, -\tau, w) = e^{\left(\frac{1}{4}w+\varpi+\tau w\right)\pi i}\,\vartheta_3[2(\varpi+\tau w)+w, 4w],$$

on peut mettre la série à double entrée

$$(36)\qquad \sum_{(m,n)} e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi+2(\varpi m+\tau n)\pi i},$$

sous la forme

$$(36\ bis)\qquad \left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right| e^{\frac{\tau^2\pi}{c_0}} \sum_{r=0}^{r=3} R_r(\varpi, \tau, w_1)\,R_r(\varpi, \tau, w_2),$$

et cette relation (36) est analogue à la relation établie dans les *Sitzungsberichte* de 1883

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{-(w_1+w_2)i}\,e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\varpi+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\varpi-\tau w_2, w_2)\\ &\quad=\sum_{(m,n)}(-1)^{mn+m+n}e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi+2(m\varpi+n\tau)\pi i}, \end{aligned}\right.$$

dont on fait usage pour établir la relation (30). Ces relations importantes ramènent des ϑ de Rosenhain à des ϑ de Jacobi et sont d'un usage fréquent. Ainsi pour $\varpi=\tau=0$, la relation (36) devient

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{(m,n)} e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi}\\ &\quad=\left|\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right|\left[\tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, w_1)\,\vartheta_2(0, w_2)\right.\\ &\qquad\left.+\vartheta_2(0, 4w_1)\,\vartheta_2(0, 4w_2)+\vartheta_3(0, 4w_1)\,\vartheta_3(0, 4w_2)\right]. \end{aligned}\right.$$

L'expression formée si simplement dans le second membre à l'aide des fonctions $\vartheta(0)$ a donc le même caractère d'invariance que la fonction $\Lambda'(0, 0, w_1, w_2)$; elle reste invariable lorsqu'on substitue à la forme (a_0, b_0, c_0) une quelconque des formes équivalentes (a'_0, b'_0, c'_0) et que l'on pose ensuite

$$w'_1 = \frac{-b'_0-i}{2c'_0}, \qquad w'_2 = \frac{b'_0+i}{2c'_0}.$$

En tenant compte d'autre part de la relation connue

$$\vartheta'_1(0) = \pi\,\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),$$

on a aussi, d'après (13) et (14),

$$(39)\qquad \frac{1}{\pi}\sqrt[8]{\Delta'(0,0,\varpi_1,\varpi_2)} = \left|\sqrt{\frac{1}{c_i}}\right| \mathfrak{S}_{i}(0,\varpi_1)\,\mathfrak{S}_{i}(0,\varpi_2)\,(4k_1k'_1k_2k'_2)^{\frac{1}{\cdot}}.$$

où k_1, k'_1 désignent le module et le module complémentaire correspondants à ϖ_1 et de même k_2 et k'_2 le module et le module complémentaire correspondants à ϖ_2.

Dans les *Sitzungsberichte* de 1883 on a établi la formule fondamentale

$$\Delta(0,0,\varpi_1,\varpi_2)\left[\Sigma(-1)^{m-1+n-1} f(m,n)\, e^{-\pi f(m,n)}\right]^{\frac{1}{3}} = -\Sigma(-1)^{[illegible]} [illegible]$$

Les deux relations (38) et (39) que nous venons d'établir nous permettent d'écrire cette formule importante

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[4\sum_{(m,n)}(-1)^{m-1+n-1} f(m,n)\,e^{-\pi f(m,n)}\right]^{\frac{1}{3}} \sum_{m,n} e^{-\pi f(m,n)}\\ &= \frac{1+\sqrt{k_1k_2}+\sqrt{k'_1k'_2}}{2(k_1k'_1k_2k'_2)^{\frac{1}{6}}},\end{aligned}\right.$$

où, comme précédemment, on a écrit $f(m,n)$ pour $a\,m^2 + b\,mn + c\,n^2$, et où $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, et c'est sous cette forme qu'il en sera fait usage plus tard.

En transformant d'une façon analogue le produit

$$e^{\pi 2(\varpi_1+\varpi_2)\tau\pi i}\,\mathfrak{S}_1(\sigma+\tau\varpi_1,\varpi_1)\,\mathfrak{S}_0(\sigma-\tau\varpi_2,\varpi_2),$$

et tenant toujours compte des développements effectués dans les *Sitzungsberichte* de 1883, et en se rappelant enfin la définition (2) de la fonction El, on obtient la relation non moins importante

$$(41)\qquad El\left(\frac{\sigma+\tau\varpi}{2},\ \frac{\varpi}{2}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{\nu,n}(-1)^n i^{[illegible]} e^{-\pi f\left(\frac{\nu}{2},n\right)+2\left(\frac{\nu\sigma}{2}[illegible]\right)\pi i}}{\displaystyle\sum_{m,n}(-1)^{m+n} e^{-\pi f(m,n)+2[illegible]\pi i}},$$

où ϖ est celle des racines de l'équation $f(1,\varpi)=0$ dont le coefficient de i est positif, et où $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ tandis que $\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

Thiesen (M.). — Théorie d'oscillations semblables à celles du pendule. (277-288).

Il s'agit du mouvement défini par l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \mu^2\theta = \Gamma + X,$$

où θ est l'angle qui détermine la position d'un corps oscillant comme un pendule composé, à l'instant t, où λ et μ sont des constantes, où Γ est une fonction de t, où X enfin est une fonction de t, θ et $\frac{d\theta}{dt}$ qui, ainsi que ses dérivées, peut être envisagée comme une grandeur petite et du premier ordre.

M. M. Thiesen intègre cette équation différentielle, par approximation, en négligeant les termes du troisième ordre. Il signale la raison pour laquelle M. Chwolson a cru que le problème, résolu ici dans une *seconde* approximation, ne pouvait même pas être résolu dans une *première* approximation.

Il calcule en particulier les temps de passage par la position moyenne et par les positions extrêmes où θ est maximum; ce sont les différences de ces temps que l'on peut mesurer avec une grande approximation.

Enfin il applique les résultats obtenus au mouvement d'un pendule dans un milieu résistant suivant la loi $av + av^2$, lorsqu'à la pesanteur s'ajoutent des forces extérieures dépendant de θ, par suite, par exemple, du mode de suspension du pendule.

Kronecker (*L.*). — Sur les systèmes symétriques. (349-362).

Soit un système *symétrique*

$$(z_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire tel que l'on ait $z_{ik} = z_{ki}$ pour tous les couples d'indices

$$i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Désignons par Z_1 le déterminant

$$Z_1 = |z_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et par Z_m le *mineur principal*

$$Z_m = |z_{ik}| \qquad (i, k = m, m+1, \ldots, n),$$

de sorte que l'on a

$$Z_2 = \frac{\partial Z_1}{\partial z_{11}}, \qquad Z_3 = \frac{\partial Z_2}{\partial z_{22}} = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z_{11}\,\partial z_{22}}, \qquad \ldots, \qquad Z_n = z_{nn}.$$

Nommons, pour abréger, *point* de la variété d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$, chaque système symétrique (z_{ik}), et *point principal* de cette variété tout point dont les $\frac{n(n+1)}{2}$ *coordonnées* z_{ik} sont

$$\begin{aligned} z_{ik} &= 0, &\text{pour}\quad & i \gtrless k,\\ z_{kk} &= -1, &\text{pour}\quad & k = 1, 2, \ldots, \nu,\\ z_{kk} &= +1, &\text{pour}\quad & k = \nu+1, \nu+2, \ldots, n; \end{aligned}$$

il y a manifestement $n+1$ points principaux, *un* pour chacune des $(n+1)$ valeurs de ν,

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

M. Kronecker montre d'abord qu'il y a *au moins un* point principal dans chacun des domaines connexes formés par la variété d'ordre $\frac{n(n+1)}{2} - 1$

$$Z_1 = 0,$$

dans la variété totale d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$.

Si l'on envisage ensuite la fonction arithmétique

$$\operatorname{sgn}(Z_1 Z_2) + \operatorname{sgn}(Z_2 Z_3) + \ldots + \operatorname{sgn}(Z_{n-1} Z_n) + \operatorname{sgn}(Z_n),$$

où sgn(α) désigne l'unité positive ou l'unité négative suivant que le signe de α est positif ou négatif, il est bien aisé de voir que la valeur de cette fonction est différente pour chacun des $(n+1)$ points principaux. M. Kronecker démontre que cette fonction ne change de valeur que lorsque le point (z_{ik}) de la variété totale considérée, en se déplaçant, franchit la variété $Z_1 = 0$; quand le point traverse la variété $Z_1 = 0$ en un point non singulier, la fonction arithmétique varie d'ailleurs de deux unités. Il en résulte que l'*on ne peut pas* passer d'une façon continue d'un point principal à un autre sans traverser la variété $Z_1 = 0$.

Il y a donc *au plus un* point principal dans chacun des domaines connexes formés par la variété $Z_1 = 0$ dans la variété totale considérée.

En réunissant les deux résultats ainsi obtenus, on voit donc qu'il y a *précisément un* point principal dans chacun des domaines connexes formés par la variété $Z_1 = 0$ dans la variété totale considérée. Chaque point principal caractérise ainsi un de ces domaines connexes; il y a donc $(n+1)$ domaines connexes.

Ainsi *la variété* $Z_1 = 0$ *partage la variété totale* (z_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ *en* $n+1$ *domaines connexes.*

Si, au lieu du système *symétrique* (z_{ik}), on envisage un système *non-symétrique* y_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, on démontre de même que la variété d'ordre (n^2-1), définie par

$$|y_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

partage la variété totale d'ordre n^2, (y_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, en *deux* domaines connexes seulement; dans l'un de ces deux domaines le déterminant $|y_{ik}|$ a une valeur positive, dans l'autre sa valeur est négative.

2e semestre 1889.

Kronecker (*L.*). — Décomposition des systèmes de n^2 éléments et application de cette décomposition à la théorie des invariants. (479-505).

Nous fixerons d'abord les notations suivantes :

(δ_{ik}) est le système de n^2 éléments pour lequel

$$\delta_{11} = -1; \qquad \delta_{hh} = 1 \quad (h = 2, 3, \ldots, n); \qquad \delta_{ik} = 0 \quad (i \gtrless k);$$

(ε_{ik}) est un système de n^2 éléments pour lequel

$$\varepsilon_{11} = 0; \qquad \varepsilon_{hh} = 1 \quad (h = 2, 3, \ldots, n); \qquad \varepsilon_{ik} = 0 \quad (i \gtrless k);$$

$(d_{ik}^{(2)}(t))$ est un système de n^2 éléments pour lequel

$$d_{11}^{(2)}(t) = t; \qquad d_{22}^{(2)}(t) = \frac{1}{t};$$

$$d_{hh}^{(2)}(t) = 1 \quad (h = 3, 4, \ldots, n); \qquad d_{ik}^{(2)}(t) = 0 \quad (i \gtrless k);$$

$(a_{ik}^{(r)}(t))$ est un système de n^2 éléments pour lequel

$$a_{hh}^{(r)}(t) = 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, n); \qquad a_{1r}^{(r)}(t) = t;$$

$$a_{1h}^{(r)}(t) = 0 \quad (h = 2, 3, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n); \qquad a_{ik}^{(r)}(t) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \\ i \gtrless k \end{pmatrix};$$

$(b_{ik}^{(r)}(t))$ est un système de n^2 éléments pour lequel

$$b_{hh}^{(r)}(t) = 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, n); \qquad b_{r1}^{(r)}(t) = t;$$

$$b_{ri}^{(r)}(t) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n); \qquad b_{ik}^{(r)}(t) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \\ i \gtrless k \end{pmatrix};$$

$(c_{ik}^{(r)})$ est un système de n^2 éléments pour lequel

$$c_{1i}^{(r)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n); \qquad c_{1r}^{(r)} = -1,$$

$$c_{ri}^{(r)} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n); \qquad c_{r1} = 1; \qquad c_{hh}^{(r)} = 1 \quad (h = 2, 3, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n),$$

$$c_{ik}^{(r)} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 2, 3, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n \\ k = 2, 3, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n \\ i \gtrless k \end{pmatrix}.$$

Rappelons aussi que l'on nomme *invariant* d'un système de formes homogènes de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toute fonction F des coefficients de ces formes qui conserve la même valeur lorsqu'on y remplace les coefficients par les coefficients correspondants des formes transformées par toutes les substitutions linéaires à déterminant $+1$.

Un *invariant absolu* conserve la même valeur lorsque l'on y remplace les coefficients des formes considérées par les coefficients des formes transformées par toutes les substitutions linéaires (quel que soit le déterminant de ces substitutions linéaires).

Dans le Mémoire actuel M. Kronecker démontre les théorèmes suivants :

Théorème I. — « Tout système (η_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, de n^2 éléments η_{ik}, à déterminant $|\eta_{ik}|$ positif, peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(r)}(t)), \quad (c_{ik}^{(r)}), \quad (\varepsilon_{ik}) \qquad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

» Lorsque le déterminant $|\eta_{ik}|$ est négatif, il faut encore ajouter, soit au commencement, soit à la fin des systèmes composants, le système (δ_{ik}). »

Théorème II. — « Tout système (η_{ik}) de n^2 éléments η_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, à déterminant $|\eta_{ik}|$ positif, peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(r)}(t)), \quad (b_{ik}^{(r)}(1)), \quad (\varepsilon_{ik}), \qquad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

» Lorsque le déterminant $|\eta_{ik}|$ est négatif, il faut encore ajouter, soit au commencement, soit à la fin des systèmes composants, le système (δ_{ik}). »

Théorème III. — « Tout système (η_{ik}) de n^2 éléments η_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, à déterminant positif, peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(2)}(1)), \quad (c_{ik}^{(r)}), \quad (\varepsilon_{ik}) \qquad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

» Lorsque le déterminant $|\eta_{ik}|$ est négatif, il faut encore ajouter le système composant (δ_{ik}). »

Par exemple, pour $n = 2$, on peut envisager le système $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ comme composé des seize systèmes qui rentrent effectivement dans les trois types précédents

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix}\frac{\gamma}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{\alpha\delta}{\gamma} - \beta & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\beta & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\beta} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Théorème IV. — « Tout système (η_{ik}), à déterminant positif, peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(r)}(1)), \quad (b_{ik}^{(r)}(-1)), \quad (\varepsilon_{ik}) \qquad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

» Lorsque le déterminant est négatif il faut ajouter le système composant (δ_{ik}). »

On déduit des deux théorèmes III et IV ce corollaire important :

« Une fonction F des n^2 éléments d'un système (η_{ik}), composé des deux systèmes (x_{ik}), (y_{ik}), n'est indépendante de l'*ordre* suivant lequel on compose les deux systèmes (x_{ik}), (y_{ik}), que si F ne dépend que du déterminant $|\eta_{ik}|$ du système (η_{ik}). »

Théorème V. — « Tout système (η_{ik}) dont les éléments η_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ sont réels et dont le déterminant $|\eta_{ik}|$ est égal à 1 peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(2)}(1)), \quad (c_{ik}^{(r)}), \quad (d_{ik}^{(r)}) \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

dont les éléments sont aussi réels. »

On déduit de ce théorème qu'une fonction F des coefficients d'un système de formes homogènes de n variables est un *invariant*, lorsque la valeur de F ne change pas quand on y remplace les coefficients du système par les coefficients correspondants des systèmes transformés par chacune des $(n + 1)$ substitutions

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2, \quad x_h = x'_h & (h > 1), \\ x_1 = -x'_r, \quad x_r = x'_1, \quad x_h = x'_h & (h \gtrless 1, h \gtrless r; r = 2, 3, \ldots, n), \\ x_1 = t x'_1, \quad x_2 = \frac{1}{t} x'_2, \quad x_h = x'_h & (h > 2). \end{cases}$$

Pour que F soit un invariant, il *faut* d'ailleurs (en faisant abstraction du cas d'une seule forme de deux variables) que la valeur de F ne change pas

pour les $(n+1)$ *transformations* correspondant aux substitutions (1); aucune de ces $(n+1)$ conditions n'est superflue.

Théorème VI. — « Tout système (η_{ik}) dont les éléments sont réels et dont le déterminant est égal à 1 peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(2)}(t)), \quad (b_{ik}^{(2)}(t)), \quad (c_{ik}^{(r)}) \qquad (r = 3, 4, \ldots, n),$$

dont les éléments sont réels. »

On en déduit que F est un *invariant* quand sa valeur ne change pas pour les n transformations qui résultent des n substitutions

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + t x'_2, & x_h = x'_h \qquad (h = 2, 3, \ldots, n), \\ x_2 = t x'_1 + x'_2, & x_h = x'_h \qquad (h = 1, 3, 4, \ldots, n), \\ x_1 = x'_r, \quad x_r = x'_1, & x_h = x'_h \qquad (h > 1, h \neq r, r = 3, 4, \ldots, n). \end{cases}$$

Aucune de ces n conditions n'est d'ailleurs superflue.

Théorème VII. — « Tout système (η_{ik}) dont les éléments sont réels et dont le déterminant est égal à 1 peut être envisagé comme résultat de la composition de systèmes

$$(a_{ik}^{(r)}(t)), \quad (b_{ik}^{(r)}(t)) \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

dont tous les éléments sont réels. »

On en déduit que F est un *invariant* quand sa valeur ne change pas pour les $2n-2$ transformations qui résultent des $2n-2$ substitutions

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + t x'_r, & x_h = x'_h \quad (h > 1) \\ x_r = t x'_1 + x'_r, & x_h = x'_h \quad (h \neq r) \end{cases} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

Aucune de ces $2n-2$ conditions n'est d'ailleurs superflue.

Théorème VIII. — « Tout système à déterminant Δ peut être envisagé comme résultat de la composition d'un système à déterminant 1 et d'un système (ε_{ik}) dont le premier élément $\varepsilon_{11} = \Delta$. »

On en déduit que tout *invariant* F prend une seule et même valeur pour toutes les transformations résultant des diverses substitutions linéaires ayant même déterminant Δ.

Théorème IX. — « Pour qu'une fonction *rationnelle* R des coefficients

$$C_{p_1, p_2, \ldots, p_n}^{(q)} \qquad \left(\begin{array}{c} p_1, p_2, \ldots, p_n = 0, 1, 2, \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right).$$

d'un système de fonctions homogènes de dimensions $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$

$$\sum_{p_1, p_2, \ldots, p_n} C_{p_1, p_2, \ldots, p_n}^{(q)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \qquad \left(\begin{array}{c} p_1, p_2, \ldots, p_n = 0, 1, 2, \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right)$$

soit un *invariant* de ce système de fonctions, il *suffit* que la fonction R ne change pas de valeur pour les transformations du système de fonctions résultant des substitutions (1), ou (2), ou (3), *pour* $t = 1$. »

Dans la décomposition des systèmes de n^2 éléments en systèmes composants, il importe peu que l'on ait un type de plus ou de moins de systèmes composants; ce sont les *propriétés* de ces systèmes composants qui importent. On s'en aperçoit bien vite dans les applications. Par exemple, lorsque l'on veut démontrer la connexité des systèmes dont le déterminant a le même signe, il est naturel de commencer par décomposer les systèmes suivant les $(2n-2)$ types (3) et non pas suivant les n types (1), quoique $2n-2$ soit plus grand que n. De même, lorsque l'on veut établir les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les invariants de systèmes de formes données, c'est encore la décomposition suivant les $(2n-2)$ types (3) que l'on utilise.

En général, chaque application que l'on veut faire de la décomposition des systèmes détermine le genre de décomposition qu'il convient d'employer. On peut toutefois établir en principe qu'il est avantageux que chaque transformation s'étende à aussi peu de variables que possible. Aussi, dans les modes de décomposition dont il est question dans ce Mémoire, les systèmes composants sont-ils choisis tels que les diverses transformations ne portent chacune que sur *deux* variables. Il est bien évident que le nombre des systèmes composants ne peut, dans ces conditions, être inférieur au nombre des variables. Qu'on puisse les réduire à un nombre moindre en abandonnant le principe cité est certain; mais cela n'a aucun intérêt.

L. Kronecker. — Décomposition des systèmes de n^2 éléments et application de cette décomposition à la théorie des invariants (suite). (603-614).

Les invariants $J(\dots C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots, p_n} \dots)$ d'un système de formes

$$\sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \dots, p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \qquad \begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots, p_n = 0, 1, 2, \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = \nu_q \\ q = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

peuvent être caractérisés par les $(2n-2)$ équations aux dérivées partielles

$$\sum_{p_1, p_2, \dots, p_n, q} \{(1+\varepsilon)p_1 + (1-\varepsilon)p_r + 1\} \times C_{p_1+\varepsilon, \dots, p_{r-1}, p_r-\varepsilon, p_{r+1}, \dots, p_n} \frac{\partial J}{\partial C_{p_1, p_2, \dots, p_n}} = 0$$

que l'on obtient *directement* en utilisant les résultats déduits du théorème VII dans la Communication précédente. Dans ces équations il faut prendre successivement $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$; il faut aussi prendre successivement $r = 2, 3, \dots, n$; elles sont donc bien au nombre de $2n-2$. La somme est étendue aux valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n = 0, 1, 2, \dots$ telles que l'on ait simultanément

$$p_1 + \varepsilon \geq 0, \qquad p_r - \varepsilon \geq 0, \qquad p_1 + p_2 + \dots + p_n = \nu_q.$$

et aussi aux valeurs de q

$$q = 1, 2, 3, \ldots$$

qui correspondent aux diverses formes du système considéré.

Si au lieu des invariants $J(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \ldots)$ on envisage les *invariants absolus* $\mathfrak{J}(\ldots C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}, \ldots)$, il faudra, pour les caractériser, ajouter aux $2n-2$ équations aux dérivées partielles précédentes, dans lesquelles on a écrit $\mathfrak{J}$, au lieu de J, l'équation

$$\sum_{(p_1, p_2, p_n, \ldots, q)} p_1 C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial C^{(q)}_{p_1, q_2, \ldots, p_n}} = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} p_1, p_2, \ldots, p_n = 0, 1, 2, \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q \\ q = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right).$$

Ces $(2n-1)$ équations partielles remplacent entièrement les n^2 équations établies par Aronhold dans le tome 62 du *Journal de Crelle*, p. 293 et 309. On observera que leur nombre est bien moindre, mais *surtout* que chacune d'entre elles a, par elle-même, une signification bien déterminée; chacune exprime le fait de l'invariance de la fonction des coefficients du système de formes considérées pour l'une des transformations fondamentales (3). On observera aussi que cette réduction des n^2 équations d'Aronhold à $2n-1$ équations montre la raison des relations entre les n^2 équations données par Aronhold lui-même. Enfin on observera que les équations aux dérivées partielles, qui sont au nombre de $2n-2$ pour J, de $2n-1$ pour $\mathfrak{J}$, sont toutes *nécessaires* pour caractériser ces invariants; aucune d'elles ne peut être laissée de côté.

Si nous appliquons les théorèmes généraux qui précèdent et qui concernent des systèmes de formes quelconques à des systèmes de formes linéaires

$$\sum_{(k)} C_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et si nous observons que, dans ce cas, une fonction des coefficients C_{ik} ne peut être un *invariant* que si elle est fonction du déterminant

$$| C_{ik} | \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

nous voyons, en appliquant le corollaire (1) du théorème V, que *toute fonction des n^2 coefficients*

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

qui ne varie pas :

1° Lorsque l'on ajoute la première colonne à la seconde;

2° Lorsque l'on remplace la première colonne par une quelconque des autres colonnes, en remplaçant simultanément cette dernière par la première colonne changée de signe;

3° Lorsque l'on multiplie la première colonne par un nombre quelconque t et que l'on divise simultanément la seconde colonne par le même nombre t,

ne peut être qu'une fonction du déterminant $| C_{ik} |$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

En appliquant, de même, le corollaire (3) du théorème VII, on voit que *toute fonction des n^2 coefficients C_{ik} qui ne varie pas :*

1° Lorsque l'on ajoute t fois la première colonne à une autre colonne quelconque;

2° Lorsque l'on ajoute à la première colonne une quelconque des suivantes multipliée par t,

ne peut être qu'une fonction du déterminant

$$|C_{ik}|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Une fonction des n^2 éléments C_{ik}

$$\Phi(C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{nn}),$$

est donc caractérisée comme fonction du déterminant $|C_{ik}|$, par les $2n-2$ équations aux dérivées partielles

$$\sum_{(i)} C_{i1} \frac{\partial \Phi}{\partial C_{ik}} = 0, \qquad \sum_{(i)} C_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial C_{i1}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 2, 3, \ldots, n).$$

Envisageons maintenant une fonction $\Phi(C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{nn})$ des n éléments C_{ik}, entière, linéaire et homogène en

$$C_{11}, \quad C_{21}, \quad C_{n1},$$

qui, lorsqu'on permute ces éléments avec les éléments

$$C_{1i}, \quad C_{2i}, \quad \ldots, \quad C_{ni},$$

pour l'un quelconque des indices $i = 2, 3, \ldots, n$, prend une valeur égale mais de signe contraire, et qui est égale à 1 pour

$$C_{hh} = 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad C_{ik} = 0 \quad (i \gtrless k).$$

Cette fonction Φ ne peut être que le déterminant $|C_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ et l'on démontre pour cette fonction Φ, sans aucune peine, le théorème de multiplication des déterminants ainsi que la représentation de Φ par une somme

$$(4) \qquad \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n} C_{i_1, 1} C_{i_2, 2} \ldots C_{i_n, n} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, n),$$

où, en désignant par $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn})$ un système fixe arbitrairement une fois pour toutes, la valeur de $\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ peut être mise sous la forme

$$\varepsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \frac{|A_{hi}|}{|A_{hk}|} \qquad \begin{pmatrix} i = i_1, i_2, \ldots, i_n \\ h = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'à l'aide d'*un seul* déterminant, choisi à volonté, on peut représenter *chaque* déterminant comme somme de n monômes.

Si l'on choisit pour déterminant $|A_{ik}|$ celui que Cauchy a pris comme point de départ de ses développements sur les déterminants, à savoir

$$|x_i^{h-1}| \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n),$$

où x désigne une indéterminée, on peut écrire l'équation (4)

$$(5)\qquad |x_k^{h-1}|\,|C_{hk}| = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} |x_i^{h-1}|\, C_{i_1,1} C_{i_2,2} \ldots C_{i_n,n},$$

où dans le premier membre ($h, k = 1, 2, \ldots, n$), tandis que dans le second membre ($h = 1, 2, \ldots, n$; $i = i_1, i_2, \ldots, i_n$), ($i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, n$), ou encore

$$(6)\qquad |C_{hk}| \prod_{(r,s)} (x_s - x_r) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \prod_{(r,s)} (x_{i_s} - x_{i_r}) \prod_{(t)} C_{i_t t},$$

où dans le premier membre ($h, k = 1, 2, \ldots, n$), tandis que dans le second membre ($r, s, t = 1, 2, \ldots, n$; $r < s$), ($i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, n$).

C'est cette formule (6) que M. Schering a établie en se plaçant à un point de vue différent de celui de M. Kronecker. On déduit sans peine de cette formule (6) les propriétés des déterminants; il semble cependant que la formule plus générale (4) de M. Kronecker ait sur cette formule (6) quelques avantages.

Fuchs (*L.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires (suite). (713-726).

Dans le t. 71 du *Journal de Crelle,* M. Fuchs a montré que les modules de périodicité de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$, où

$$(1)\qquad \varphi(z) = (z - x)(z - k_1)(z - k_2)(z - k_3)(z - k_4),$$

vérifient l'équation

$$(2)\quad \psi(x)\frac{d^4 y}{dx^4} + 3\psi'(x)\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{25}{8}\psi''(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{5}{4}\psi'''(x)\frac{dy}{dx} + \frac{15}{128}\psi^{\text{IV}}(x)\,y = 0$$

où $\psi(x) = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)(x - k_4)$ et où $\psi^{\alpha}(x) = \frac{d^{\alpha}\psi}{dx^{\alpha}}$.

En désignant, pour $i = 1, 2, 3, 4$, par y_i le système (x, k_i), et en posant pour abréger

$$(\lambda, \mu) = y_\lambda \frac{dy_\mu}{dx} - y_\mu \frac{dy_\lambda}{dx},$$

les six fonctions de x

$$(1, 2),\quad (1, 3),\quad (1, 4),\quad (2, 3),\quad (2, 4),\ (3, 4)$$

vérifient une équation différentielle

$$(3)\quad \frac{d^6 u}{dx^6} + Q_1 \frac{d^5 u}{dx^5} + Q_2 \frac{d^4 u}{dx^4} + Q_3 \frac{d^3 u}{dx^3} + Q_4 \frac{d^2 u}{dx^2} + Q_5 \frac{du}{dx} + Q_6 u = 0,$$

dont les coefficients Q sont des fonctions rationnelles de x et de k_1, k_2, k_3, k_4; et cette équation est nécessairement *réductible.* On peut le voir soit en appliquant au cas particulier actuel les considérations générales contenues dans les *Sitzungsberichte* de 1888 (voir *Bulletin,* juillet, t. XVI, p. 109), soit en ob

servant que l'intégrale particulière

$$(4) \qquad w = (1, 2) - (1, 3) + (1, 4) + (2, 3) - (2, 4) + (3, 4)$$

de l'équation (3) est une fonction *rationnelle* de x.

Désignons par η une intégrale d'une équation différentielle appartenant à la même classe que l'équation (2), de sorte que l'on a

$$(5) \qquad \eta = \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \varphi_2 y'' + \varphi_3 y'''$$

où chaque coefficient φ_λ est fonction rationnelle de x et de $y' = \frac{dy}{dx}$, et posons, pour abréger,

$$[\lambda, \mu] = y_\lambda \eta_\mu - y_\mu \eta_\lambda.$$

Alors $y_1 y_2''' - y_2 y_1'''$ peut être mis sous la forme

$$P_0 [1, 2] + P_1 \frac{d}{dx}[1, 2] + P_2 \frac{d^2}{dx^2}[1, 2]$$
$$+ P_3 \frac{d^3}{dx^3}[1, 2] + P_4 \frac{d^4}{dx^4}[1, 2] + P_5 \frac{d^5}{dx^5}[1, 2],$$

où P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 sont des fonctions rationnelles déterminées de x. Si l'on désigne, pour abréger, par w_1 la fonction

$$(6) \qquad w_1 = [1, 2] - [1, 3] + [1, 4] + [2, 3] - [2, 4] + [3, 4],$$

on peut mettre w_1 sous la forme

$$(7) \quad w_1 = (\varphi_1 + P_0 \varphi_3) w + (\varphi_2 + P_1 \varphi_3) w' + P_2 \varphi_3 w'' + P_3 \varphi_3 w''' + P_4 \varphi_3 w^{(4)} + P_5 \varphi_3 w^{(5)},$$

et w_1 est donc une fonction *rationnelle* de x.

En faisant varier φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, l'intégrale η représentera *tous* les modules de périodicité des intégrales de première et de deuxième espèce; donc les équations (4) et (6) représentent *toutes* les relations entre les modules de périodicité. Ces relations, que l'on établit dans la théorie des fonctions abéliennes en se plaçant à un tout autre point de vue, sont ainsi déduites du fait que l'équation (3) est *réductible*.

On peut en particulier déterminer φ_1, φ_2, φ_3 de manière que le second membre de l'équation (7) soit égal à zéro. Les fonctions $[\lambda, \mu]$ sont en général des intégrales d'une équation différentielle du *sixième* ordre faisant partie de la même classe que l'équation (3); cette équation se réduit au *cinquième* ordre pour ce choix particulier de φ_1, φ_2, φ_3.

Un exemple particulièrement intéressant concerne le cas où η est module de périodicité de l'intégrale de première espèce $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$. Alors, pour

$$\varphi_1 = -3\psi'(x), \qquad \varphi_2 = -\frac{15}{4}\psi(x), \qquad \varphi_3 = -\frac{5}{4}\psi(x),$$

la relation $w_1 = 0$ est vérifiée, et cette relation que l'on peut écrire

$$[1, 2] - [1, 3] + [1, 4] + [2, 3] - [2, 4] + [3, 4] = 0$$

coïncide, aux notations près, avec la relation connue qui lie les modules de

périodicité des intégrales de première espèce. On a alors

$$(8)\quad \eta = \left[\frac{1}{24}x\psi^{\text{iv}}(x) - \frac{1}{3}\psi'''(x)\right]y - 3\psi''(x)y' - \frac{16}{3}\psi'(x)y'' - \frac{8}{3}\psi(x)y'''.$$

Si nous considérons maintenant le système fondamental

$$v_1 = y_2 - y_1 + y_4 - y_3, \qquad v_2 = y_4 - y_3,$$
$$v_3 = y_1, \qquad v_4 = y_3 - y_2$$

d'intégrales de l'équation différentielle (2), [équation qui appartient à la *classe* d'équations différentielles envisagées dans le t. 66 du *Journal de Crelle*, p. 146, équation (13)], la fonction η définie par l'équation (8) doit être intégrale d'une équation différentielle du *quatrième* ordre de la même classe. Soit

$$\zeta_1 = \eta_2 - \eta_1 + \eta_4 - \eta_3, \qquad \zeta_2 = \eta_4 - \eta_3,$$
$$\zeta_3 = \eta_1, \qquad \zeta_4 = \eta_3 - \eta_2$$

le système fondamental de cette équation différentielle qui *correspond* au système fondamental (v_1, v_2, v_3, v_4), et posons

$$a = v_1\zeta_2 - v_2\zeta_1,$$
$$b = v_1\zeta_3 - v_3\zeta_1,$$
$$c = v_1\zeta_4 - v_4\zeta_1,$$
$$d = v_2\zeta_3 - v_3\zeta_2.$$

M. Fuchs démontre que l'on peut définir x, k_1, k_2 comme fonctions de trois variables indépendantes ξ, η, ζ, par les équations

$$(9)\qquad \frac{b}{a} = \xi, \qquad \frac{c}{a} = \eta, \qquad \frac{d}{a} = \zeta;$$

nous donnons à k_3 et k_4 des valeurs fixes, par exemple 0, 1.

En différentiant ces équations (9), on a

$$d\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial k_1}dk_1 + \frac{\partial\xi}{\partial k_2}dk_2,$$
$$d\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial k_1}dk_1 + \frac{\partial\eta}{\partial k_2}dk_2,$$
$$d\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial k_1}dk_1 + \frac{\partial\zeta}{\partial k_2}dk_2;$$

soit Δ le déterminant fonctionnel des trois seconds membres

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial k_1}\frac{\partial\zeta}{\partial k_2},$$

et posons, quels que soient p, q, r, s,

$$G(p, q, r, s) = \sum \pm p\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial k_1}\frac{\partial s}{\partial k_2},$$

où il faut prendre chaque terme avec le même signe que le terme correspon-

dant de Δ; enfin soit

$$H(a, b, c, d) = \frac{1}{a} G(a, b, c, d).$$

M. Fuchs démontre que cette fonction $H(a, b, c, d)$ *est une fonction univoque et rationnelle de* x. Il renvoie à plus tard la suite de cette Communication.

Reye (*Th.*). — Sur les variétés linéaires de faisceaux de plans projectifs, et de gerbes de plans ou d'espaces collinéaires. (833-839).

Lorsqu'une variété *linéaire* $|M_1|$ est composée de ∞^1 *formes fondamentales*, deux quelconques de ces formes fondamentales engendrent toujours la même forme géométrique. Ainsi les ∞^1 faisceaux de plans u qui, pris deux à deux, engendrent la même surface réglée ou le même cône du second ordre, forment une variété linéaire $|u_1|$. Deux gerbes collinéaires de plans engendrent les cordes d'une cubique gauche c^3 et déterminent simultanément une variété *linéaire* $|S_1|$ de ∞^1 gerbes collinéaires; les centres de cette variété linéaire sont situés sur c^3 et chaque paire de plans homologues se coupe suivant une corde de c^3. Deux espaces collinéaires engendrent en général un complexe tétraédral quadratique de droites et déterminent simultanément une variété linéaire $|\Sigma_1|$ de ∞^1 espaces collinéaires dont deux quelconques engendrent par leurs éléments homologues le même complexe.

A l'aide de ces variétés linéaires $|u_1|$, $|S_1|$, $|\Sigma_1|$, on peut engendrer des variétés linéaires à n dimensions $|u_n|$, $|S_n|$, $|\Sigma_n|$ par des considérations purement géométriques; ces variétés linéaires à n dimensions sont déterminées par $n+1$ de leurs ∞^n faisceaux projectifs de plans, gerbes collinéaires de plans, espaces collinéaires.

Dans chacun des cas envisagés on trouve des limites supérieures pour n. Ainsi on ne peut construire que ∞^7 faisceaux de plans projectifs à un faisceau de plan donné u, tandis qu'il existe ∞^{11} gerbes collinéaires à une gerbe donnée S et ∞^{15} espaces collinéaires à un espace donné Σ. Dans l'ensemble des faisceaux de plans projectifs on peut donc distinguer des variétés linéaires $|u_1|$, $|u_2|$, ..., $|u_6|$ de 1, 2, ..., 6 dimensions, tandis que dans l'ensemble des gerbes collinéaires de plans nous distinguerons des variétés linéaires $|S_1|$, $|S_2|$, ..., $|S_{10}|$ de 1, 2, ..., 10 dimensions et que pour les espaces collinéaires de plans nous distinguerons des variétés linéaires $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$, ..., $|\Sigma_{14}|$ de 1, 2, ..., 14 dimensions.

Ce sont ces variétés diverses, qui, comme on le voit, sont en grand nombre, dont l'étude est l'objet de six grands Mémoires de M. Reye dont le premier est contenu dans le t. 104 du *Journal de Crelle*. L'auteur se propose de rechercher les formes géométriques engendrées par ces variétés, de donner leurs propriétés les plus remarquables, enfin de mettre en évidence leurs nombreuses dégénérescences. Un exemple fera bien saisir l'importance de l'étude des formes dégénérées : les points doubles des espaces dégénérés d'une variété $|\Sigma_2|$ sont situés en général sur une courbe gauche du *sixième ordre par laquelle* $|\Sigma_2|$ *est entièrement déterminée*.

Dans sa Communication actuelle, M. Reye cherche, en quelques pages, à indiquer la marche qu'il a suivie et les résultats principaux qu'il a obtenus.

Analytiquement on peut représenter fort simplement les variétés linéaires dont nous venons de parler. Soient α_i, β_i, γ_i, δ_i des fonctions linéaires quelconques des coordonnées ponctuelles x, y, z et soient k_i, λ, μ, ν des paramètres arbitraires. Les équations

$$\alpha_i + \lambda\beta_i + \mu\gamma_i + \nu\delta_i = 0,$$

représentant, pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, des espaces collinéaires, on donne aux paramètres λ, μ, ν des valeurs déterminées; elles représentent $n+1$ plans homologues de ces espaces collinéaires. L'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n} k_i(\alpha_i + \lambda\beta_i + \mu\gamma_i + \nu\delta_i) = 0$$

représente la variété linéaire $|\Sigma_n|$ qui est déterminée par les $n+1$ espaces collinéaires; lorsque l'on donne des valeurs déterminées aux rapports des $n+1$ paramètres k_0, k_1, ..., k_n, elle représente aussi un espace quelconque de $|\Sigma_n|$. Si l'on pose $\mu = 0$, cette même équation représente une variété linéaire à n dimensions de gerbes collinéaires. Si l'on pose $\mu = \nu = 0$, cette même équation représente une variété linéaire à n dimensions de faisceaux de plans projectifs.

M. Reye fait usage de cette représentation analytique pour déterminer certains *nombres* qui jouent un rôle important dans les variétés considérées et il parvient ainsi à des systèmes d'équations algébriques remarquables et à peine étudiés jusqu'ici.

Ses recherches générales sont notablement simplifiées par la façon dualistique dont les variétés linéaires se présentent en général. Exemple, les deux systèmes de faisceaux de plans projectifs qui engendrent tous deux un même hyperboloïde.

Une variété linéaire $|M_n|$ contient $\infty^{(n-i)(i+1)}$ variétés linéaires $|M_i|$, lorsque $n > i > 0$. Lorsque $|M_n|$ est composée de *formes fondamentales* nous comptons comme faisant partie de $|M_n|$ toutes les formes que ces formes fondamentales engendrent ainsi que toutes les formes que les $|M_i|$ engendrent. Et comme toutes ces formes engendrées sont de natures fort diverses (groupes de points, de droites, de plans; courbes gauches; congruences; complexes; etc.) et qu'il y a nécessairement entre elles certaines dépendances, on peut se proposer de trouver ces diverses dépendances. C'est ce qu'entreprend M. Reye. Exemple : Une variété linéaire de faisceaux $|u_3|$ et la variété $|\Sigma_1|$ qui lui est liée, engendrent, en général, un complexe tétraédral quadratique de droites, le tétraèdre principal de ce complexe, ∞^3 cubiques gauches circonscrites au tétraèdre principal et n'ayant comme cordes que des droites de ce complexe, enfin ∞^4 surfaces complexes du second degré dont chacune contient ∞^1 des courbes gauches.

Un des résultats les plus remarquables obtenus par M. Reye est celui-ci : les variétés de faisceaux $|u_n|$ et $|u_{6-n}|$ sont dans une certaine dépendance dualistique et dépendent du même nombre de paramètres. Ainsi le complexe tétraédral des axes d'une variété $|u_3|$ est son propre réciproque et, comme $|u_3|$ elle-même, dépend de 13 paramètres. De même que la variété $|u_1|$ est déterminée par une surface réglée du second ordre et $|u_2|$ par une cubique gauche c, de même $|u|$ dépend d'une surface réglée de second classe et $|u|$

d'un faisceau de plans cubiques γ^3. Les intersections des plans de γ^3 sont les axes de ∞^1 faisceaux des variétés $|u_1|$, et les droites communes des ∞^1 complexes tétraédraux de $|u_4|$. Les ∞^4 tétraèdres principaux de ces complexes sont formés chacun par quatre plans des γ^3. Les ∞^6 cubiques gauches de $|u_4|$ sont respectivement circonscrites à ∞^1 de ces tétraèdres principaux et sont donc avec le faisceau de plans γ^3 dans le rapport invariant de M. Hurwitz. Ce dualisme de $|u_n|$ et de $|u_{5-n}|$ s'étend à tous les cas particuliers de ces variétés. Il y a dualité entre les $\infty^{(n-i)(i+1)}$ variétés linéaires $|u_i|$ contenues dans la variété $|u_n|$ et les $\infty^{(n-i)(i+1)}$ variétés linéaires $|u_{5-i}|$ qui se coupent suivant $|u_{5-n}|$.

La même dualité a lieu pour $|S_n|$ et $|S_{1-n}|$; et aussi pour $|\Sigma_n|$ et $|\Sigma_{1-n}|$.

Kronecker (*L.*). — Sur une fonction sommatoire. (867-881).

Envisageons les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{\Sigma}_t f(\delta t) - \overline{\Sigma}_t f(0) = \frac{1}{2} f(0), \qquad 0 \leqq \delta < 1, \\ \overline{\Sigma}_t f(x+t) - \overline{\Sigma}_t f(x) = \frac{1}{2} f(mt) + \frac{1}{2} f(nt), \end{cases}$$

où x est un nombre réel quelconque, et où les nombres entiers m, n sont définis par les inégalités

$$x \leqq mt < x + t, \qquad x < nt \leqq x + t,$$

t étant un nombre réel fixé arbitrairement, et $f(x)$ désignant une fonction réelle de x, finie ainsi que ses dérivés $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n)}(x)$ dans l'intervalle $(0 \ldots t)$.

Ces deux équations caractérisent entièrement, à la constante $\overline{\Sigma}_t f(0)$ près, une fonction

$$\overline{\Sigma}_t f(x),$$

que M. Kronecker nomme *fonction sommatoire*. Cette fonction sommatoire peut être représentée par l'expression

$$(2)\quad \begin{cases} [\psi(0) - \psi(t)]\,\overline{\Sigma}_t f(x) \\ \quad - \sum_{h=1}^{h=n} f^{(h-1)}(x)\, g^{(n-h)}(-x) \\ \quad + \int_0^x [f(x)\, g^{(n)}(-x) - f^{(n)}(x)\, g(-x)]\, dx, \end{cases}$$

où les fonctions $g(x)$, $g'(x)$, …, $g^{(n)}(x)$ sont formées à l'aide de la fonction réelle arbitraire mais finie ainsi que sa dérivée dans l'intervalle $(0 \ldots t)$,

$$\psi(x),$$

en développant d'abord $\psi(x)$, pour $0 < x < t$, suivant la série de Fourier

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \sin \frac{2k\pi x}{t} + \sum_{k=0}^{k=\infty} \beta_k \cos \frac{2k\pi x}{t}.$$

en déterminant ensuite les nombres a_k, c_k de manière que l'on ait

$$a_k e^{c_k \pi i} = -\frac{2k\pi}{t}(\alpha_k + \beta_k i) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

et ensuite $g(x)$, $g'(x)$, $\ldots$, $g^{(n-1)}(x)$, par les équations

$$g^{(n-h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k t^h}{(2k\pi)^h} \cos\left(\frac{2kx}{t} + c_k + \frac{1}{2}h\right)\pi \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

tandis que $g^{(n)}(-x)$ est déterminée, dans l'intervalle $0 \leqq x < t$, par

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{d\psi(x)}{dx},$$

et hors de cet intervalle par

$$g^{(n)}(x+t) = g^{(n)}(x).$$

On peut modifier la forme de ce résultat et le généraliser en posant

$$\int_0^x f(x)\,dx = F(x+z),$$

$$g(x) = [\psi(0) - \psi(t)]\,G(x),$$

$$g^{(h)}(x) = [\psi(0) - \psi(t)]\,G^{(h)}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit alors que l'expression

$$\sum_{h=1}^{h=n} F^{(h)}(x)\,G^{(n-h)}(z-x) + \int_0^x [F'(x)\,G^{(n)}(z-x) - F^{(n+1)}(x)\,G(z-x)]\,dx$$

représente une fonction de x dont la valeur reste constante tant que l'argument x, en croissant, reste compris *entre* deux termes consécutifs de la progression arithmétique

$$nt + z \qquad n = (\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

tandis qu'elle augmente de

$$\frac{1}{2}F'(nt+z),$$

dès que x atteint la valeur $nt + z$ de l'un des termes de cette progression arithmétique, et aussi dès que x dépasse cette valeur.

Si l'on désigne par $\Sigma_t F'(z)$ une fonction vérifiant l'équation aux différences

$$\Sigma_t F'(z+t) - \Sigma_t F'(z) = F'(z),$$

la fonction

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}F'(z) + \Sigma_t F'(z)$$

vérifie l'équation aux différences

$$(1) \qquad \Phi(z+t) - \Phi(z) = \frac{1}{2}[F'(z) + F'(z+t)]$$

M. Kronecker montre que cette même équation (3) est également vérifiée par $\overline{\Sigma}_t F'(x+z)$, c'est-à-dire par l'expression

$$\sum_{h=1}^{h=n} F^{(h)}(x+z)\,G^{(n-h)}(-x)$$
$$+\int^{x}\left[F'(x+z)\,G^{(n)}(-x) - F^{(n+1)}(x+z)\,G(-x)\right]dx,$$

lorsqu'on y substitue à x un multiple entier de t. Mais les relations caractéristiques (1) montrent en outre que, lorsque x n'est pas un multiple entier de t, on a, si nt est le multiple entier de t situé entre x et $x+t$,

$$\text{(4)}\qquad \overline{\Sigma}_t F'(x+z+t) - \overline{\Sigma}_t F'(x+z) = F'(z+nt),$$

et, de plus, si δ est une fraction positive plus petite que l'unité,

$$\text{(5)}\qquad \overline{\Sigma}_t F'(z+\delta t) - \overline{\Sigma}_t F'(z) = \frac{1}{2} F'(z).$$

A l'équation aux différences (3), il convient donc de joindre les équations aux différences (4) et (5) pour fixer complètement les conditions auxquelles la fonction que l'on veut étudier doit satisfaire.

Nous allons effectuer les calculs indiqués en choisissant

$$\psi(x) = \frac{t}{2} - x.$$

On a alors

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k\pi} \sin\frac{2kx\pi}{t},$$

puis

$$a_k = -2, \qquad c_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

d'où

$$g^{(n-h)}(-x) = -2t^h \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k\pi)^h} \cos\left(\frac{2kx}{t} + \frac{h}{2}\right)\pi \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$
$$g'^{(n)}(-x) = 1, \qquad \psi(0) - \psi(t) = t,$$

de sorte que les fonctions $G^{(h)}(x)$ sont déterminées par les formules

$$G^{(n-h)}(-x) = -2t^{h-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k\pi)^h} \cos\left(\frac{2kx}{t} - \frac{h}{2}\right)\pi, \qquad G^{(n)}(-x) = \frac{1}{t}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est donc ici l'expression

$$\text{(6)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{t}F(x) - 2\sum_{h=1}^{h=n} F^{(h)}(x) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{t^{h-1}}{(2k\pi)^h} \cos\left(\frac{2k(x-z)}{t} + \frac{h}{2}\right)\pi \\ &\quad + 2\int^{x} F^{(n+1)}(x) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{t^{n-1}}{(2k\pi)^n} \cos\left[\frac{2k(x-z)}{t} - \frac{n}{2}\right]\pi\, dx, \end{aligned}\right.$$

dont la valeur reste *constante* tant que l'argument z reste à l'intérieur de

l'intervalle formé par deux termes consécutifs de la progression arithmétique

$$nt + z \qquad (n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

tandis qu'elle augmente brusquement de

$$\frac{1}{2} F'(nt + z),$$

lorsque l'argument x atteint, en augmentant, une valeur $nt + z$, et aussi lorsque x dépasse une telle valeur. On a donc, en désignant l'expression (6) par V (x),

$$\frac{1}{2}\sum_{(m)} F'(mt + z) + \frac{1}{2}\sum_{(n)} F'(nt + z) = V(x) - V(x_0),$$

$$(x_0 \leqq mt + z < x;\ x_0 < nt + z \leqq x).$$

Dans le cas très particulier où $x - x_0$, $x - z$ et $x_0 - z$ sont des multiples entiers de t, on a

$$2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{t^{h-1}}{(2k\pi)^h} \cos\left[\frac{2k(x-z)}{t} + \frac{h}{2}\right]\pi = \begin{cases} 0 \text{ pour } h \text{ impair}, \\ (-1)^{\frac{h}{2}} \dfrac{B_{\frac{h}{2}} t^{h-1}}{h!} \text{ pour } h \text{ pair}, \end{cases}$$

où les B sont les nombres de Bernoulli. On retombe donc sur la formule que Poisson a donnée dans son Mémoire célèbre, *Sur le calcul numérique des intégrales définies*,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{(m)} F'(mt + z) + \frac{1}{2}\sum_{(n)} F'(nt + z) \\ &= \sum_{(\nu)} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu t^{2\nu-1}}{(2\nu)!} \left[F^{(2\nu)}(x) - F^{(2\nu)}(x_0)\right] \\ &\quad + 2\int_{x_0}^{x} F^{(n+1)}(x) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{t^{n-1}}{(2k\pi)^n} \cos\left[\frac{2k(x-z)}{t} + \frac{n}{2}\right]\pi\, dx \end{aligned}$$

$$\left(0 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2};\quad B_0 = -1;\quad 0! = 1;\quad x_0 \leqq mt + z < x;\quad x_0 < nt + z \leqq x\right).$$

M. Kronecker fait observer que *la source de cette formule de Poisson est l'expression plus générale* (6), *qui, à cause de ses propriétés énoncées plus haut, est aussi caractérisée comme étant une fonction sommatoire.*

En prenant pour $\psi(x)$ l'expression

$$\psi(x) = \frac{1}{2} t - x - t \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{1}{k\pi} \sin \frac{2kx\pi}{t},$$

on obtient, d'autre part, la formule

$$\frac{1}{2}\sum_{m} f(mt) + \frac{1}{2}\sum_{n} f(nt) = \frac{1}{t} \lim_{s=\infty} \int_{x_0}^{x} f(x) \frac{\sin \dfrac{(2s-1)\pi x}{t}}{\sin \dfrac{\pi x}{t}}\, dx$$

$$(x_0 \leqq mt < x,\ x_0 < nt \leqq x),$$

qui est identique à la formule de sommation de Lejeune-Dirichlet lorsque x_0 et x sont des multiples entiers de t.

J. M.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ (1). — 3e série.

Tome X, 1891.

Lecornu (*L.*). — Sur les mouvements plans. (5-17).

Application des imaginaires à l'étude du mouvement d'une figure plane invariable qui se déplace dans son plan. Une analyse simple permet ainsi d'établir les propriétés connues du centre instantané ou centre de vitesse, du centre d'accélération, des courbes roulantes, des accélérations d'ordres quelconques, et de résoudre plusieurs problèmes relatifs à ces théories, avec une grande facilité.

Adam (*A.*). — Note sur les surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée, et plus généralement sur les surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont situées dans des plans parallèles et qui sont applicables sur une surface de même nature. (18-23).

Cet article a pour base la remarque suivante : Quand on déforme une surface de révolution en lui conservant son caractère, la forme que prend le méridien est indépendante de sa distance à l'axe de révolution.

Carvallo (*E.*). — Formule des différences et formule de Taylor. (24-29).

La formule des différences que l'auteur établit ici donne la valeur u_n d'une fonction, au moyen de u_0 et des différences successives de u_0, en s'arrêtant à un rang fixé, et en complétant par un reste dont il donne également l'expression. Les substitutions de la variable sont faites en progression arithmétique. On comprend comment ceci lui sert d'Introduction pour arriver à une démonstration, des plus simples et des plus élégantes, de la formule de Taylor, avec plusieurs expressions du reste. Il insiste avec raison, en terminant, sur les avantages qu'il y aurait à prendre le calcul des différences pour base de l'enseignement du Calcul infinitésimal.

Ravier (*S.*). — Intersection d'une droite avec un hyperboloïde de révolution. (29-33).

Construction très simple, dans les deux cas où la projection de la droite sur le plan du cercle de gorge rencontre, ou ne rencontre pas, ce cercle.

(1) Voir *Bulletin*, XV, p. 81.

F. J. M. — Solution de l'épure de Géométrie descriptive donnée à l'École centrale en 1890; 1re session. (33-36).

Intersection de deux cônes.

Valeyx (L.). — Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition. (37-59, 91-102, 125-133, 163-171).

Fin de la série des articles dont le *Bulletin* (t. XV, p. 86) a précédemment rendu compte. Nous continuons à reproduire l'indication des divisions principales, comme nous l'avons déjà fait :

Constructions de coniques définies par cinq données (fin). — Théorème de Newton et conséquences. — Propriétés métriques des ordonnées d'une section conique; équations des coniques à centre rapportée à deux diamètres conjugués; équation de la parabole rapportée à une tangente et au diamètre conjugué. — Propriétés des coniques dont les points communs appartiennent à un cercle. — Propriétés de l'hyperbole; théorème de Frégier. — Théorème de Joachimstahl. — Application du théorème de Pappus.

École des Ponts et Chaussées (Concours de 1890); Cours préparatoires. — Concours d'admission a l'École navale en 1889. — Concours d'admission a l'École navale en 1890. — Énoncés des compositions. (59-64).

Lévy (L.). — Intersection de deux quadriques. (65-76).

Application d'une méthode de M. Darboux, employée déjà par M. Carvallo pour l'étude du contact de deux quadriques (même Recueil, décembre 1890). L'auteur examine successivement les cas suivants :

$\Delta(\lambda)$ est nul sans que tous ses premiers mineurs le soient; $\Delta(\lambda)$ est nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre, mais un mineur au moins du second ordre est différent de zéro; tous les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$ sont nuls, mais un élément au moins est différent de zéro; tous les éléments de $\Delta(\lambda)$ sont nuls pour la valeur de λ considérée; l'équation en λ est une identité.

Marie (M.). — Observations sur un Mémoire de M. Henri Poincaré, publié en 1887, dans les *Acta mathematica* de Stockholm, et relatif aux résidus des intégrales doubles. (77-82).

L'auteur, malheureusement enlevé depuis à la Science, discute certains points du Mémoire en question, et conteste notamment l'exactitude de quelques résultats concernant les périodes des intégrales doubles.

Ocagne (M. d'). — Sur une courbe définie par la loi de sa rectification. (82-90).

Étude d'un mode de correspondance entre une droite et une courbe, tel que

la distance entre deux points correspondants soit constante, et que l'arc de courbe soit égal au segment de droite correspondant. La question peut alors se traiter géométriquement; la courbe est de celles que M. Sylvester appelle *tractrices*. M. d'Ocagne en donne plusieurs propriétés intéressantes.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1890. — Énoncés des compositions. (104-108).

Carvallo (*E*.). — Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations. (109-110).

Nouvelle démonstration très simple et rigoureuse; c'est un argument de plus pour la réintégration, dans les programmes, d'une proposition aussi fondamentale, et qu'on ne saurait admettre comme postulatum, ainsi qu'on le fait, sans laisser dans l'esprit une regrettable lacune.

Mayer (*D.-E*.). — Sur les équations algébriques. (111-124).

L'article comprend : 1° le théorème suivant : « Si, dans une équation algébrique de degré m, il existe un terme d'exposant k, dont le coefficient ait un module plus grand que la somme des modules des autres coefficients, l'équation a $m-k$ racines de modules supérieurs à 1, et k racines de modules inférieurs à 1 » ; 2° l'indication d'une méthode pour le calcul approché des racines d'une équation.

Nous signalerons l'originalité du mode de démonstration du théorème, reposant sur des considérations empruntées au Calcul des probabilités.

Dolbnia (*J*.). — Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue. (134-140).

Démonstration très simple de quelques théorèmes extraits du Mémoire d'Abel *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$ (*Œuvres*, 2e édition, t. I, p. 104).

Duporcq (*E*.). — Nouvelle démonstration géométrique d'un théorème de M. Faure. (140-141).

Le théorème en question est le suivant : « Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique fixe coupent orthogonalement un cercle fixe, concentrique à la conique. »

Adam (*P*.). — Sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche et sur les courbes gauches à courbure constante. (142-152).

Démonstration de cette propriété, que le lieu des centres de courbure est l'enveloppe du cercle normal à la courbe considérée et ayant pour diamètre le rayon de la sphère osculatrice qui aboutit à cette courbe. Le procédé géométrique employé a été indiqué à l'auteur par M. Darboux. Diverses conséquences

Clugnet (*T.*). — Note de Géométrie. (153-158).

Propriété d'une conique et d'une circonférence ayant son centre sur l'un des axes. L'auteur en déduit plusieurs corollaires qui le conduisent, en particulier, à des constructions simples des normales de la développée.

Worontzoff. — Sur le développement des intégrales en séries. (158-162).

Le calcul de l'auteur lui permet de retrouver plusieurs formules connues et de donner diverses formes pour le reste.

Marie (*M.*). — Réalisation et usage des formes imaginaires en Géométrie. (172-179, 276-296, 329-340, 373-384, 417-428, 459-472).

Suite et fin de la série des articles précédemment publiés dans le même Recueil et analysés dans le *Bulletin* (t. XV, p. 81). Les sujets principaux traités ici sont :

Quadratrices des courbes algébriques (fin). — Sur la rectification des courbes planes. — Géométrie dans l'espace : conjuguées d'une surface; cubature des surfaces; périodes des intégrales doubles; classification des intégrales doubles cubatrices; applications aux surfaces du troisième ordre. — Développement en série d'une fonction implicite.

Quelle que soit l'opinion de chacun sur les théories de l'auteur concernant les imaginaires, auxquelles il a consacré une grande partie de sa vie, on ne peut lui contester les qualités d'originalité et d'invention qui le distinguèrent. Mais il est permis de se demander si les sujets traités par lui dans les articles dont nous nous occupons étaient bien à leur place, adressés à des élèves de Mathématiques spéciales. Sans se confiner étroitement dans les programmes, il est bon, à notre avis, de ne pas dépasser certaines bornes, et surtout de n'enseigner aux élèves que des doctrines dégagées de toute controverse.

Robert (le P. *Ch.*). — Généralisation d'un théorème sur l'équilibre des surfaces fermées. (180-189).

Après avoir rapidement établi les théorèmes de MM. Bertrand et Joubert, l'auteur démontre qu'une surface fermée reste en équilibre sous l'action de forces normales et proportionnelles à $\frac{N_n\, d\sigma}{R^n R'^n}$, N étant une quantité qu'il exprime par récurrence, $d\sigma$ un élément de la surface, et R, R′ les rayons de courbure principaux.

Issaly (l'abbé). — Extension aux pseudo-surfaces du théorème de Malus relatif à la marche des rayons lumineux. (190-193).

Voir les travaux antérieurs de l'auteur sur le même sujet, et qui ont été précédemment analysés (*Bulletin*, t. XV, p. 85).

Jamet (*V.*) — Sur les périodes des intégrales elliptiques. (193-196).

M. Jamet montre, dans cet article, comment on rencontre une relation connue sur les périodes quand on veut évaluer le volume de l'ellipsoïde au moyen des coordonnées elliptiques.

Picard (*E.*). — Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. (197-201).

Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Cette démonstration est aussi remarquable par son élégante simplicité que par sa rigueur et mérite de devenir classique.

Grossetête (*E.*). — Solution de la question de Mathématiques élémentaires pour l'agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1889. (201-203).

Divers problèmes concernant deux droites concourantes et un point du plan.

Genty. — Solution de la question de Mathématiques spéciales pour l'agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1889. (204-208).

Questions sur un cône du deuxième degré et deux quadriques inscrites.

Grossetête (*E.*). — Solution de la question d'Analyse pour l'agrégation des Sciences mathématiques; Concours de 1889. (208-212).

Sur les invariants de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0.$$

Barisien. — Solution de la question d'Algèbre du Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1889. (212-215).

Polynôme entier $f(x)$ du septième degré, tel que $f(x)+1$, $f(x)-1$ soient respectivement divisibles par $(x-1)^4$, $(x+1)^4$.

Jamet (*V.*). — Sur le nombre e. (215-218).

Démonstration simplifiée de la proposition de M. Hermite, que e n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

Carvallo (*E.*). — Théorie des déterminants. (219-224).

L'exposition simplifiée de M. Carvallo a pour but essentiel de servir de pré-

paration aux méthodes de Cauchy, de Grassmann et d'Hamilton. Il insiste sur le caractère de produit symbolique qui appartient à un déterminant, et qui est de nature à rendre presque intuitive cette théorie. Nous ne croyons pas qu'il existe un travail quelconque dans lequel la multiplication extérieure de Grassmann soit aussi simplement et aussi clairement exposée.

Ader (*H.*). — Démonstration nouvelle d'un théorème sur les normalies. (225-228).

Ce théorème consiste en ce que si la directrice d'une normalie passe par un point d'une surface, les plans principaux relatifs à ce point sont tangents à la normalie aux centres de courbure principaux.

Barisien. — Solution des compositions pour le Concours d'admission à l'École centrale en 1889; première et deuxième session. (228-235).

1° Sur un faisceau de paraboles; divers problèmes;
2° Lieux géométriques et problèmes relatifs à un système de coniques.

Mangeot (*S.*). — Surfaces de symétrie du troisième ordre d'une quadrique. (235-242).

L'auteur appelle *surfaces de symétrie* celles dont chaque normale, limitée à ses deux points de rencontre avec la quadrique, a son milieu au point d'incidence. Cet article est le point de départ d'une méthode générale pour la détermination de celles de ces surfaces qui sont algébriques.

Barisien. — Solutions des compositions pour le Concours d'admission à l'École centrale en 1890; première et deuxième sessions. (243-251).

1° Lieux de sommets et de foyers de paraboles, et autres problèmes y relatifs;
2° Diverses propriétés d'une parabole.

Barisien. — Solution de la composition pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1890. (251-256).

Diverses questions sur une hyperbole équilatère.

Grossetête (*E.*). — Solution de la question de Mathématiques élémentaires pour l'agrégation des Sciences mathématiques; Concours de 1890. (256-264).

Sur deux droites fixes coupées par une droite mobile; propriétés, lieu et enveloppe.

Liroux (*M.*). — Solution géométrique de la question de Mathé-

matiques spéciales pour l'agrégation des Sciences mathématiques; Concours de 1890. (264-267).

Lemaire. — Note sur la question précédente. (267-269).

Marchand. — Remarques sur le même problème. (269-270).

Il s'agit des coniques inscrites dans un triangle donné et vues d'un point donné P sous un angle droit. Lieu des centres; existence d'un autre point P' ayant la même propriété que P; propriétés diverses.

Barisien. — Solution de la composition du Concours pour les bourses de licence; Paris, 1889. (297-301).

Diverses questions relatives à la courbe $y =$ [illegible].

Collin (J.-S.). — Tangentes communes à deux coniques. (302-305).

M. Collin traite la question en évitant l'emploi des coordonnées tangentielles et en faisant seulement intervenir l'équation aux coefficients angulaires des tangentes.

Concours d'admission a l'École Polytechnique; a l'École spéciale militaire; a l'École Normale supérieure en 1891. — Énoncés des compositions. (305-312).

Correspondance. — M. Gomes Teixeira (Extrait d'une lettre à M. Rouché) : Sur la formule de Stirling. Note de M. Rouché. (312-317).

Genese. — Sur un cercle remarquable qui passe par deux points d'une conique. (318-320).

Si AB est une corde fixe d'une conique, C son pôle, P un point de la courbe, QCQ' une antiparallèle à AB coupant PA, PB en Q, Q', le cercle dont il s'agit passe par A, B, Q, Q'.

Marchand. — Remarques sur le problème de Mécanique proposé à l'agrégation en 1889. (321-322).

Emploi des équations de Lagrange au lieu des formules du mouvement relatif.

Marchand. — Remarques sur le problème de Mathématiques spéciales de l'agrégation de 1889. (322-325).

Transformation de l'énoncé par le principe de dualité; généralisation.

Worontzoff. — Sur les fonctions symétriques. (325-329).

Généralisation d'une proposition connue.

Carvallo (E.). — Multiplication des déterminants. (341-345).

Cet article fait suite à celui que M. Carvallo a déjà publié dans le même tome (p. 219-224) et qui a été analysé plus haut. Il donne ici le produit de deux déterminants d'ordres m et n en un déterminant d'ordre $m+n$, celui de deux déterminants de même ordre en un déterminant de même ordre, et plusieurs propriétés des déterminants réciproques.

Carvallo (E.). — Sur une généralisation du théorème des projections. (345-347).

Produit de deux segments dont chacun est la somme géométrique de plusieurs autres par le cosinus de leur angle. Applications.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1891).

Concours d'admission a l'École centrale en 1891; Concours général de 1891. — Énoncés des compositions. (347-357).

Concours pour les bourses de licence en 1890. — Mathématiques : Énoncés des compositions. (357-358).

Concours d'admission a l'École des Mines de Saint-Étienne en 1890. — Énoncés des compositions. (358-360).

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1890). — Énoncés des compositions. (361-362).

Brill (J.). — Note sur l'application de transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. (362-365).

Cette courte Note est intéressante comme application de la Géométrie à l'Analyse, mais gagnerait à être un peu développée. L'extrême concision qu'elle présente en rend la lecture un peu pénible.

Roberjot. — Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. (365-370).

Étude de la force vive, des moments, équations générales, indépendamment de tout système d'axes particulier. Interprétation géométrique

Ravier (*S.-L.*). — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et sur une génération mécanique des quadriques. (371-373).

Indication d'une transformation birationnelle du second ordre plus générale que l'inversion. Combinaison de deux systèmes articulés, qui permettrait de faire décrire une quadrique par un point.

Svechnicoff. — Le centre d'inertie et les moments d'inertie du corps épicycloïdal. (385-392).

Calculs d'intégration conduisant à des résultats relativement simples; mais peut-être ne serait-il pas inutile de définir exactement tout d'abord le corps épicycloïdal.

Puchewicz (*V.*). — Note sur les approximations dans le calcul logarithmique. (393-399).

Étude de l'approximation d'un logarithme, connaissant le nombre; d'un nombre dont on donne le logarithme, connaissant l'approximation de ce logarithme. Application à un exemple.

Hioux (*V.*). — Cercle tangent à trois cercles donnés. (399-406).

La solution donnée comprend comme cas particulier celle de Gergonne. L'auteur énonce et démontre, pour y arriver, plusieurs propositions dignes d'intérêt.

Husquin de Rhéville. — Construction géométrique du centre de courbure en un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. (411-416).

Interprétation géométrique de $\frac{d\rho}{d\omega}$ et de $\frac{d\omega}{d\rho}$. Centre de courbure d'une conchoïde.

Carvallo (*E.*). — Théorème fondamental pour la résolution numérique des équations. (429-433).

La question dont il s'agit a déjà été examinée par l'auteur dans l'une de ses thèses de doctorat. Il y revient pour la préciser et en signaler l'importance théorique et pratique. Sans pouvoir essayer même d'en donner ici une idée, nous la recommandons d'une façon toute spéciale à l'attention du lecteur.

Molenbroch (*P.*). — Sur la représentation géométrique des points imaginaires dans l'espace. (434-453).

L'auteur, qui possède bien le calcul des quaternions et s'en est évidemment inspiré, part de la notion de distance, et prend pour représenter un point le lieu des points réels dont la distance au point imaginaire considéré est nulle.

Il trouve ainsi une circonférence. Les considérations qu'il déduit de là offrent un réel intérêt, et coïncident sur plusieurs points avec les résultats des travaux de Laguerre. Il est regrettable qu'en terminant, et à propos des publications de ce dernier et de M. Tarry, il ait commis certaines erreurs de faits, qui semblent dénoter une connaissance incomplète des tentatives de ses prédécesseurs.

Cahen (*E.*). — Note sur la convergence de quelques séries. (453-459).

Exposé d'une méthode que l'auteur applique aux exemples $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^s}$, $\sum_2^\infty \frac{1}{n \log n}$, $\sum_2^\infty \frac{1}{n \log^2 n}$, $\sum_1^\infty \frac{\cos(a \log n)}{n}$.

Svechnicoff. — Les centres d'inertie de la moitié et du quart du corps épicycloïdal. (473-476).

Même sujet que dans un article traité plus haut (*voir* p. 385-392).

Cahen (*E.*). — Note sur la série $\sum_1^\infty n^s u^n$. (476-477).

La somme de la série est $\frac{A}{(1-u)^{s+1}}$, A restant fini pour $u = 1$, s étant quelconque, mais positif.

Dolbnia (*J.*). — Remarques sur la théorie des fonctions abéliennes. (478-502).

L'auteur examine les intégrales abéliennes de première espèce, finies sur toute la surface de la sphère, en employant la méthode des lacets et des feuilles, analogues à celles de Riemann. Dans une première Partie, il arrive ainsi à établir deux théorèmes. Il en fait ensuite application à l'étude des périodes, et au calcul des intégrales hyperelliptiques.

Laurent (*H.*). — Sur les formes quadratiques et sur l'équation dite en S. (503-507).

A l'encontre de la plupart des méthodes connues, celle qu'emploie M. Laurent n'a pas l'inconvénient d'être trop particulière ou de s'appuyer sur la multiplication des déterminants. Application à l'intersection de deux quadriques.

Cahen (*E.*). — Note sur un développement des quantités numériques, qui présente quelque analogie avec celui en fractions continues. (508-514).

Deux développements des formes

$$x = a_0 - \frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} - \dots \qquad \text{et} \qquad x = a_0 + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} + \dots;$$

quelques conséquences; exemples et généralisation.

Concours d'admission a l'École centrale en 1891 : seconde session. — Énoncés des compositions. (514-516).

De Saint-Germain. — Extrait d'une lettre à M. Rouché : Note sur le problème de Mécanique proposé au Concours d'agrégation en 1891. (516-526).

Mouvement d'un point matériel, soumis à certaines forces, sur un paraboloïde entraîné dans un mouvement uniforme de rotation.

Brisse (C.). — Réclamation de priorité pour une faute. (527).

Correction au *Recueil de problèmes de Géométrie analytique*, de l'auteur.

Lechalas (G.). — Quelques théorèmes de Géométrie élémentaire. (527-545).

Cet article a surtout un intérêt philosophique, se rattachant à la question des Géométries non euclidiennes. L'auteur entreprend de démontrer que, contrairement à une assertion de M. Renouvier, on peut se passer d'autres postulats que celui d'Euclide, et qui paraissent admis implicitement, en général. Nous n'oserions affirmer qu'il y parvient, étant pour cela bien trop incompétent en ces matières.

Exercices.

Sous ce titre, la Rédaction des *Nouvelles Annales* a rétabli, avec une pagination spéciale et sous forme sommaire, des énoncés de questions proposées et de solutions, qu'elle avait eu le très grand tort, à notre avis, de supprimer presque totalement depuis plusieurs années. C'est une partie indispensable et particulièrement intéressante dans un recueil de cette nature.

Nous rendons compte ci-dessous de cette deuxième Partie du recueil, pour la même année 1891.

Questions proposées : 1595 à 1600. (1*-2*).

Lemoine (et divers). — Solution de la question 1594. (2*-3*).

Propriété d'un triangle et de circonférences.

Lemaire. — Solution de la question 1477. (3*).

Propriété d'un triangle rectangle.

Servais. — Solution de la question 1575. (4*).

Propriété d'un triangle inscrit à une parabole.

Questions proposées : 1601, 1602. (5*).

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1398. (6*-7*).

Roulement d'un cercle sur une ellipse; divers problèmes.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1452. (7*).

Sur une équation indéterminée du troisième degré.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1558. (7*-8*).

Lieu de centres de coniques.

Servais. — Solution de la question 1577. (8*-9*).

Lim $\sqrt[n]{\dfrac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}}}$ sachant que lim $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = h$.

Servais et *Lemaire.* — Solution de la question 1578. (9*).

Lim $n^x \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ sachant que lim $n^x a_n = a$, pour $n = \infty$.

Questions proposées : 1603 à 1608. (10*).

De Crès (*R.*). — Solution de la question 1595. (11*-12*).

Propriétés des rayons de courbure en deux points d'une conique.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1550. (12*-13*).

Lieu du point de contact d'un cercle et d'une droite.

Lez. — Solution de la question 1562. (13*-18*).

Propriétés de points en ligne droite ou sur une conique, et de droites concourantes.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1553. (18*).

Divisibilité par $10A + B$ de $100a + 10b + c$ et de $cA^2 - bAB + aB^2$.

Lemaire. — Solution de la question 1581. (18*-20*).

Propriétés de coniques passant par un même point, et de droites touchant une même conique.

Darboux (*G.*), *Barisien* et *Lemoine* (*E.*). — Solutions de la question 1603. (20*-24*).

Propriétés du triangle de surface maximum inscrit dans une ellipse.

Questions proposées : 1609 à 1615. (24*-25*).

Bosi (*L.*). — Solution de la question 1587. (25*-27*).

Propriété des quatre normales menées d'un point à l'ellipse.

Audibert. — Solution de la question 1598. (27*-28*).

Lieu des centres d'hyperboles équilatères osculatrices à une ellipse.

Lemaire. — Solution de la question 1605. (28*-29*).

Propriété des deux tangentes à une parabole menées par un point.

Bardelli (*L.*). — Solution de la question 1606. (29*-30*).

Sur le rayon de courbure de la lemniscate de Bernoulli.

Lemoine (*E.*) et *Greenstreet* (*W.-J.*). — Solutions de la question 1602. (30*-31*).

Propriété d'un triangle inscrit dans une conique.

Dertoux. — Solution de la question 1607. (31*-32*).

Trajectoires orthogonales d'une sphère dont le centre parcourt une droite.

Dertoux. — Solution de la question 1608. (32*-34*).

Trajectoires orthogonales d'une sphère dont le centre parcourt une circonférence.

Barisien. — Solution de la question 1610. (34*-35*).

Lieu des pieds des normales par un point sur les coniques d'un faisceau.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1612. (35*-36*).

Propriété d'une normale en un point d'une conique.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1613. (36*-37*).

Valeur approchée du côté de l'heptagone régulier.

Sondat (*P.*). — Solution de la question 1562. (37*-39*).

Voir ci-dessus (p. 13*).

Barisien. — Solution de la question 1560. (39*-40*).

Rayon d'une circonférence passant par trois points donnés (coordonnées trilinéaires).

Duporcq. — Solution de la question 1612. (41*).

Voir ci-dessus (p. 35*).

Duporcq. — Solution de la question 1615. (41*-42*).

Propriété de trois points d'une conique.

Questions proposées : 1616 à 1620. (42*-43*).

Lemoine (*E.*). — Solution de la question 1593. (43*-47*).

Formules sur les éléments d'un triangle.

Barisien. — Solution de la question 1611. (47*-49*).

Lieu relatif à deux faisceaux de coniques.

Malo (*E.*). — Solution de la question 1610. (50*-51*).

Voir ci-dessus (p. 34*).

A. L.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de conférences de l'École.

3e série, t. VII, 1890 (1).

Darboux. — Sur les surfaces dont la courbure totale est constante. (9-18).

La théorie des surfaces à courbure totale constante présente les rapports les plus étroits avec celle des surfaces minima.

Ainsi la détermination des surfaces minima dépend de l'équation

$$s = e^z,$$

et celle des surfaces à courbure constante, d'après M. Weingarten, se ramène à l'équation

$$(1) \qquad s = ae^z + be^{-z}.$$

On n'a pu jusqu'à ce jour intégrer cette équation, mais on connaît divers procédés qui permettent de déduire d'une surface à courbure constante donnée une infinité d'autres surfaces à courbure totale constante.

Ainsi M. Lie a remarqué que, si $f(x, y)$ est une solution de l'équation (1), il en sera de même de $f\left(\frac{x}{m}, ym\right)$, où m est une constante arbitraire.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XV_2, p. 18.

M. Bianchi a indiqué en 1879 une méthode bien plus féconde dont voici le principe.

Soit (Σ) une surface à courbure négative -1 dont on connaît les géodésiques. On pourra d'une infinité de manières mettre l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + e^{2\alpha} d\beta^2.$$

Toutes les tangentes aux géodésiques $\beta =$ const. sont, comme on sait, normales à une surface (S) et elles touchent une seconde surface (Σ') de telle manière que (Σ) et (Σ') constituent les deux nappes de la surface des centres de courbure de (S). M. Bianchi démontre que (Σ') est, comme (Σ), une surface de courbure -1. On voit donc que l'on pourra déduire de (Σ) une surface (Σ') contenant dans son équation une constante arbitraire.

L'application répétée du même procédé conduira à des surfaces à courbure totale constante dont l'équation renfermera autant de constantes que l'on voudra. M. Lie a fait la remarque capitale que ce procédé exige seulement une série de quadratures.

M. Darboux donne de la proposition de M. Bianchi une démonstration géométrique des plus élégantes. Il présente une démonstration analytique non moins simple d'un théorème presque identique de M. Ribaucour, qui peut s'énoncer comme il suit :

« Si, dans chaque plan tangent à une surface de courbure -1, on trace un cercle de rayon 1 ayant son centre au point de contact de ce plan tangent, les cercles ainsi obtenus seront orthogonaux à une famille de surfaces de courbure -1; ces surfaces feront partie d'un système triple orthogonal dont les deux autres familles seront évidemment composées de surfaces enveloppes de sphères. »

Mais l'objet principal de M. Darboux est de simplifier l'application de la méthode de M. Bianchi. La détermination de chaque surface nouvelle n'exige, il est vrai, qu'une quadrature. Mais ces quadratures portent sur des expressions de plus en plus compliquées contenant les constantes arbitraires mêlées aux variables. Or M. Darboux parvient à ce résultat important : il suffira d'effectuer au début un certain nombre de quadratures (inférieur d'une unité au nombre des solutions nouvelles que l'on veut obtenir) portant sur des fonctions parfaitement déterminées des variables, et, ces quadratures une fois effectuées, l'application de la méthode n'exigera que les calculs algébriques les plus élémentaires.

Guichard. — Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles dont les invariants sont égaux. (1[illegible]).

Les équations dont il s'agit sont

(1) $$\frac{\partial^2 [illegible]}{\partial u\, \partial v} = [illegible] \sin [illegible].$$

où φ est une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = [illegible] \cos [illegible]$$

On voit immédiatement que $\frac{d\varphi}{du}$ et $\frac{d\varphi}{dv}$ sont des solutions particulières de l'équation (1).

M. Guichard montre que d'une solution de l'équation (1) on peut, en n'effectuant que des quadratures, en déduire une infinité d'autres.

Soit, en effet, ρ une solution de (1). Les deux équations *compatibles*

$$\frac{d\lambda}{du} = -\frac{d\rho}{du}\frac{d\varphi}{du},$$

$$\frac{d\lambda}{dv} = \rho\cos\varphi$$

permettront de déterminer λ par une quadrature, et

$$r = -\frac{d^2\rho}{du^2} + \lambda\frac{d\varphi}{du} \tag{2}$$

sera une solution de l'équation (1).

Il en sera de même de s :

$$s = -\frac{d^2\rho}{dv^2} - \theta\frac{d\varphi}{dv},$$

où θ se tire par quadrature du système compatible

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{du} &= \rho\cos\varphi, \\ \frac{d\theta}{dv} &= -\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\rho}{dv}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

L'application répétée des transformations (2) ou (3) donnera, en général, une infinité de solutions nouvelles.

Méray et Riquier. — Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles. (23-88).

Saint-Loup. — Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres. (88-100).

La distribution des nombres premiers dans la suite des nombres a été l'objet de nombreuses recherches qui n'ont pas abouti.

M. Saint-Loup s'est proposé d'examiner si une disposition graphique des nombres, autre que suivant une droite indéfinie, pouvait conduire à la solution, et il a été conduit à conclure que la recherche de la loi des nombres premiers semble devoir être abandonnée.

Toutefois la disposition des nombres en triangle arithmétique met en évidence des propriétés assez curieuses au point de vue graphique.

Ainsi tous les multiples d'un nombre premier quelconque sont, dans cette disposition, répartis sur une parabole constante, indépendante du nombre considéré et dont le sommet serait transporté aux divers sommets d'un réseau quadrangulaire.

Cette même disposition permet d'établir de nombreuses formules de nombres n'admettant pas certains diviseurs.

Au lieu d'une distribution parabolique, on peut obtenir une disposition rectiligne, à la vérité arbitraire par son point de départ, mais qui permet de reconnaître graphiquement les diviseurs du nombre considéré.

Elliot. — Sur une équation du premier ordre et l'équation de Jacobi. (101-134).

L'auteur se propose pour objet la réduction à la forme canonique et l'intégration des équations du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Py^2 + Qy + R}{Sy + T},$$

où P, Q, R, S, T sont des fonctions de x.

Si l'on fait le changement de fonction

$$y = aY + b,$$

où a et b désignent des fonctions indéterminées de x, l'équation (1) conserve la même forme; et si l'on profite des fonctions a et b pour annuler dans la nouvelle équation le coefficient de y^2 au numérateur du premier membre et le terme constant au dénominateur, on aura

$$\frac{a'}{a} = \frac{P}{S}, \qquad b = -\frac{T}{S},$$

et l'équation proposée se transformera dans l'équation réduite

$$\frac{dY}{dx} + I = \frac{H}{Y},$$

où I et H ont les valeurs suivantes

$$I = \frac{2PT - QS - TS' + T'S}{S^2} e^{\int \frac{P}{S} dx},$$

$$H = \frac{P^2T - QST + S^2R}{S} e^{-2\int \frac{P}{S} dx}.$$

Les fonctions I et H sont des invariants relativement au changement de fonction; elles sont aussi des invariants relativement à un changement quelconque de la variable indépendante.

On pourra, en changeant cette variable, faire en sorte que I se réduise à l'unité. Il suffira de faire la substitution

$$\frac{dX}{dx} = I;$$

on ramènera à la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y}.$$

On voit immédiatement que J est un invariant absolu.

Le rapport $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{I}} : \mathrm{J}$ est un invariant absolu.

L'exponentielle introduit un facteur constant h dans I et le carré h^2 de ce facteur dans H. L'introduction de ce facteur donne des équations canoniques qui se déduisent les unes des autres par le changement de Y en hY.

Le cas où les coefficients de l'équation (1) sont tous constants est un cas d'intégrabilité qui se traduit par la propriété qu'à $\frac{d\mathrm{J}}{dx}$ ou bien J de se réduire à une constante. Ce cas se reconnaît sur l'équation proposée par le caractère

$$\left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{I}}\right)' : \mathrm{J} = \text{const.} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{I}} = \text{const.}$$

Toutes les fois qu'on saura intégrer une équation (1) dont les invariants sont I et H, on saura intégrer une infinité d'autres équations dont les invariants sont

$$\mathrm{I}_1 = \frac{3\mathrm{H} - \mathrm{I}u}{u^4} e^{-\int \frac{dx}{u}}, \qquad \mathrm{H}_1 = \frac{\mathrm{H}}{u^6} e^{-2\int \frac{dx}{u}},$$

en utilisant les solutions particulières u de la première.

L'équation réduite de la nouvelle équation

$$\frac{dy_1}{dx} + \mathrm{I}_1 = \frac{\mathrm{H}_1}{y_1}$$

se déduira de l'équation réduite de la proposée par le changement de fonction

$$y = \frac{u^3 y_1}{u^2 y_1 - e^{-\int \frac{dx}{u}}}.$$

Si, par exemple, on cherche quelles sont les équations

$$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{\mathrm{J}}{y}$$

que l'on peut intégrer en les ramenant par la remarque précédente à d'autres où J_1' soit une constante k, on obtiendra pour l'invariant absolu J l'expression suivante

$$\mathrm{J} = -\frac{2}{9}\,\frac{9k+2}{\sqrt{\mathrm{X}}} + \frac{2}{9}\left[3(3k+1) - \mathrm{X}\right],$$

où X est une fonction entière et linéaire de x. Les équations caractérisées par cette valeur de J sont des équations de Jacobi.

L'équation de Jacobi est, comme on sait,

$$(lx + l'y + l'')(x\,dy - y\,dx) - (mx + m'y + m'')\,dy + (nx + n'y + n'')\,dx = 0.$$

Par un simple changement de notation et par la substitution de $x + m$ à x, elle devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1 x + n)y + p_1 x + p}{xy + n_1 x^2 + q_1 x + q};$$

c'est-à-dire qu'elle prend la forme (1).

Les deux invariants sont

$$I = h\,\frac{(2q_1 - n)x + 3q}{x^3},$$

$$H = h^2\,\frac{x^2(p_1x + p) + (n_1x^2 - q_1x - q)[(q - n)x - q]}{x^6}.$$

Si l'on identifie avec les expressions

$$I = \frac{A_1x + A_0}{x^3}, \qquad H = \frac{B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0}{x^6},$$

on aperçoit immédiatement les deux relations

$$\frac{A_0^2}{9} = B_0, \qquad \frac{A_0A_1}{3} = B_1;$$

et si on les suppose vérifiées, on pourra faire l'identification d'une infinité de manières; n_1, p, q, p_1 seront exprimés en fonction des A et des B, et aussi de h, q_1, n_1 qui restent arbitraires.

L'équation

$$\frac{dY}{dx} + \frac{A_1x + A_0}{x^3} = \frac{B_3x^3 + B_2x^2 + \frac{1}{3}A_0A_1x + \frac{1}{9}A_0^2}{x^6Y}$$

peut donc être considérée comme provenant d'une infinité d'équations de Jacobi. On peut, comme le montre M. Elliot, en simplifier l'intégration en profitant de l'indétermination de h, q_1, n_1.

L'étude de l'équation de Jacobi amène l'auteur à rechercher les équations de la forme (1), dont l'intégrale générale s'obtient en élevant à des puissances convenables les facteurs qui correspondent à trois solutions particulières et en égalant le produit à une constante.

L'intégrale aura la forme

$$(y - A)^\alpha(y - B)^\beta(y - C)^\gamma D = \text{const.},$$

α, β, γ étant trois constantes et A, B, C, D quatre fonctions quelconques de x.

En éliminant la constante par différentiation, on obtient de deux façons une équation où $\frac{dy}{dx}$ est le quotient d'un polynôme du second degré en y par un polynôme de premier degré :

1° Soit en prenant

$$D = \text{const.}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

2° Soit en prenant

$$D = \text{const.}\, A^\alpha B^\beta C^\gamma, \qquad \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

La première forme ne donne que les équations provenant de l'équation de Jacobi par un changement de la variable indépendante; la seconde appartient à une classe d'équations différentielles plus générales que l'équation de Jacobi.

Si, au lieu de trois fonctions de x, on introduit quatre fonctions A, B, C, D et si l'on désigne par α, β, γ, δ quatre constantes, l'équation

$$(y - A)^\alpha(y - B)^\beta(y - C)^\gamma(y - D)^\delta = \text{const.}$$

donne naissance à une équation différentielle où y' est le quotient d'un polynôme du second degré en y par un polynôme du premier degré sous les conditions

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0.$$

Si l'on fait le changement de fonction

$$y = (A - D) y_1 + D,$$

l'équation ne dépend plus que des deux rapports $\frac{B - D}{A - D}$, $\frac{C - D}{A - D}$, liés eux-mêmes par une relation, et l'intégrale de l'équation peut se mettre sous la forme

$$(y - 1)(y - t)^h (y + k + ht) y^{-k-h-1} = \text{const.},$$

où k et h sont des constantes et t une fonction quelconque de x.

On obtient ainsi une classe d'équations différentielles qui se déduisent les unes des autres par un changement de la variable indépendante.

M. Elliot s'attache à former celles de ces équations dont quatre solutions particulières sont des fonctions linéaires, ce qui donne une généralisation de l'équation de Jacobi.

Il termine en indiquant quelques autres cas d'intégrabilité des équations du type (1).

Zaremba. — Note concernant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. (134-142).

Il s'agit de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \varphi_1(x + y)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \varphi_2(x + y)\, z = 0,$$

où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions quelconques de $x + y$.

Elle peut, comme le fait voir M. Zaremba, être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire linéaire, du second ordre, et à des quadratures.

Si, en effet, l'on regarde x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans le plan et que l'on se donne en chaque point d'une courbe C la valeur de z et de l'une de ses dérivées premières; si de plus on désigne par $u(x, y, x_0, y_0)$ une fonction convenablement déterminée de x, y, x_0, y_0, mais indépendante de la forme de la courbe C et des valeurs de z et de ses dérivées premières sur cette courbe, on aura pour la valeur de z en un point quelconque x_0, y_0 l'expression suivante due à Riemann :

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} z(x_0, y_0) = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \int_C^B \Big\{ & \left[\varphi_1 u z + \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx \\ & - \left[\varphi_1 u z + \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dy \Big\}, \end{aligned}\right.$$

où l'intégration doit être effectuée suivant l'arc BC de la courbe C interceptée par les droites $x = x_0$ et $y = y_0$.

Pour déterminer la valeur de u, M. Zaremba fait le changement de variables

$$2x = \xi + \eta,\qquad 2y = \xi - \eta,\qquad 2x_0 = \xi_0 + \eta_0,\qquad 2y_0 = \xi_0 - \eta_0\,;$$

il réduit la courbe C à la droite $z =$ const.; il prend pour z une intégrale particulière de l'équation (1), savoir

$$z = \cos\mu(\eta_0 - \eta)\,[\,C_1\psi_1(\xi) + C_2\psi_2(\xi)\,],$$

μ, η, C_1, C_2 désignant des constantes arbitraires, et ψ_1, ψ_2 un système de solutions fondamentales de l'équation différentielle

$$\psi'' + 2\varphi_1(\xi)\psi' + [\varphi_2(\xi) + \mu^2]\psi = 0.$$

Substituant cette valeur de z dans la formule (2) et appliquant le théorème de Fourier, en supposant η compris entre η_B et η_C, on obtient pour l'expression de u

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\psi_1(\xi)\psi_2(\xi_0) - \psi_2(\xi)\psi_1(\xi_0)}{\psi_1'(\xi_0)\psi_2(\xi_0) - \psi_2'(\xi_0)\psi_1(\xi_0)}\cos\mu(\eta - \eta_0)\,d\mu,$$

résultat déjà donné par Riemann, mais sans démonstration et dans le cas particulier où $\varphi_2 = 0$.

M. Zaremba utilise cette dernière formule pour résoudre un problème posé par M. Darboux :

Mettre l'élément linéaire d'une surface développable sous la forme

$$ds^2 = \alpha\,du^2 + \frac{1}{\alpha}\,dv^2,$$

α étant une fonction de u et v.

Les fonctions u et v de x et y, si x, y désignent les coordonnées qui figurent dans la formule

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2,$$

doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + 4\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$$

Si l'on applique à cette équation la transformation de Legendre

$$V = \varphi(x, y) - xp - yq,$$

p et q désignant les dérivées de φ par rapport à x et à y, on est ramené à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}(p^2 - q^2) - 4pq\frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial q} + (q^2 - p^2)\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = 0,$$

dont l'intégration revient, par le changement de variables,

$$s_1 = \frac{1}{2}\log(p^2 + q^2) + i\,\text{arc tang}\,\frac{p}{q},$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\log(p^2 + q^2) - i\,\text{arc tang}\,\frac{p}{q},$$

à celle de l'équation

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial s_1\,\partial s_2} = \frac{\partial U}{\partial s_1} + \frac{\partial U}{\partial s_2} = 0.$$

Dans ce cas, la fonction u dont il a été question ci-dessus se réduit à

$$u = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(\xi_0-\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{(\xi_0-\xi)\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}} - e^{-(\xi_0-\xi)\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}} \right) \frac{\cos\mu(\eta_0-\eta)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2}}\, d\mu,$$

où l'on a posé

$$2s_1 = \xi + \eta, \quad 2s_2 = \xi - \eta, \quad 2s_1^0 = \xi_0 + \eta_0, \quad 2s_2^0 = \xi_0 - \eta_0,$$

et peut se développer en une série convergente pour des valeurs quelconques de ses arguments, savoir

$$u = e^{\frac{1}{2}(s_1^0 + s_2^0 - s_1 - s_2)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(s_1 - s_1^0)^n (s_2 - s_2^0)^n}{4^n (n!)^2}.$$

Le problème posé par M. Darboux se trouve donc résolu.

Appell. — Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce. (143-154).

Une fonction quadruplement périodique de troisième espèce est une fonction uniforme de deux variables x et y qui se reproduit, multipliée par une exponentielle linéaire en x et y quand on augmente les variables de chacune des quatre paires de périodes.

D'après un théorème énoncé par Riemann, une fonction quadruplement périodique de deux variables de première espèce qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes des quantités

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta')$$

vérifiant la relation

$$\beta = \alpha'.$$

Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes (α, β) et (α', β') sont entièrement arbitraires. M. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre.

A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à être

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

avec la relation $\beta = \alpha'$.

Le travail de M. Appell est principalement consacré à la démonstration de ce théorème.

L'auteur, en terminant, montre comment on peut former des fonctions de deux variables quadruplement périodiques :

Soient α, β, γ trois quantités telles que la partie réelle de la forme quadratique

$$\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn$$

soit négative pour toutes les valeurs réelles de m et n autres que $m = n = 0$

soit p un entier positif, et $\varphi(u, v)$ une fonction uniforme des deux variables u et v.

Si la série

$$\varphi(x, y) = \sum_{m, n = -\infty}^{m, n = +\infty} e^{p(\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn + mx + ny)} \varphi(e^{x + 2m\alpha + 2n\gamma}, e^{y + 2m\gamma + 2n\beta})$$

est convergente, elle définit une fonction uniforme de x, y vérifiant les quatre relations

$$\varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y),$$
$$\varphi(x, y + 2\pi i) = \varphi(x, y),$$
$$\varphi(x + 2\alpha, y + 2\gamma) = e^{-p(x+\alpha)} \varphi(x, y),$$
$$\varphi(x + 2\gamma, y + 2\beta) = e^{-p(y+\beta)} \varphi(x, y).$$

Cette fonction est donc quadruplement périodique de troisième espèce.

Lorsque $\varphi(u, v)$ est un polynôme en u, v, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, la fonction φ est composée linéairement avec les fonctions Θ de deux variables.

Lorsque $\varphi(u, v)$ est une fonction rationnelle, φ possède des singularités à distance finie.

Par exemple, on pourra prendre pour φ les expressions

$$\frac{1}{1 + u}, \quad \frac{1}{1 + v}, \quad \frac{1}{(1 + u)(1 + v)}, \quad \frac{u^a v^b}{(1 + u)^{a'} (1 + v)^{b'}},$$

a, b, a', b' désignant des entiers positifs. En supposant α, β, γ réels, les fonctions φ correspondantes possèdent des surfaces de singularités

$$x'' = (2h + 1)\pi, \qquad y'' = (2k + 1)\pi,$$

où l'on a posé $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$ et où h et k désignent des entiers quelconques.

Blutel. — Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. (155-216).

Si l'on considère une conique variable dans l'espace et dépendant d'un seul paramètre, cette conique engendrera une surface, et le long de cette conique les plans tangents à la surface envelopperont une développable de quatrième classe. L'auteur de ce travail s'est proposé d'étudier le cas où la développable en question se réduit à un cône du second degré.

Il était aisé de prévoir que cette condition imposée au déplacement de la conique devait conduire à des résultats intéressants concernant les surfaces engendrées (Σ) qui se rapprochent alors des quadriques en ce sens qu'une transformation par polaires réciproques les remplace par d'autres surfaces jouissant des mêmes modes de génération, soit ponctuel, soit tangentiel. Ce rapprochement est indiqué dès le début par l'énoncé suivant :

Les surfaces (Σ) peuvent être envisagées, soit comme enveloppes de cônes roulant sur deux développables, soit comme lieux de coniques roulant sur deux courbes.

Le choix d'un système de coordonnées étroitement lié à ces deux modes de génération s'imposait évidemment. L'auteur s'est servi de celui qui est formé par les génératrices coniques et par leurs conjuguées et commence par établir

pour ces dernières une propriété importante : elles partagent homographiquement les coniques génératrices.

Cela lui permet d'écrire les équations générales des surfaces sous la forme

$$x = \frac{P_1(\lambda)\mu^2 + 2Q_1(\lambda)\mu + R_1(\lambda)}{P(\lambda)\mu^2 + 2Q(\lambda)\mu + R(\lambda)} = \frac{N_1(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)};$$

$$y = \frac{N_2(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)}, \qquad z = \frac{N_3(\lambda, \mu)}{N(\lambda, \mu)}.$$

Les courbes ($\lambda =$ const.) sont les coniques, et les courbes ($\mu =$ const.) leurs conjuguées. On a de plus, identiquement (quel que soit μ),

$$\frac{\partial N_1}{\partial \lambda} = X(\lambda)\frac{\partial N}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \lambda} = Y(\lambda)\frac{\partial N}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \lambda} = Z(\lambda)\frac{\partial N}{\partial \lambda}.$$

X, Y, Z désignent les coordonnées du sommet du cône circonscrit le long de la conique (λ). On voit, d'après cela, que les fonctions X, Y, Z peuvent être choisies arbitrairement, ainsi que P, Q, R ; la détermination de la surface s'en déduit par des quadratures.

A ces équations réduites en coordonnées ponctuelles en correspondent évidemment de semblables en coordonnées tangentielles ; ce sont

$$u = \frac{M_1(\lambda, \mu)}{M(\lambda, \mu)}, \qquad v = \frac{M_2(\lambda, \mu)}{M(\lambda, \mu)}, \qquad w = \frac{M_3(\lambda, \mu)}{M(\lambda, \mu)},$$

avec les relations identiques

$$\frac{\partial M_1}{\partial \lambda} = U(\lambda)\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial \lambda} = V(\lambda)\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial M_3}{\partial \lambda} = W(\lambda)\frac{\partial M}{\partial \lambda}.$$

U, V, W désignent les coordonnées du plan de la conique variable. On passe d'ailleurs de l'une à l'autre de ces formes par de simples quadratures.

L'équation $\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 0$ fournit la courbe enveloppe des coniques tandis que $\frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$ représente la développable sur laquelle roulent les cônes.

Une première application importante de ces deux formes réduites consiste à montrer que les surfaces (Σ) pour lesquelles on se donne la courbe lieu des sommets des cônes et la développable enveloppe des plans des coniques ne dépendent plus que de cinq constantes arbitraires, figurant linéairement dans leurs équations, et, par suite, qu'elles sont complètement déterminées si l'on s'en donne de plus une conique ou un cône circonscrit.

La première Partie de ce travail se termine par l'analyse de quelques surfaces simples, et, en particulier, des surfaces algébriques des troisième, quatrième et cinquième degrés, et par la détermination des surfaces (Σ) pour lesquelles les cônes sont de révolution.

Ces dernières se partagent en deux catégories qui se tiennent d'une manière très étroite : les unes sont des enveloppes de sphères, les autres sont les surfaces lieux des centres de seconde courbure des précédentes.

Une seconde Partie est consacrée à l'étude des propriétés des lignes asymptotiques des surfaces (Σ) dont l'équation se présente sous forme relativement simple lorsqu'on emploie le système de coordonnées indiqué plus haut.

Cette équation est de la forme

(1) $$\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 = H(\lambda)\frac{\partial N}{\partial \lambda}\frac{\partial M}{\partial \lambda}.$$

On voit qu'elle se simplifie beaucoup dans trois cas également importants.

1° Les deux fonctions $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, considérées comme polynômes en μ, ont mêmes racines, c'est-à-dire que la développable enveloppe des cônes est circonscrite à la courbe enveloppe des coniques.

L'intégration de l'équation (1) se ramène alors à celle de deux équations de Riccati, de sorte que les coniques génératrices sont partagées homographiquement par les deux séries de lignes asymptotiques. Signalons encore quelques propriétés caractéristiques des surfaces de ce genre :

Les tangentes aux deux séries de lignes asymptotiques en tous les points d'une même conique sont les génératrices de deux hyperboloïdes circonscrits à la surface le long de cette conique.

Si le lieu des sommets des cônes est une courbe plane, la développable des plans des coniques est un cône, et réciproquement, etc.

2° Les deux polynômes $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ sont carrés parfaits. Alors la conique génératrice reste osculatrice à une courbe gauche dans son déplacement, tandis que le cône circonscrit est lui même osculateur à une développable. La propriété d'homographie signalée ci-dessus persiste dans ce cas.

3° Les racines de deux polynômes $\frac{\partial N}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ sont respectivement constantes : les coniques passent par deux points fixes et les cônes roulent sur deux plans fixes. La détermination des lignes asymptotiques s'effectue alors au moyen de simples quadratures puisque les variables se trouvent séparées dans l'équation (1).

La fin de cette seconde Partie est occupée par la détermination des surfaces enveloppes de cônes de révolution appartenant aux deux premières catégories et par la recherche des lignes asymptotiques de quelques surfaces simples, en particulier de la surface du quatrième degré à conique double et quatre points doubles.

Dans la troisième Partie du travail, la moins importante, l'auteur étudie quelques propriétés métriques relatives aux trajectoires orthogonales des coniques génératrices. Mais il se trouve amené, dès le début, à élargir la question et à chercher les trajectoires orthogonales d'une conique dépendant, d'une façon quelconque, d'un seul paramètre. On peut remplacer ce problème par un problème correspondant dans le plan ; en particulier, à une conique qui se déplace dans l'espace de telle sorte que son plan reste constamment normal à la trajectoire de l'un de ses foyers, on peut faire correspondre une conique ayant un foyer fixe dans un plan fixe. L'équation des trajectoires orthogonales s'intègre alors bien facilement dans quelques cas simples. Revenant aux surfaces (Σ), on démontre que les coniques sont partagées homographiquement par leurs trajectoires orthogonales lorsque le plan de la conique se déplace en restant normal aux courbes décrites par ses deux foyers, lesquelles sont alors deux courbes planes parallèles.

Un grand nombre des propriétés que nous venons de passer en revue rapidement, et, en particulier, celles qui sont relatives à l'homographie des lignes asymptotiques, sont susceptibles de généralisation. L'auteur s'est contenté de traiter le cas des génératrices coniques.

Méray. — Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer une

seule équation aux dérivées partielles à une fonction inconnue dont les dérivées y entrent linéairement au cas d'un système passif d'équations de cette sorte en nombre quelconque. (217-232).

Guichard. — Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent. (233-264).

Il existe des relations très étroites entre les trois groupes suivants de surfaces : 1° les surfaces à courbure totale constante ; 2° les nappes focales S_1, S_2 d'une congruence C telle que les développables de C touchent S_1, S_2 suivant leurs lignes de courbure; 3° les surfaces Σ qui admettent un réseau conjugué formé de géodésiques.

M. Guichard établit les relations qui existent soit entre les surfaces d'un même groupe, soit entre les surfaces de groupes différents, et il met à profit ces relations pour déduire de surfaces connues des surfaces nouvelles.

Il ramène la détermination des surfaces à courbure constante à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin \varphi$$

et à la résolution d'une équation de Riccati, ce qui, au fond, ne diffère pas de la méthode de M. Weingarten.

Comme on ne sait pas intégrer cette équation, on a cherché des méthodes qui permettent de déduire d'une surface à courbure constante une infinité de surfaces analogues.

Telle est la méthode de M. Bäcklund qui comprend comme cas particulier celle de MM. Bianchi et Ribaucour. M. Bäcklund montre que, si dans une congruence la distance focale est constante et si les plans focaux font un angle constant, les surfaces focales sont des surfaces à courbure constante. M. Guichard donne de la transformation de Bäcklund une nouvelle expression analytique qu'il utilise dans la recherche de quelques surfaces S particulières.

Il s'attache spécialement à l'étude des surfaces S et Σ. Il montre qu'un couple S_1, S_2 peut être obtenu par des quadratures quand on connaît une surface à courbure constante rapportée à ses lignes asymptotiques et une solution de l'équation correspondante

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \omega \cos \varphi.$$

Cette équation admet comme solutions particulières $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$; dans ce cas, l'une des surfaces S_1, S_2 est une sphère. La congruence formée par les tangentes communes à deux sphères est manifestement une congruence du type C; il y correspond des solutions particulières de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin \varphi,$$

que l'on peut obtenir à l'aide de quadratures elliptiques.

Les cosinus α, β, γ de la normale à une surface à courbure constante sont solutions de l'équation (1); il y correspond des congruences C, dont la surface centrale est un plan.

L'équation (1) admet enfin une infinité de systèmes distincts de trois solutions ξ, η, ζ liées par la relation

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const.},$$

où f est une fonction quadratique homogène. Les surfaces S correspondantes sont telles que les lignes de courbure d'un système sont coupées sous un angle constant par les rayons vecteurs issus d'un point fixe.

La détermination analytique des surfaces Σ est identique avec celle des surfaces S, car le plan tangent à Σ a pour coordonnées α, β, γ et δ [δ étant une solution quelconque de l'équation (1)].

Il y a une relation géométrique simple entre les surfaces S et les surfaces Σ. L'une des nappes de la surface des centres des courbures de S est une surface Σ. Inversement, les tangentes aux géodésiques conjuguées de Σ sont normales à des surfaces S.

De là résulte que d'une congruence C donnée on peut en déduire une infinité d'autres. La méthode de transformation pourra être poursuivie tant que la surface Σ que l'on obtient existera réellement, c'est-à-dire tant qu'on ne tombera pas sur une sphère.

A cette transformation géométrique correspond, au point de vue analytique, une transformation de l'équation (1) : les solutions ξ, η, ζ sont les seules qui, par cette transformation, se reproduisent multipliées par un facteur constant.

Riquier. — Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques. (265-288).

L'auteur s'est proposé d'établir quelques propriétés générales des fonctions continues de plusieurs variables et, en particulier, d'étendre à ces dernières le théorème de M. Darboux d'après lequel, si une fonction continue de deux variables réelles prend, pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour fermé, des valeurs comprises entre deux nombres H et K, elle prend forcément, pour un système au moins de valeurs des deux variables indépendantes, la valeur qui marque la limite maximum ou minimum de toutes les valeurs qu'elle peut prendre.

On sait que ce théorème était impliqué à l'état de postulat dans la démonstration donnée par Cauchy du principe fondamental de la théorie des équations algébriques.

M. Riquier cherche à réduire à la plus grande simplicité possible les raisonnements qui permettent d'éviter toute considération relative à l'Algèbre dans la démonstration de ce principe fondamental, que Cauchy faisait reposer sur des considérations empruntées à la théorie des fonctions circulaires.

Darboux. — Sur le déplacement d'une figure invariable. (325-326).

Réimpression d'une Note publiée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 118.

Darboux. — Sur une classe de courbes unicursales et sur une propriété du cercle. (327-334).

Réimpression de deux Notes publiées dans le t. XCIV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 930 et 1108.

Fouché. — Sur les courbes algébriques à torsion constante. (335-344).

Il existe une courbe et une seule dont le rayon de torsion est constamment égal à une constante donnée et telle que le cône formé par des parallèles aux binormales soit égal à un cône donné. Quand on connaît l'équation de ce cône, la détermination de la courbe à torsion constante ne dépend que de quadratures.

Pour que la courbe soit algébrique, il faut et il suffit : 1° que le cône parallèle aux binormales soit algébrique; 2° que l'intersection de ce cône avec une sphère ayant son centre au sommet se projette sur un plan quelconque suivant une courbe algébriquement carrable, de sorte que la question se trouve ramenée à la recherche des courbes sphériques dont la projection sur un plan quelconque est algébriquement carrable.

La détermination d'une pareille courbe dépend de la détermination de deux fonctions algébriques d'une seule variable qui doivent vérifier une certaine équation différentielle qui est du second ordre et du second degré par rapport à l'une des fonctions et qui est une équation de Riccati par rapport à l'autre.

Enfin on peut trouver une infinité de courbes algébriques (imaginaires) à torsion constante; en particulier, tout polynôme entier en fournira une.

Dautheville. — Sur la transformation du mouvement. (361-374).

M. Appell a montré (*American Journal of Mathematics*, vol. XII, p. 103) l'utilité des transformations homographiques dans diverses questions de Mécanique, et il a proposé la généralisation suivante des résultats qu'il a obtenus :

Étant données les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où T est une forme quadratique des q'_i avec des coefficients fonctions des q et où les Q_i dépendent seulement des q_i, trouver les transformations

$$r_i = f_i(q_1, \ldots, q_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$
$$dt_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\, dt,$$

qui changent ces équations en d'autres de la forme

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial S}{\partial r_i} = R_i, \qquad r'_i = \frac{dr_i}{dt_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où S est une forme quadratique des r_i avec des coefficients fonctions des q_i et les R_i ne dépendant que des q_i.

M. Dautheville se borne au cas du mouvement d'un point sur une surface et fait voir que les transformations cherchées sont celles qui conservent les lignes géodésiques, ainsi que l'a prévu M. Appell.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XVI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XVI; 1892. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica; T. XI, XII, 1888-89. — 31-45.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles; 1888. — 49-52.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure; 3e série, T. VII, [illegible] — 182-196.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 3e série, T. XV, 1888. — 45-49.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; T. CX, CXI, 1890. — 57-82, 119-133.

Journal für die reine und angewandte Mathematik; t. C, [illegible]

Mathesis; t, VIII, 1888. — 52-55.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège; T. XIV, XV, 18[illegible]

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna; 4e serie, T. VII, VIII, IX, 1886-1889. — 5-12.

Nouvelles Annales de Mathématiques; T. X, 1891. — [illegible]

Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1888 (1er et 2e semestres), 1889 (1er et 2e semestres). [illegible]

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XVI.

18118 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.